# Geometria 1 - mod B - 10/05/2023

Note Title

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \equiv \{$ sottosp. di dim. 1 in $\mathbb{R}^2 \} \equiv \dfrac{\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}}{\sim}$

$\{\langle v \rangle,\ v \in \mathbb{R}^2,\ v \neq 0\}$

$\binom{a}{b} \sim \binom{a'}{b'}$ se $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*$ t.c. $\binom{a}{b} = \binom{\lambda a'}{\lambda b'}$

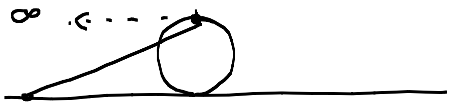
$P = \binom{a}{b}$ con $(a,b) \neq (0,0)$

$\underbrace{[a : b]}_{\text{più comune}}$ oppure $(a ; b)$ . . . . .

Sia $P = \binom{a}{b} \left(\neq \binom{0}{0}\right)$

- $a \neq 0$: $P = \binom{1}{b/a} \in \mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{x_0 = 0\}$
- $a = 0$: $P = \binom{0}{b} = \binom{0}{1}$ pto all'infinito

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$




Analogo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \equiv \dfrac{\mathbb{R}^3 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}}{\sim_{\text{proporz.}}} = \{\langle v \rangle,\ v \in \mathbb{R}^3,\ v \neq 0\}$

$$\begin{pmatrix}\lambda a_0\\ \lambda a_1\\ \lambda a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$\lambda \in \mathbb{R}^*$

<u>Ricordo</u>: Se $V$ è uno sp. vett. su $K$ di dim $n$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots v_n\}$ è una base (ordinata) di $V$ posso associare a ogni $v \in V$ una $n$-upla $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \in K^n$ t.c. $v = \sum a_i v_i$

$\leftarrow$ coordinate di $v$ nella base $\mathcal{B}$

Inoltre resta fissato $\alpha_{\mathcal{B}} : V \xrightarrow{\sim} K^n$ ← sp. vett. standard

isomorf di sp. vett.

$v \longmapsto \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ le coord.

$v_i \longmapsto e_i$

<u>Conclusione</u>: fissare una base di $V$ equivale a fissare un isomorf di $V$ con lo sp. vett. standard $K^n$.

- Se $(\mathbb{A}, V, +)$ è uno spazio affine di dim $n$ su $K$ e $\mathbb{A}^n(K)$ indico $(K^n, K^n, +)$

fissato un s. d. r. $\{\underset{\mathbb{A}}{P_0}, \underbrace{v_1, \dots v_n}_{\text{base di } V}\} = \mathcal{R}$

posso associare ad ogni punto le sue coordinate:

$$\mathbb{A} \ni P \Rightarrow \underset{V}{P - P_0} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad P = P_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

$K^n \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ sono le coordinate di $P$ risp al s.d.r. $\mathcal{R}$

$$\alpha_{\mathcal{R}} : (\mathbb{A}, V, +) \xrightarrow[\text{isomorf. di sp. affini}]{1} \mathbb{A}^n(K)$$

$$P = P_0 + \sum a_i v_i \longmapsto \underset{\text{origine } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}{O} + \sum a_i e_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{punto}$$

E vale anche il viceversa:

<u>Conclusione</u> fissare un s.d.r. su $(\mathbb{A}, V, +)$ (di dim $n$) equivale a dare un isomorf di $\mathbb{A}$ con $\mathbb{A}^n(K)$.

<u>Ricordo</u> $\mathcal{R} = \{P_0, v_1, \dots, v_n\} \longleftrightarrow \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$

$$P_i = P_0 + v_i \qquad i \geq 1$$

- Ora definiamo s. d. rif $\underset{\text{dim } n}{\mathbb{P}(V)}$ con $V$ sp. vett. di dim $n+1$ su $K$

$$= \{\langle v \rangle, v \in V \setminus \{0\}\}$$

Vogliamo definirli in modo che forniscano "biiezioni" con $\mathbb{P}^n(K)$

<u>Def</u> Un s. di rif. proiettivo su $\mathbb{P}(V)$ è il dato di una base $\underbrace{v_0, v_1, \dots, v_n}_{n+1 \text{ vettori}}$ di $V$ definita a meno di moltiplicare per uno stesso $\underset{\neq 0}{\lambda} \in K$ tutti i vettori

$$\mathbb{P}(V) \ni P = \langle \underset{\neq 0}{v} \rangle \qquad v = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= \langle \underset{\neq 0}{\lambda} v \rangle \qquad \lambda v = \lambda\left(\sum_{i=0}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) v_i \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda a_0 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(K) \\ P=\langle v\rangle & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_0\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda a_0 \\ \vdots \\ \lambda a_n\end{pmatrix} \end{array}$$

come punto di $\mathbb{P}^n$

e viceversa.

<u>Lemma</u> Dare un s.d.r. su $\mathbb{P}(V)$ di dim $n$ è equivalente a dare $n+2$ di $\mathbb{P}(V)$ t.c. $n+1$ di essi generino tutto $\mathbb{P}(V)$ comunque li scelgo.

Una volta dimostrato, dare un s.d.r. su $\mathbb{P}(V)$ vuol dire dare

$$\underset{P_0}{\langle v_0\rangle}, \underset{P_1}{\langle v_1\rangle}, \dots, \underset{P_n}{\langle v_n\rangle}, \underset{U}{\langle u\rangle} \leftarrow \text{pto unità}$$

t.c. $v_0, \dots, v_n$ sono base di $V$ e pure $\underbrace{v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_n, u}_{\text{base di } V}$ ($\hat{v_i}$: lo tralascio)

<u>Dim</u>: Sia $v_0, \dots, v_n$ base di $V$ a meno di molt. per $\lambda \in K^*$

definisco $P_0 := \langle v_0\rangle$, $P_1 := \langle v_1\rangle$ ..., $P_n := \langle v_n\rangle$, $U := \langle v_0+v_1+\dots+v_n\rangle$

e la condiz. sui $P_i$, $U$ è banalmente soddisfatta

$\lambda \neq 0$ $\lambda v_0, \lambda v_1, \dots, \lambda v_n$ $\quad P_i' := \langle \lambda v_i\rangle = \langle v_i\rangle = P_i$

$$U' = \langle \underbrace{\lambda v_0 + \lambda v_1 + \dots + \lambda v_n}_{\lambda(\sum_{i=0}^n v_i)}\rangle = \langle \sum v_i\rangle = U$$

Viceversa, dati $n+2$ pti come nelle ipotesi

$P_0 = \langle v_0\rangle, \dots, P_n = \langle v_n\rangle$, $U = \langle u\rangle$

con $v_0, \dots, v_n$ base di $V$ $\Rightarrow$ $u = a_0v_0 + \dots + a_nv_n$

$$P_0 = \langle \underbrace{a_0v_0}_{v_0'}\rangle \dots P_i = \langle \underbrace{a_iv_i}_{v_i'}\rangle \dots P_n = \langle \underbrace{a_nv_n}_{v_n'}\rangle \qquad u = v_0' + \dots + v_n'$$

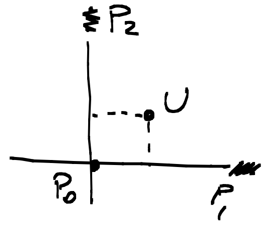
$P_0, \dots P_n, U \rightsquigarrow$ s.d.r. proiettivo $P_0, \dots, P_n$

se scrivo bene le coordinate di $P_0, \dots P_n$

<u>Esempio</u> $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ s.d. rif canonico $\mathbb{R}^3$ $e_1, e_2, e_3$

Tolgo quando considero come punti proiettivi

$$P_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$



Es. descrivere $\overset{\text{s.d.}}{\text{rif}}$ standard di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Coordinate di un punto in $\mathbb{P}(V)$ fissato un s.d. rif.

$$P_0, \ldots, P_n, U \qquad u = v_0 + \ldots + v_n$$
$$P_0 = \langle v_0 \rangle, \quad P_n = \langle v_n \rangle, \quad U = \langle u \rangle$$

$$P \in \mathbb{P}(V), \quad P = \langle v \rangle = \langle \lambda v \rangle \qquad V \ni v = \sum_{i=0}^{n} a_i v_i \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ le coordinate di $P$ risp. al s.d.r. proiett. dato

$$\lambda v = \sum \lambda a_i v_i$$

<u>Osservazione</u> (vale nel piano!)

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $\quad r: R \vee S = \langle v, w \rangle$ ← piano in $\mathbb{R}^3$ $\qquad \underbrace{a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 = 0}_{\text{equaz. del piano}}$

$R = \langle v \rangle$, $S = \langle w \rangle$

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ è vettore ortog a $v$ e a $w$ determinato a meno di propor

a meno di proporz

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

Ad esempio se $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$0X_0 - 2X_1 + X_2 = 0 \qquad \boxed{2X_1 - X_2 = 0} \text{ è equaz omogenea di } R \vee S$$

$$\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{X_0 = 0\}$$

la ch. x, la ch. y

$$\begin{pmatrix} x_1/x_0 \\ x_2/x_0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad 2x - y = 0 \text{ è proprio eq } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Suppongo ora di avere due rette distinte $R_1 \vee S_1$ $\quad R_2 \vee S_2$

$$r_1 \neq r_2$$

$$r_1 \cap r_2 = \text{punto} \qquad \begin{cases} a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 = 0 \\ b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 = 0 \end{cases} \text{ eq}$$

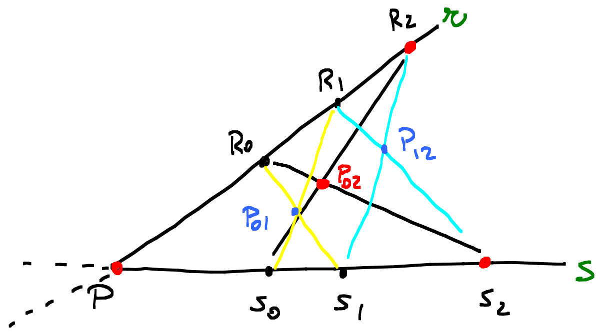
Una soluzione è quindi data da $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ← queste sono i.e. punto $r \cap s$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$

Infatti le soluzioni della 1ª eq sono $\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$ $\quad$ 2ª eq $\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$

In definitiva $(R_1 \vee S_1) \wedge (R_2 \vee S_2) \text{ “}=\text{” } \underbrace{(R_1 \times S_1)}_{\text{coord delle rette } \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}} \times \underbrace{(R_2 \times S_2)}_{\text{coord rette } \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}$

---

## Teorema di Pappo (proiettivo)




$r, s$ rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$P = r \wedge s$

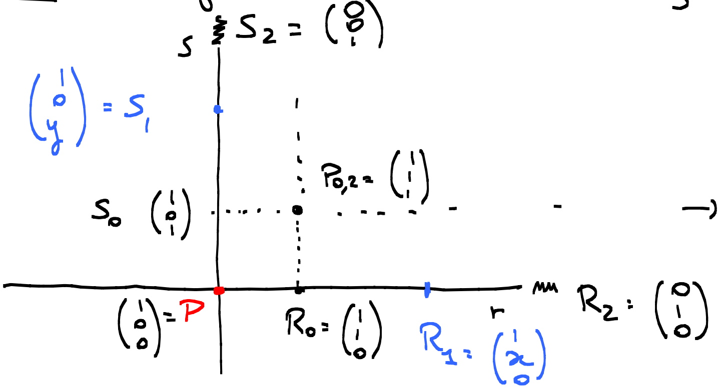
distinti $R_0, R_1, R_2 \in r$

distinti $S_0, S_1, S_2 \in s$

$i \neq j \quad P_{ij} := (R_i \vee S_j) \wedge (R_j \vee S_i)$

I 3 punti $P_{01}, P_{02}, P_{12}$ sono allineati e la retta che li contiene (retta di collineazione) passa per $P \Leftrightarrow$ le rette $R_i \vee S_i$ sono concorrenti in un punto

**Dim** Scelgo come sistema di riferimento $P \; R_2 \; S_2 \; P_{02}$




$\rightarrow$ retta $P_{02} \vee R_2 = S_0 \vee R_2$

$P_{02} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

$$P_{12} : (R_1 \vee S_2) \wedge (R_2 \vee S_1) = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$P_{01} : (R_0 \vee S_1) \wedge (R_1 \vee S_0) : \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \right] \times \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} y \\ -y \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +xy-1 \\ +xy-x \\ -y+xy \end{pmatrix}$$

Per verificare se $P_{02}, P_{12}, P_{01}$ sono allineati:

basta vedere se i vettori corrisp. di $\mathbb{R}^3$ sono complanari ($\Leftrightarrow$ l. dip.)

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1-xy \\ 1 & x & -x-xy \\ 1 & y & \underbrace{-y-xy}_{-\text{II}-xy\text{I}} \end{pmatrix} < 3$$

Dunque i 3 punti sono allineati.

Inoltre essi sono allineati con $P \iff rk\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x & 0\\ 1 & y & 0\end{pmatrix} < 3 \iff \det(\ ) = 0 \iff \boxed{y - x = 0} \iff x = y$

$R_0 \vee S_0$ $\quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ è la retta $x_0 - x_1 - x_2 = 0$, $\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$ coeff.

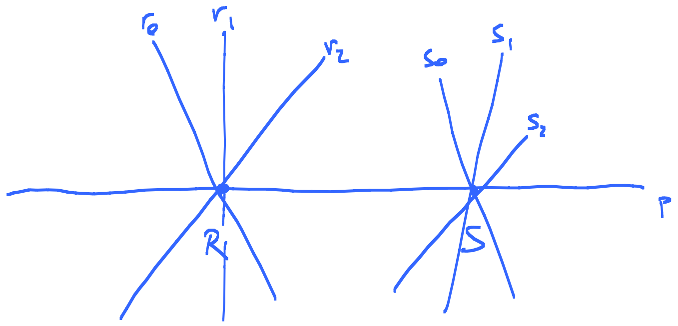
$R_1 \vee S_1$ $\quad \begin{pmatrix}1\\x\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}xy\\-y\\-x\end{pmatrix}$ $\quad (xy)x_0 - yx_1 - xx_2 = 0$

$R_2 \vee S_2$ $\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad x_0 = 0$

Sono concorrenti $\iff \begin{cases} \equiv \\ \equiv \end{cases}$ soluzione $\iff \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}xy\\-y\\-x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sono l. dip

$\iff \det\begin{pmatrix}1 & xy & 1\\ -1 & -y & 0\\ -1 & -x & 0\end{pmatrix} = 0 \iff \boxed{x - y = 0} \iff P_{01}, P_{02}, P_{12}$ sono allineati con $P$

1) Provare ed enunciare il risultato duale proiettivo di questo teorema




Siano $R$, $S$ due punti distinti del piano e sia $p : R \vee S$

Siano $r_0, r_1, r_2$ 3 rette per $R$ e $s_0\ s_1\ s_2$ 3 rette per $S$

Per $i \neq j$ definiamo $p_{ij} = (r_i \wedge s_j) \vee (r_j \wedge s_i)$

Allora le 3 rette $p_{01}$, $p_{02}$, $p_{03}$ sono concorrenti ad un punto e questo punto appartiene a $p$ $\iff r_0 \wedge s_0$, $r_1 \wedge s_1$, $r_2 \wedge s_2$ sono allineati.

2) Esercizio. In $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ si consideri il sottosp. vettoriale $V$ di $\mathbb{R}^4$ generato da $v_1 = e_1 + 2e_4$ e da $v_2 = 3e_1 + e_2$

Sia $S = \mathbb{P}(V)$ (il corrisp. sottosp. proiett. in $\mathbb{P}^3$)

e sia $T : \begin{cases} x_0 - 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

a) Determinare le dimensioni di $S$ e $T$

b) Determinare $T \wedge S$

c) Scrivere l'eq di $T \cap \mathbb{A}^3$, $S \cap \mathbb{A}^3$ con $\mathbb{A}^3 = \mathbb{P}^3 \setminus \{x_0 = 0\}$

d) Sia $M$ il piano di $\mathbb{A}^3$ di eq $x - y + 2z = 3$ $\quad (x = \frac{x_1}{x_0}, \dots)$

d1) Quali sono i suoi punti all'infinito?

d2) $M \vee S = ?$