Soluzione esercizio 1

Testo dell'esercizio:

Nello spazio affine $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ sono dati due piani π, σ sghembi tra loro.

1. Mostrare che esistono rette sghembe sia con π che con σ; per ogni tale retta r mostrare che esiste un unico spazio S_r di dimensione 3 contenente r e che sia "non generante" con entrambi i piani (cioè $S_r \vee \pi \neq \mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ e $S_r \vee \sigma \neq \mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$;

2. Mostrare che $S_r \vee \pi = r \vee \pi$ e $S_r \vee \sigma = r \vee \sigma$. Determinare le possibili posizioni reciproche di S_r con π e con σ.

3. Determinare i casi possibili per le intersezioni $S_r \wedge \pi$ e $S_r \wedge \sigma$ e dire se queste determinano lo spazio S_r.

[*Suggerimento: eventualmente scegliere un riferimento affine in cui i due piani abbiano espressione semplice, ma si può anche risolvere l'esercizio in modo astratto (preferibile).*]

Richiami e fatti utili

Distributività di meet e join (non vale sempre con uguaglianza!): Siano $\mathbb{L}, \mathbb{M}, \mathbb{T}$ tre varietà lineari a 2 a 2 sghembe in uno spazio affine, allora valgono

$$(\mathbb{L} \wedge \mathbb{M}) \vee \mathbb{T} \subset (\mathbb{L} \vee \mathbb{T}) \wedge (\mathbb{M} \vee \mathbb{T}) \tag{1}$$

and

$$(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) \wedge \mathbb{T} \supset (\mathbb{L} \wedge \mathbb{T}) \vee (\mathbb{M} \wedge \mathbb{T}) \,. \tag{2}$$

La dimostrazione di entrambe le inclusioni è quasi immediata.

Pensate a qualche controesempio per cui non valga l'uguaglianza (*sugg: basta già lo spazio euclideo di dimensione* 3).

Svolgimento

Esistenza di una retta sghemba con entrambe le varietà:

Si scrivano π e σ come

$$\pi = P_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\sigma = S_0 + \langle w_1, w_2 \rangle.$$

Mostriamo che la retta

$$\overline{r} := \left(\frac{1}{2} P_0 + \frac{1}{2} S_0 \right) + \langle v_1 + w_1 \rangle$$

è sghemba con entrambi i piani. Chiamiamo per semplicità $R_0 := \frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}S_0$ e ragioniamo nella base (dello spazio delle traslazioni) $\{v_1, v_2, w_1, w_2, S_0 - P_0\}$. In tale base si ha che i 4 vettori $v_1, v_2, v_1 + w_1, R_0 - P_0$ hanno rispettivamente coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

e sono evidentemente linearmente indipendenti. Ciò mostra che r e π sono due varietà sghembe. In modo completamente analogo si vede che anche r e σ sono due varietà sghembe.

Esistenza e unicità di $\mathbf{S_r}$:

Oss1: Se S_r esiste, allora $\dim(S_r \vee \pi) = 4$. Questo perché $r \vee \pi \subset S_r \vee \pi$, da cui

$$4 = \dim(r \vee \pi) \leq \dim(S_r \vee \pi) < \dim(\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})) = 5,$$

dove la disuguaglianza stretta segue dal fatto che per ipotesi S_r e π non sono generanti.

Oss2: Se S_r esiste, allora $\dim(S_r \vee \sigma) = 4$. Si vede in modo identico all'osservazione precedente.

Oss3: Dalle inclusioni $r \vee \pi \subset S_r \vee \pi$ e $r \vee \sigma \subset S_r \vee \sigma$ e dalle dimensioni segue che, se S_r esiste, allora

$$S_r \vee \pi = r \vee \pi, \quad S_r \vee \sigma = r \vee \sigma.$$

Oss4: Dalla Oss3 segue in modo immediato che, sempre se S_r esiste, allora $S_r \subset (r \vee \pi) \wedge (r \vee \sigma)$.

Oss5: Poiché con le formule di Grassmann si vede che $\dim\big((r\vee\pi)\wedge(r\vee\sigma)\big)=3$, si ha in definitiva che se S_r esiste, allora deve essere proprio uguale (per dimensione) a $(r\vee\pi)\wedge(r\vee\sigma)$.

Se quindi mostriamo che $(r\vee\pi)\wedge(r\vee\sigma)$ è effettivamente una varietà come quella richiesta, allora esistenza e unicità sono dimostrate. Le cose da dimostrare per concludere sono:

(1) $\dim\big((r\vee\pi)\wedge(r\vee\sigma)\big)=3$,

(2) $\Bigg((r\vee\pi)\wedge(r\vee\sigma)\Bigg)\vee\pi \;\neq\; \mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$

(3) $\Bigg((r\vee\pi)\wedge(r\vee\sigma)\Bigg)\vee\sigma \;\neq\; \mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$.

La (1) si è già vista sopra, e segue dalle formule di Grassmann. La (2) e la (3) seguono dalle formule di distributività con le inclusioni. infatti

$$\begin{aligned}\Bigg((r\vee\pi)\wedge(r\vee\sigma)\Bigg)\vee\pi \;&\subset \Bigg((r\vee\pi)\vee\pi\Bigg)\wedge\Bigg((r\vee\sigma)\vee\pi\Bigg)\\ &=\Bigg(r\vee\pi\Bigg)\wedge\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})\\ &=r\vee\pi\neq\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})\end{aligned}$$

e similmente

$$\begin{aligned}\Bigg((r\vee\pi)\wedge(r\vee\sigma)\Bigg)\vee\sigma \;&\subset \Bigg((r\vee\pi)\vee\sigma\Bigg)\wedge\Bigg((r\vee\sigma)\vee\sigma\Bigg)\\ &=\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})\wedge\Bigg(r\vee\sigma\Bigg)\\ &=r\vee\sigma\neq\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})\end{aligned}$$

Posizione reciproca tra $\mathbf{S_r}$ e π,σ:

Oss6.1: Se $\mathbf{S_r}||\pi$, allora $\mathbf{S_r}$ è incidente con σ esattamente in una retta. Infatti supponiamo di scrivere S_r come

$$A_0+\langle v_1,v_2,u\rangle,\quad \text{con } \langle v_1,v_2\rangle=V_\pi.$$

Allora l'unica possibilità per avere che S_r e σ non siano generanti è che non siano disgiunti, altrimenti si avrebbe che $A_0-S_0\notin\langle v_1,v_2,w,w_1,w_2\rangle$, da cui $\dim_{\mathbb{Q}^5}\big(\langle v_1,v_2,w_1,w_2,A_0-S_0\rangle=5$ e in particolare

$$\dim(S_r\vee\sigma)\geq\dim_{\mathbb{Q}^5}\big(\langle v_1,v_2,w_1,w_2,A_0-S_0\rangle=5.\text{ (assurdo)}$$

Inoltre devono intersecarsi in almeno una retta, altrimenti gli spazi direttori avrebbero intersezione banale e il join di S_r e σ avrebbe dimensione 5.

Infine non possono intersecarsi in una varietà più grande di una retta, altrimenti si troverebbe che π e σ non hanno spazi direttori con intersezione banale, il che invece è vero per ipotesi iniziale.

E allora l'unica possibilità è che si intersechino esattamente in una retta.

Oss6.2: Se $\mathbf{S_r}||\sigma$, allora $\mathbf{S_r}$ è incidente con π esattamente in una retta. Si vede in modo identico alla Oss6.1

Oss7.1: Se $\mathbf{S_r}||\sigma$, allora $\mathbf{r} \subset \pi + \mathbf{V}_\sigma$. È evidente una volta osservato che $S_r \vee \pi \supset \pi + V_\sigma$ e che per dimensione devono essere uguali.

Oss7.2: Se $\mathbf{S_r}||\pi$, allora $\mathbf{r} \subset \sigma + \mathbf{V}_\pi$. È analogo alla 7.1 .

Oss8.1: Se $\mathbf{r} \subset \pi + \mathbf{V}_\sigma$, allora $\mathbf{S_r}$ è parallelo a σ.

Infatti dall'inclusione seguirebbe che

$$S_r \vee \pi = r \vee \pi = \pi + V_\sigma \quad \text{(per inclusione e dimensione)}$$

$$S_r \wedge \sigma = \varnothing \quad \text{(perché } (\pi + V_\sigma) \wedge \sigma = \varnothing)$$

e se per assurdo non si avesse il parallelismo con σ, allora si avrebbe anche che

$$\dim_{\mathbb{Q}^5} \left(V_{S_r} + V_\sigma\right) = \dim(V_{S_r}) + \dim(V_\sigma) - \dim(V_{S_r} \cap V_\sigma) \geq 4.$$

Mettendo insieme queste 3 affermazioni si vedrebbe che

$$\dim(S_r \vee \sigma) \geq 4 + 1 = 5$$

e quindi che S_r e σ sono generanti, che invece è falso.

Oss8.2: Se $\mathbf{r} \subset \sigma + \mathbf{V}_\pi$, allora $\mathbf{S_r}$ è parallelo a π. Si vede in modo identico alla Oss8.1 .

PRIMA CONCLUSIONE:

Dalle osservazioni 6.1, 6.1, 7.1, 7.2, 8.1, 8.2 si deduce che

$$\begin{array}{l} S_r \text{ è parallelo a } \pi \text{ e} \\ \text{incidente con } \sigma \text{ in una retta} \end{array} \Leftrightarrow r \subset \sigma + V_\pi$$

e che

$$\begin{array}{l} S_r \text{ è parallelo a } \sigma \text{ e} \\ \text{incidente con } \pi \text{ in una retta} \end{array} \Leftrightarrow r \subset \pi + V_\sigma$$

Oss9.1: Se $\mathbf{S_r}$ non è parallelo con π, allora ci è incidente esattamente in una retta. Infatti se non sono paralleli sappiamo che $\dim(V_{S_r} \cap V_\pi) < 2$. Abbiamo che:

1. se tale dimensione fosse nulla allora S_r e π sarebbero generanti (perché si avrebbe $\dim(V_{S_r} + V_\pi) = 5$);
2. se S_r e π fossero disgiunti allora sarebbero generanti (perché $\dim(S_r \vee \pi) = \dim(V_{S_r} + V_\pi) + 1 \geq 4 + 1$ e non potendo superare 5 sarà in particolare uguale a 5).

L'unico caso possibile è dunque che si intersechino in una retta.

Oss9.2: Se $\mathbf{S_r}$ non è parallelo con σ, allora ci è incidente esattamente in una retta. Si mostra come nella Oss9.1

SECONDA CONCLUSIONE:
Dalle osservazioni 9.1 e 9.2, insieme con la prima conclusione fatta prima, si deduce che

$$\begin{array}{c} S_r \text{ è incidente con } \pi \text{ in una retta} \\ \text{e incidente con } \sigma \text{ in una retta} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} r \not\subset \sigma + V_\pi \text{ e} \\ r \not\subset \pi + V_\sigma \end{array}$$

Riassunto e risposte alle domande dell'esercizio: La varietà S_r esiste, è unica ed è data da $(r \vee \pi) \wedge (r \vee \sigma)$.

Le possibili posizioni reciproche con i due piani π e σ sono il parallelismo o l'incidenza in una retta (e solo nelle combinazioni parallelo-incidente, incidente-incidente, incidente-parallelo).

I possibili casi sono quelli individuati sopra nella "prima conclusione" e nella "seconda conclusione".

Nel caso siano dati $S_r \wedge \pi$ e $S_r \wedge \sigma$ si può vedere che:

- Se le due intersezioni sono due rette s, t, allora semplicemente si può ricostruire S_r come $s \vee t$.
- Se le due intersezioni sono una retta s e l'insieme vuoto, allora per ricostruire S_r è necessario usare anche r, e si ha $S_r = s \vee r$.
- Se le due intersezioni sono l'insieme vuoto e una retta t, allora per ricostruire S_r è necessario usare anche r, e si ha $S_r = t \vee r$.