METODI DI VISCOSITÀ PER L'OMOGENEIZZAZIONE DI EQUAZIONI NONLINEARI A DERIVATE PARZIALI (VISCOSITY METHODS FOR THE HOMOGENIZATION OF NONLINEAR PDES)

Martino Bardi

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova,
via Trieste 63, 35121 Padova, Italy; E-mail: bardi@math.unipd.it

Abstract.
These are the lecture notes taken by Claudio Marchi (marchi@math.unipd.it) of a short Ph. D. course that I gave in Padova in February and March 2003. On some model problems I present the methods developed within the theory of viscosity solutions to deal with the periodic homogenization of fully nonlinear partial differential equations of first or second order not in divergence form. In particular I show the connections with the classical ergodic theory. In this version (April 2011) I corrected some errors and misprints and updated a bit the references.

Contents

1. Introduzione

Numerosi problemi delle scienze applicate coinvolgono due scale spaziali (per esempio, quelli concernenti i materiali gassosi, porosi, stratificati o dannegiati microscopicamente) o temporali (ad esempio in controllo ottimo) di ordini di grandezza differenti. In essi i fenomeni nella scala più piccola ammettono una descrizione matematica, ma spesso sono molto complessi per l'alto numero di variabili, mentre i fenomeni osservabili o effettivamente misurabili sono solo quelli della scala più grande.

Partendo da modelli che descrivono i fenomeni microscopici, la teoria della omogeneizzazione punta a costruire modelli meno complessi che catturino aspetti macroscopici del problema in questione, mediando le eventuali oscillazioni microscopiche.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Tali modelli possono essere verificati in base alle osservazioni e studiati con minori difficoltà, ad esempio con metodi numerici.

Notazioni. In tutte queste note adotteremo la notazione di Einstein circa le somme sugli indici ripetuti. Denoteremo: $u_t \equiv \partial u/\partial t$, $u_{x_i} \equiv \partial u/\partial x_i$, $Du \equiv D_x u \equiv (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ e $D^2 u \equiv (u_{x_i x_j})_{i,j=1,\dots,n}$. Con $\mathcal{M}_{m,n}$ (rispettivamente, con $\mathcal{S}^n$) indicheremo lo spazio delle matrici $m \times n$ (rispettivamente, simmetriche $n \times n$) a coefficienti reali. Con $Lip(\mathbb{R}^n)$ indicheremo lo spazio delle funzioni lipschitziane definite su $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1. Diremo che una funzione G definita su $\mathbb{R}^n$ è periodica se verifica

$$G(y+k) = G(y), \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^n.$$

In altre parole, diremo che una funzione è periodica se è tale rispetto al cubo unitario di $\mathbb{R}^n$.

Esempio 1.1. Un problema classico che si trova in tutti i libri di omogeneizzazione, e.g. [BLP, JKO], è l'equazione in forma di divergenza

$$-\left(a_{ij}(x, x/\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i}\right)_{x_j} = f(x, x/\varepsilon), \qquad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

dove $\varepsilon > 0$, i coefficienti $a_{ij}(x,y)$ ed il dato $f(x,y)$ sono definiti su $\Omega \times \mathbb{R}^n$ e sono periodici rispetto alla variabile y. È ben noto che se la matrice $(a_{ij})_{i,j}$ è positiva allora l'equazione (1.1) è ellittica e che per questo tipo di equazioni si ha l'esistenza di (almeno) una soluzione sotto ipotesi relativamente deboli sugli $a_{ij}(x,y)$ e su $f(x,y)$.

Problema: cosa succede per $\varepsilon \to 0$? Le soluzioni u^ε convergono ad una funzione u? Se sì, in che norma? E la funzione u soddisfa qualche equazione tipo (1.1)?

Esempio 1.2. Consideriamo ora il problema ellittico

$$-\left(a_{ij}(x) u^\varepsilon_{x_i}\right)_{x_j} = f(x), \qquad \forall x \in \Omega \backslash Z_\varepsilon, \tag{1.2}$$

dove l'insieme Z_ε crea un "buco periodico" in Ω. Per $\varepsilon \to 0$ i buchi si rimpicciolis-cono e si infittiscono. Supponiamo anche di porre condizioni affinchè il rapporto fra l'area totale dei buchi e quella di Ω rimanga costante.

Problema: quali saranno gli aspetti macroscopici della soluzione?

Le equazioni dei due esempi precedenti sono entrambe in forma di divergenza, ellittiche e stazionarie. C'è una vastissima teoria per tali equazioni, sviluppata per decenni a partire dagli anni '60 e basata principalmente su metodi variazionali. Il lettore interessato puó consultare ad esempio i trattati [BLP, JKO, BrD] e le loro ampie bibliografie.

Nel seguito esporremo alcuni metodi recenti per trattare equazioni non in forma di divergenza, *completamente non-lineari* (fully nonlinear) e di tipo evolutivo, cioè della forma equazioni

$$\begin{cases} u^\varepsilon_t(t,x) + F\left(x, x/\varepsilon, t, u^\varepsilon, Du^\varepsilon, D^2 u^\varepsilon\right) = 0, & \text{in} \quad (0,T) \times \mathbb{R}^n \\ u^\varepsilon(0,x) = h(x, x/\varepsilon), & \text{su} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.3}$$

dove $F(x, y, t, \alpha, p, X)$ è una funzione scalare almeno continua definita su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n$, periodica in y e non-crescente nell'ultimo ingresso $X \in \mathcal{S}^n$. Sia le equazioni del prim'ordine di tipo Hamilton-Jacobi, che un'ampia classe di equazioni del secondo ordine paraboliche degeneri rientrano in questo modello, e i metodi si applicano anche a problemi di Dirichlet per equazioni stazionarie.

Lo scopo principale di queste note è esporre le idee e i metodi piuttosto che enunciare risultati molto generali. Quindi ci concentreremo sui due problemi modello

$$u_t^\varepsilon + H(x/\varepsilon, Du^\varepsilon) = 0,$$

e

$$u_t^\varepsilon + F(x/\varepsilon, D^2 u^\varepsilon) = 0,$$

e ci limiteremo a dati iniziali h dipendenti solo da x e non dalla variabile oscillante x/ε. Per i risultati generali rimandiamo a [AB1, AB2, AB3, ABM]. Riferimenti alla letteratura verranno dati nel testo. In questa introduzione ricordiamo solo che le idee esposte in queste note hanno origine nei lavori di P.-L. Lions, Papanicolaou e Vardhan [LPV] ed Evans [E1, E2]. Segnaliamo anche il recente libro di Xin [X] e la sua bibliografia per equazioni con H quasi periodica o aletaoria.

Le motivazioni allo studio di equazioni non in forma di divergenza e non-lineari vengono soprattutto dal calcolo delle variazioni, dal controllo ottimo e dai giochi differenziali deterministici [L, Brl, BCD], dal controllo ottimo stocastico [FS], e dal metodo degli insiemi di livello per la propagazione di fronti (si vedano ad esempio i capitoli scritti da Evans e da Souganidis in [BCE]). La teoria delle *soluzioni di viscosità*, di cui richiamiamo alcuni fatti essenziali nella prossima sezione, fornisce gli strumenti per trattare queste equazioni [L, CIL, FS, Brl, BCE, BCD].

2. Richiami di soluzioni di viscosità

Per molte equazioni differenziali della forma (1.3) non esistono soluzioni classiche globali (cioè definite per ogni $t \in (0, +\infty)$). Per rimediare a questa mancanza, nella prima metà degli anni ottanta (a partire dai lavori di M. G. Crandall, P. L. Lions, L. C. Evans) è stata introdotta la teoria delle *soluzioni di viscosità*, la cui virtù principale è quella di consentire a funzioni solamente continue di essere soluzioni di equazioni fully nonlinear del secondo ordine.

Consideriamo la seguente equazione alle derivate parziali

$$\text{(P)} \qquad u_t(t, x) + F\left(x, Du, D^2 u\right) = 0 \qquad \text{in} \quad (0, T) \times \mathbb{R}^n.$$

con $F \in C\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n\right)$.

Definizione 2.1. Diremo che F è *ellittica degenere* e che l'equazione (P) è *parabolica degenere* se, comunque si fissino x e p in $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\text{(2.1)} \qquad F(x, p, X) \leq F(x, p, Y) \qquad \text{se} \quad X - Y \geq 0$$

(dove, date due matrici X e Y, per "$X - Y \geq 0$" si intende che la matrice $X - Y$ è semidefinita positiva).

Esempio 2.1. È immediato verificare che la seguente equazione

$$\text{(HJ)} \qquad u_t(t, x) + H\left(x, Du\right) = 0$$

è parabolica degenere. Essa sarà chiamata *equazione di Hamilton-Jacobi evolutiva*, *hamiltoniana* la funzione H che in essa compare.

Definizione 2.2. Una funzione $u \in LSC\left((0,T) \times \mathbb{R}^n\right)$ ($\equiv$ *Lower Semi-Continuous*) è una *soprasoluzione di viscosità* dell'equazione (P) se $\forall \phi \in C^2((0,T) \times \mathbb{R}^n)$ e per ogni punto $(\bar{t}, \bar{x})$ di minimo locale per $u - \phi$ si ha

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + F\left(\bar{x}, Du(\bar{t}, \bar{x}), D^2 u(\bar{t}, \bar{x})\right) \geq 0. \tag{2.2}$$

In maniera analoga, una funzione $u \in USC\left((0,T) \times \mathbb{R}^n\right)$ ($\equiv$ *Upper Semi-Continuous*) è una *sottosoluzione di viscosità* dell'equazione (P) se $\forall \phi \in C^2((0,T) \times \mathbb{R}^n)$ e per ogni punto $(\bar{t}, \bar{x})$ di massimo locale per $u - \phi$ si ha

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + F\left(\bar{x}, Du(\bar{t}, \bar{x}), D^2 u(\bar{t}, \bar{x})\right) \leq 0. \tag{2.3}$$

Infine, una funzione u è *soluzione di viscosità* se è contemporaneamente una soprasoluzione ed una sottosoluzione (in particolare essa sarà continua).

Osservazione 2.1. Nella precedente definizione di sottosoluzione di viscosità si può richiedere che il punto $(\bar{t}, \bar{x})$ sia di massimo locale stretto e che $u(\bar{t}, \bar{x}) = \phi(\bar{t}, \bar{x})$; infatti alla funzione ϕ possiamo sostituire la funzione

$$\psi(x,t) := u(\bar{t}, \bar{x}) - \phi(\bar{t}, \bar{x}) + \phi(x,t) - \alpha\left(|t - \bar{t}|^2 + |x - \bar{x}|^4\right),$$

con qualsiasi costante $\alpha > 0$.

Analogamente, nella definizione di soprasoluzione di viscosità si può supporre che il punto $(\bar{t}, \bar{x})$ sia di minimo locale stretto e che $u(\bar{t}, \bar{x}) = \phi(\bar{t}, \bar{x})$.

Corerenza 1. Ogni funzione $u \in C^2((0,T) \times \mathbb{R}^n)$, soluzione classica dell'equazione (P), è anche soluzioni di viscosità.

Vediamo che u è una sottosoluzione di viscosità; per provare che è anche una soprasoluzione di viscosità si procederà in modo analogo. Sia $\phi \in C^2((0,T) \times \mathbb{R}^n)$, e sia $(\bar{t}, \bar{x})$ un punto di minimo per $u - \phi$. Allora sono verificate le seguenti relazioni

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) = u_t(\bar{t}, \bar{x}), \qquad D\phi(\bar{t}, \bar{x}) = Du(\bar{t}, \bar{x}), \qquad D^2(u - \phi) \geq 0. \tag{2.4}$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned}\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + F\left(\bar{x}, D\phi(\bar{t}, \bar{x}), D^2\phi(\bar{t}, \bar{x})\right) &= u_t(\bar{t}, \bar{x}) + F\left(\bar{x}, Du(\bar{t}, \bar{x}), D^2\phi(\bar{t}, \bar{x})\right) \leq \\ &\leq u_t(\bar{t}, \bar{x}) + F\left(\bar{x}, Du(\bar{t}, \bar{x}), D^2 u(\bar{t}, \bar{x})\right) = 0.\end{aligned}$$

Si osservi che la diseguaglianza è conseguenza della ellitticità degenere di F.

Coerenza 2. Sia u una soluzione di viscosità dell'equazione (P) e sia *due volte differenziabile in* $(\bar{t}, \bar{x})$, cioè verifichi

$$u(t,x) = u(\bar{t}, \bar{x}) + p_t(t - \bar{t}) + p_x(x - \bar{x}) + (x - \bar{x})^T X (x - \bar{x}) + o\left(|t - \bar{t}| + |x - \bar{x}|^2\right) \tag{2.5}$$

per $(t,x) \to (\bar{t}, \bar{x})$ e per qualche $(p_t, p_x, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n$. Allora u è anche una soluzione classica dell'equazione.

Il prossimo risultato fornisce una stabilità delle soluzioni di viscosità nella topologia uniforme di $C((0,T) \times \mathbb{R}^n)$ (v. [BCD, pag 35], e per una estensione [BCD, pag.289]).

Teorema 2.1: Stabilità. *Per ogni* $\varepsilon \in (0,1]$*, sia* $u^\varepsilon \in C((0,T)\times\mathbb{R}^n)$ *una soluzioni di viscosità dell'equazione*

$$u_t^\varepsilon(t,x) + F_\varepsilon\left(x, Du^\varepsilon, D^2u^\varepsilon\right) = 0 \qquad \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Si assuma che per $\varepsilon \to 0^+$

$$\begin{array}{rlll} i) & u^\varepsilon \to u & \textit{localmente uniformemente in} & (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ ii) & F_\varepsilon \to F & \textit{localmente uniformemente in} & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{S}^n; \end{array}$$

allora u *è una soluzione di viscosità della equazione (P).*

Dimostrazione. Vediamo solo che la funzione u è una sottosoluzione di viscosità; con una argomentazione analoga, si proverà che essa è anche soprasoluzione di viscosità.

Sia $\phi \in C((0,T)\times\mathbb{R}^n)$ e sia $(\bar t, \bar x)$ un punto di massimo locale stretto di $u-\phi$. Vogliamo provare:

$$\phi_t(\bar t,\bar x) + F\left(\bar x, D\phi(\bar t,\bar x), D^2\phi(\bar t,\bar x)\right) \leq 0. \tag{2.7}$$

Poiché $u^\varepsilon \to u$ uniformemente in un palla $B_r(\bar t,\bar x)$, esistono $(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$, punti di massimo locale di $u^\varepsilon - \phi$ tali che $(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \to (\bar t, \bar x)$ (lo studente lo verifichi!).

D'altra parte, le funzione u^ε sono soluzioni delle equazioni (2.6) e pertanto si ha

$$\phi_t(t_\varepsilon,x_\varepsilon) + F_\varepsilon\left(x_\varepsilon, D\phi(t_\varepsilon,x_\varepsilon), D^2\phi(t_\varepsilon,x_\varepsilon)\right) \leq 0.$$

Data la continuità della funzione ϕ e la condizione (ii), operando il limite per $\varepsilon \to 0^+$, si ottiene la validità dell'equazione (2.7) e da essa l'asserto. ■

Osservazione 2.2. Per delle soluzioni classiche, il teorema suscritto non vale in generale e per poterlo recuperare bisogna avere delle stime sul gradiente e sulla matrice hessiana delle soluzioni u^ε.

Corollario 2.1: Motivazione del nome. Data l'equazione di Hamilton-Jacobi del primo ordine

$$u_t(t,x) + H(x, Du) = 0 \qquad \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \tag{HJ}$$

si consideri la famiglia di equazioni approssimanti così definita

$$u_t^\varepsilon(t,x) + H(x, Du^\varepsilon) - \varepsilon\Delta u^\varepsilon = 0 \qquad \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n. \tag{2.8}$$

Il termine $\varepsilon\Delta u^\varepsilon$ è detto *vanishing viscosity.* Si verifica facilmente che le hamiltoniane H_ε convergono localmente uniformemente alla H. Inoltre, è noto che sotto ipotesi molto ragionevoli su H, per ogni $\varepsilon > 0$, l'equazione (2.8) ammette una soluzioni classica u^ε (cioè in $C^{1,2}$). Quindi basterà trovare una sottosuccessione u_{ε_j} localmente uniformemente convergente per avere una soluzione dell'equazione (2.8).

Il problema di Cauchy.

Si consideri il problema di Cauchy dell'equazione (HJ)

$$\begin{cases} u_t(t,x) + H(x, Du) = 0 & \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n \\ u(x,0) = h(x) & \text{su} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.9}$$

In letteratura si trovano molti lavori che stabiliscono condizioni per l'esistenza e/o l'unicità della soluzione.

Per i risultati che serviranno nel prosieguo, noi ci limiteremo ad enunciare il seguente teorema (per la cui dimostrazione, si veda [BCD, pag 50 e segg.]). Esso ci fornisce la buona posizione del problema (2.9), cioè stabilisce l'esistenza, l'unicità ed il principio del confronto:

Teorema 2.2: Buona posizione. *Supponiamo che $H(x,p)$ sia continua in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e verifichi*

$$|H(x,p) - H(z,p)| \le c|x-z|\,(1+|p|)\,, \qquad \forall x, z \in \mathbb{R}^n, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, \tag{2.10}$$

per qualche $c > 0$. Se u_1, u_2 sono rispettivamente una sottosoluzione di viscosità ed una soprasoluzione di viscosità di (2.9), allora

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} [u_1(t,x) - u_2(t,x)] \le \sup_{\mathbb{R}^n} [u_1(0,x) - u_2(0,x)]\,. \tag{2.11}$$

Inoltre il problema di Cauchy (2.9) ammette una, ed una sola, soluzione se l'hamiltoniana H soddisfa la condizione (2.10) ed il dato iniziale h è limitato ed uniformemente continuo (scriveremo $h \in BUC(\mathbb{R}^n)$).

Per quanto riguarda le equazioni del secondo ordine, le condizioni da imporre all'hamiltoniana sono più tecniche (si veda [CIL, pag. 47]). In queste note ci limiteremo ad enunciare i seguenti teoremi:

Teorema 2.3. *Consideriamo il seguente problema di Cauchy per una equazione del secondo ordine*

$$\begin{cases} u_t - a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + b(x)\cdot Du + c(x)u + f(x) = 0 & \textit{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = h(x) & \textit{su} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.12}$$

dove $(a_{ij})_{i,j}$ è una matrice semidefinita positiva della forma $a = \sigma\sigma^T$ per qualche matrice $\sigma \in \mathcal{M}_{n,n}$. Se tutti i coefficienti σ, b, c ed il termine f sono funzioni lipschitziane e limitate su $(0,T)\times\mathbb{R}^n$, allora esiste un'unica soluzione di viscosità del problema (2.12).

Teorema 2.4. *(v., per es.,* [CIL, BCE, BBD]*) Consideriamo il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + F(x, Du, D^2u) = 0 & \textit{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = h(x) & \textit{su} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.13}$$

dove $F \in Lip(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n)$, oppure

$$F(x, Du, D^2u) := \min_{\alpha} \max_{\beta} L^{\alpha,\beta} u$$

con $L^{\alpha,\beta}$ operatori lineari soddisfacenti le ipotesi del teorema precedente e con i coefficienti uniformemente lipschitziani e limitati rispetto ad α e β. Allora per $h \in BUC(\mathbb{R}^n)$ il problema (2.13) ammette una e una sola soluzione di viscosità, e le sotto- e soprasoluzioni verificano il principio di confronto (2.11).

3. Il problema di cella per equazioni del primo ordine

In questa sezione vogliamo mostrare alcuni problemi di omogeneizzazione, il più semplici possibile, che mostrino già i risultati più salienti di questa teoria.

Il primo problema di Cauchy di cui ci interesseremo è il seguente

$$(\mathrm{HJ}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} u_t^\varepsilon(t,x) + H\left(x/\varepsilon, Du^\varepsilon\right) = 0 & \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u^\varepsilon(x,0) = h(x) & \text{su} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

Vorremo mostrare che $\{u^\varepsilon\}$ converge (in qualche senso) ad una funzione u e che questa è soluzione di viscosità di una equazione limite

$$u_t(t,x) + \overline{H}\left(Du\right) = 0 \tag{3.1}$$

per una opportuna hamiltoniana $\overline{H}$ (cosiddetta *hamiltoniana effettiva*).

Per indovinare $\overline{H}$ proviamo uno sviluppo formale rispetto alle ε della soluzione u^ε, cioè supponiamo esistano u e $\chi := \chi(t,x,y)$ regolari e con derivate limitate tali che

$$u^\varepsilon(t,x) = u(t,x) + \varepsilon\chi(t,x,x/\varepsilon). \tag{3.2}$$

Sostituendo la relazione (3.2) nell'equazione $(\mathrm{HJ}_\varepsilon)$, otteniamo

$$u_t + \varepsilon\chi_t + H\left(x/\varepsilon, Du + \varepsilon D_x\chi + D_y\chi\right) = 0. \tag{3.3}$$

Per le ipotesi sulla regolarità di χ, si hanno

$$\varepsilon\chi_t \to 0 \qquad \text{e} \quad \varepsilon D_x\chi \to 0 \qquad \text{per} \quad \varepsilon \to 0;$$

la relazione (3.3) diventa così

$$u_t + H\left(x/\varepsilon, Du + D_y\chi\right) = o(1) \qquad \text{per} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.4}$$

Per giungere all'equazione (3.1) dobbiamo eliminare x/ε e χ ed ottenere

$$\overline{H}\left(Du\right) = H\left(x/\varepsilon, Du + D_y\chi\right).$$

L'idea è quella di "congelare" il punto (t,x) in $(\bar t,\bar x)$, denotare $\bar p := Du(\bar t,\bar x)$ e lasciare variare la sola y. In tal modo, ci si ridurrà a risolvere l'equazione

$$H(y, \bar p + D_y\chi) = \lambda \tag{CP_1}$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Nell'equazione (CP_1) (detta *problema di cella*) ci interessa trovare il valore della costante λ (ovviamente $\lambda = \lambda(\bar p)$) per il quale si ha una soluzione $\chi = \chi(y)$, per poi porre

$$\overline{H}(\bar p) := \lambda(\bar p).$$

In altre parole, l'hamiltoniana effettiva sarà data proprio dal valore (unico) di λ per il quale il problema di cella ammetta soluzione.

Proposizione 3.1. *Si supponga che per ogni $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ esista costante λ per la quale il problema di cella (CP_1) ammetta (almeno) una soluzione classica $\chi(y, \bar{p})$, cioè $\chi(\cdot, \bar{p}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, e si ponga $\overline{H}(\bar{p}) := \lambda(\bar{p})$. Se, inoltre,*

$$u^{\varepsilon_j} \to u \qquad \textit{localmente uniformemente}$$

per una qualche successione $\varepsilon_j \to 0$, allora la funzione u è una soluzione di viscosità di (3.1).

Dimostrazione. Vedremo solo che la u è una sottosoluzione di viscosità (che sia anche una soprasoluzione di viscosità lo si dimostra con un procedimento analogo). Si fissi $\phi \in C^1((0,T) \times \mathbb{R}^n)$; sia $(\bar{t}, \bar{x})$ un punto di massimo stretto di $u - \phi$. Vogliamo mostrare che vale la seguente diseguaglianza

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + \overline{H}(\bar{p}) \leq 0,$$

dove $\bar{p} := D\phi(\bar{t}, \bar{x})$. Aggiungiamo alla funzione test ϕ il termine $\varepsilon\chi(x/\varepsilon, \bar{p})$

$$v^{\varepsilon_j}(t,x) := u^{\varepsilon_j}(t,x) - \phi(t,x) - \varepsilon_j \chi(x/\varepsilon_j). \tag{3.5}$$

Si verifica immediatamente che

$$v^{\varepsilon_j} \to u - \phi \qquad \text{localmente uniformemente,}$$

e che (come nella dimostrazione del Teorema 2.1) esistono dei punti (t_j, x_j), di massimo locale di v^{ε_j} tali che $(t_j, x_j) \to (\bar{t}, \bar{x})$ per $j \to +\infty$. Dalla definizione di sottosoluzione di viscosità per u^{ε_j} e dalla relazione (3.5), deduciamo che

$$\phi_t(t_j, x_j) + H\left(x_j/\varepsilon_j, D_x\phi(t_j, x_j) + D_y\chi(x_j/\varepsilon_j)\right) \leq 0. \tag{3.6}$$

Per la continuità di H e di ϕ, e per la convergenza $(t_j, x_j) \to (\bar{t}, \bar{x})$, si deduce che

$$\begin{aligned} &\phi_t(t_j, x_j) + H\left(x_j/\varepsilon_j, D_x\phi(t_j, x_j) + D_y\chi(x_j/\varepsilon_j)\right) = \\ &\qquad\qquad = \phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + H\left(x_j/\varepsilon_j, \bar{p} + D_y\chi(x_j/\varepsilon_j)\right) + o(1) \end{aligned}$$

per $j \to +\infty$. Infine, sostituendo la relazione precedente in (3.6) e considerando che χ è soluzione del problema di cella (CP_1), si giunge a

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + \overline{H}(\bar{p}) + o(1) \leq 0 \qquad \text{per} \quad j \to +\infty,$$

e quindi l'asserto è completamente dimostrato. ■

Osservazione 3.1. Nella dimostrazione si usa la tecnica PTFM (*Perturbed Test-Function Method*), introdotta da Evans [E1, E2]: in essa, di fatto, l'idea dello sviluppo formale è stata applicata alla funzione-test.

Osservazione 3.2. In generale non si ha l'unicità della soluzione χ del problema di cella: infatti una soluzione incrementata di una qualsiasi costante è ancora soluzione. Comunque la non unicità della χ non è influente, serve solo la sua esistenza e, per ora, la sua regolarità.

Come indicato nella Proposizione 3.1, lo studio della hamiltoniana effettiva ci indirizza su quello del problema di cella (CP_1) (in particolare, vorremo individuare condizioni sufficienti per l'esistenza di λ e di χ, per la regolarità di χ) ed ad individuare stime (o altro) che ci assicurino l'esistenza di una sottosuccessione $u^{\varepsilon_j} \to u$ localmente uniformemente (vedremo, però, che tali stime non sono necessarie).

Come primo passo ci interesseremo dell' esistenza e dell' unicità di λ. Sarà utile introdurre i seguenti problemi *approssimanti*

$$(\mathrm{CP}_1^\delta) \qquad \delta w^\delta + H(y, \bar{p} + Dw^\delta) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n$$

per $\delta > 0$. Invece di studiare il problema di cella (CP_1), studieremo i problemi approssimanti perché per essi vale il principio del confronto, come vedremo prossimamente.

Proposizione 3.2: $\exists!$ per (CP_1^δ). *Si fissi $\delta > 0$. Sia $H = H(y,p)$ una funzione periodica rispetto alla variabile y e continua. Si assuma che almeno una delle seguenti condizioni sia verificata:*

i) per ogni $y, z \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^n$, risulti

$$|H(y,p) - H(z,p)| \le C|y - z|\,(1 + |p|)\,,$$

per una costante $C > 0$ sufficientemente grande;

ii) l'hamiltoniana H è coerciva, cioè soddisfa

$$\lim_{|p| \to +\infty} H(y,p) = +\infty,$$

uniformemente rispetto alla variabile y.

Allora esiste una, ed una sola, funzione w^δ, periodica rispetto alla y, che sia soluzione di viscosità di (CP_1^δ).

Proposizione 3.3: principio del confronto per (CP_1^δ).

Si assumano le ipotesi della proposizione precedente. Si supponga che le funzioni periodiche w_1 e w_2 siano rispettivamente una sottosoluzione ed una soprasoluzione del problema (CP_1^δ) in senso di viscosità. Allora si ha

$$w_1(y) \le w_2(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Si può trovare, ad esempio, in [BCD, BCE]. Qui la diamo solo per il caso in cui w_1 e w_2 siano rispettivamente una sottosoluzione ed una soprasoluzione di (CP_1^δ) in senso classico. Allora esse verificano rispettivamente

$$\delta w_1 + H(y, Dw_1) \le 0, \qquad \text{e} \qquad \delta w_2 + H(y, Dw_2) \ge 0.$$

Sia $\bar{y}$ un punto di massimo della funzione $w_1 - w_2$ (un tale punto esiste perché si tratta di due funzioni periodiche). In particolare, deduciamo che $Dw_1(\bar{y}) = Dw_2(\bar{y}) =: \bar{p}$. Sostituendo questa relazione nelle disequazioni precedenti, otteniamo

$$\delta w_1 + H(y, \bar{p}) \le 0 \le \delta w_2 + H(y, \bar{p}).$$

Per la positività di δ, si ottiene l'asserto. ∎

Teorema 3.1. *(*[LPV]*) Sia H una funzione continua, periodica in y e coerciva (nel senso definito nell'asserto della Proposizione 3.2). Allora per ogni $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ esite un unico valore $\lambda \in \mathbb{R}$ per il quale esista (almeno) una funzione periodica $\chi \in C(\mathbb{R}^n)$, soluzione di viscosità di (CP$_1$). Inoltre λ dipende in maniera continua da $\bar{p}$ e $\chi \in Lip(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Sia w^δ una soluzione del problema (CP$_1^\delta$). Come primo passo individueremo delle stime sulle w^δ, uniformi rispetto a δ.

Si noti che per la periodicità e continuità di H si ha

$$|H(y, \bar{p})| \leq c \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

dove c è una costante sufficientemente grande; allora c/δ è una soprasoluzione classica di (CP$_1^\delta$). In maniera analoga si mostra che $-c/\delta$ ne è sottosoluzione classica. Per il principio del confronto deduciamo: $|w^\delta| \leq c/\delta$, e quindi

$$\left|\delta w^\delta(y)\right| \leq c, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Ora vogliamo dimostrare una stima di equicontinuità delle w^δ. Per $w^\delta \in C^1(\mathbb{R}^n)$, dalle relazioni (3.7) e (CP$_1^\delta$), si ricava:

$$|H(y, \bar{p} + Dw^\delta)| \leq c;$$

per la coercività di H si ottiene la seguente stima:

$$|Dw^\delta(y)| \leq K \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall \delta > 0$$

per $K \in \mathbb{R}^+$ sufficientemente grande. Poichè le w^δ sono solo Lipschitziane le ultime due diseguaglianze valgono in senso di viscosità, e dalla seconda si può ottenere

$$\left|w^\delta(y) - w^\delta(z)\right| \leq K|y - z| \qquad \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \delta > 0$$

(per $K \in \mathbb{R}^+$ sufficientemente grande). Lasciamo al lettore la verifica di queste affermazioni, oppure si veda [BCD, p.62]. Moltiplicando per δ:

$$\left|\delta w^\delta(y) - \delta w^\delta(z)\right| \leq \delta K|y - z| \qquad \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \delta > 0. \tag{3.8}$$

Per le stime (3.7) e (3.8) e per la periodicità delle funioni $\delta w^\delta(y)$, possiamo applicare il teorema di Ascoli-Arzelà: quindi esiste una sottosuccessione $\delta_j \to 0$, tale che $\delta_j w^{\delta_j} \to W$ localmente uniformemente. Si osservi che per $\delta_j \to 0$ il secondo membro della diseguaglianza (3.8) converge a 0; ne deduciamo che W è una funzione costante e sarà il nostro candidato per la costante λ; infatti poniamo $W =: -\lambda$.

Passiamo ora ad individuare la χ. Introduciamo

$$v^\delta(y) := w^\delta(y) - w^\delta(0);$$

vogliamo mostrare che $\{v^\delta\}$ ha una sottosuccessione che converge ad una funzione χ, soluzione di viscosità del problema (CP$_1$). Dalle stime (3.7) e (3.8) ricaviamo immediatamente analoghe stime per v^δ:

$$\left|v^\delta(y)\right| \leq c, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\left|v^\delta(y) - v^\delta(z)\right| \leq K|y - z| \qquad \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \delta > 0.$$

Ragionando come in precedenza, si prova che esiste una sottosuccessione δ_j per la quale $v^{\delta_j} \to \chi$ localmente uniformemente. Inoltre, le v^δ sono equilipschitziane quindi anche la χ è lipschitziana. Vediamo ora che χ è effettivamente una soluzione del problema di cella (CP_1) con $\lambda = -W$. Dall'equazione (CP_1^δ), ricaviamo subito che vale la seguente

$$\delta v^\delta(y) + \delta w^\delta(0) + H\left(y, \bar{p} + Dv^\delta\right) = 0.$$

Per la equilimitatezza delle funzioni v^δ e per la costruzione di W otteniamo rispettivamente $\delta v^\delta \to 0$ e $\delta w^\delta(0) \to -\lambda$, (per $\delta \to 0^+$). Per la stabilità delle soluzioni di viscosità (Teorema 2.1) si ottiene

$$-\lambda + H\left(y, \bar{p} + D\chi\right) = 0$$

quindi la funzione χ è una soluzione del problema di cella.

Passiamo ora a mostrare l'unicità di λ. Supponiamo per assurdo che esistano due costanti λ e μ, con $\mu < \lambda$, per le quali il problema di cella ammetta rispettivamente la soluzione χ e la soluzione ζ.

Si osservi che, le funzioni χ e ζ sono limitate e che, se incrementate di costanti abitrarie, continuano ad essere soluzioni. Pertanto, senza perdere di generalità, possiamo supporre che $\zeta > \chi$.

D'altra parte, dalla definizione di soluzione si ha

$$H\left(y, \bar{p} + D\chi\right) = \lambda > \mu = H\left(y, \bar{p} + D\zeta\right)$$

(in senso di viscosità). Aggiungendo $\varepsilon\chi$ ed $\varepsilon\zeta$ rispettivamente al primo membro ed all'ultimo (con ε sufficientemente piccolo), si ha

$$\varepsilon\chi + H\left(y, \bar{p} + D\chi\right) > \varepsilon\zeta + H\left(y, \bar{p} + D\zeta\right).$$

Il principio del confronto per il problema approssimato ($\mathrm{CP}_1^\varepsilon$) implica: $\zeta < \chi$; che contraddice quanto supposto in precedenza.

Passiamo ora a vedere la continuità di $\lambda = \lambda(\bar{p})$. Si fissi $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$. Sia q un elemento in $\mathbb{R}^n$ da fissare in seguito. Siano χ e ζ rispettivamente soluzioni delle equazioni

$$\begin{aligned} H\left(y, \bar{p} + D\chi\right) &= \overline{H}(\bar{p}), \\ H\left(y, \bar{p} + q + D\zeta\right) &= \overline{H}(\bar{p} + q), \end{aligned}$$

la cui esistenza discende dalla prima parte della dimostrazione. Per la continuità della funzione H, si ha

$$H\left(y, \bar{p} + q + P\right) \geq H\left(y, \bar{p} + P\right) - \omega(|q|), \qquad \forall\, |P| \leq Lip(\zeta),$$

dove $\omega(\cdot)$ è il modulo di continuità di H in un opportuno compatto. Da questo si può dedurre che ζ soddisfa in senso di viscosità

$$H(y, \bar{p} + D\zeta) - \omega(|q|) \leq \overline{H}(\bar{p} + q)$$

(lo si provi per esercizio o si veda il Capitolo II di [BCD]).

Ora mostriamo che vale la seguente

$$\overline{H}(\bar{p}+q) \geq \overline{H}(\bar{p}) - \omega(|q|). \tag{3.9}$$

A tal fine supponiamo per assurdo che sia vera

$$\overline{H}(\bar{p}+q) < \overline{H}(\bar{p}) - \omega(|q|);$$

possiamo supporre anche che $\zeta > \chi$ (eventualmente aggiungendo delle costanti arbitrarie). Per quanto appena visto, si ottiene

$$H\left(y, \bar{p}+D\zeta\right) - \omega(|q|) \leq \overline{H}(\bar{p}+q) < \overline{H}(\bar{p}) - \omega(|q|) = H\left(y, \bar{p}+D\chi\right) - \omega(|q|).$$

Aggiungendo nuovamente $\varepsilon\zeta$ e $\varepsilon\chi$ rispettivamente al primo membro ed all'ultimo (con ε sufficientemente piccolo), ed applicando il principio del confronto, si ottiene $\zeta \leq \chi$, in contraddizione con quanto scritto in precedenza. Quindi la relazione (3.9) è valida. In maniera analoga si mostra anche la seguente:

$$\overline{H}(\bar{p}) \geq \overline{H}(\bar{p}+q) - \omega(|q|)$$

e quindi l'asserto è completamente dimostrato. ■

Osservazione 3.3. Nel Teorema precedente si dimostra una regolarità del correttore χ molto più debole di quella richiesta nella Proposizione 3.1.

Inoltre si può dimostrare che la lipschitzianità è la massima regolarità verificata in generale dalle funzioni χ. Ciò comporterà che si dovranno indebolire le ipotesi nella Proposizione 3.1 e sviluppare una tecnica PTFM con funzioni meno regolari.

4. Il problema di cella per equazioni del secondo ordine

Consideriamo il problema di Cauchy

$$(\mathrm{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} u_t^\varepsilon(t,x) + F\left(x/\varepsilon, D^2u^\varepsilon\right) = 0 & \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = h(x) & \text{su} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Come per il caso delle equazioni del primo ordine, vorremo mostrare che u^ε converge ad una u, soluzione di un problema limite

$$u_t(t,x) + \overline{F}\left(D^2u\right) = 0, \tag{4.1}$$

dove $\overline{F}$ è un'opportuna hamiltoniana (nuovamente chiamata *hamiltoniana effettiva*) da individuare.

Anche per le equazioni del secondo ordine, l'idea intuitiva è quella di fare degli sviluppi formali della soluzione; però si vede facilmente che, anche ad un livello formale, lo sviluppo (3.2) non funziona.

Modificando leggermente la nostra idea intuitiva, proviamo a fare sviluppi formali del tipo

$$u^\varepsilon(t,x) = u(x,t) + \varepsilon^\alpha\chi(t,x,x/\varepsilon), \tag{4.2}$$

dove $\alpha > 0$ è una costante da fissare e la funzione $\chi = \chi(t, x, y)$ è definita come in precedenza. Sostituendo la relazione (4.2) nell'equazione (P_ε), otteniamo

$$u_t(t,x) + F\left(x/\varepsilon, D^2_{xx}u(t,x) + \varepsilon^{\alpha-2}D^2_{yy}\chi(t,x,x/\varepsilon)\right) = o(1),$$

per $\varepsilon \to 0$. Per non perdere il correttore χ, scegliamo $\alpha = 2$. Per giungere alla equazione (4.1), dovremo imporre:

$$\overline{F}\left(D^2_{xx}u\right) = F\left(x/\varepsilon, D^2_{xx}u + D^2_{yy}\chi\right).$$

Questa volta, l'idea è quella di "congelare" il punto (t, x) in $(\bar{t}, \bar{x})$, denotare $\bar{X} := D^2u(\bar{t}, \bar{x})$ e lasciare variare la sola y e di risolvere la seguente equazione

$$(\mathrm{CP}_2) \qquad F(y, \bar{X} + D^2_{yy}\chi) = \lambda$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Nell'equazione (CP_2) (detta *problema di cella*) ci interessa trovare il valore della costante λ (ovviamente $\lambda = \lambda(\bar{X})$) per il quale si ha una soluzione $\chi = \chi(y, \bar{X})$, per poi porre

$$\overline{F}(\bar{X}) := \lambda(\bar{X}), \qquad \forall \bar{X} \in \mathcal{S}^n.$$

Analogamente al caso delle equazioni del primo ordine, dimostriamo la seguente proposizione.

Proposizione 4.1. *Si supponga che per ogni $\bar{X} \in \mathcal{S}^n$ esista una costante λ per la quale il problema di cella (CP_2) ammetta (almeno) una soluzione classica $\chi(y, \bar{X})$, cioè $\chi(\cdot, \bar{X}) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, e si ponga $\overline{F}(\bar{X}) := \lambda(\bar{X})$. Se inoltre si ha*

$$u^{\varepsilon_j} \to u \qquad \textit{localmente uniformemente}$$

per una qualche successione $\varepsilon_j \to 0$, allora la funzione u è una soluzione di viscosità di (4.1).

Dimostrazione. Si ragionerà in maniera del tutto simile a quella seguita per la dimostrazione della Proposizione 3.1. Faremo vedere solo che la funzione u è una sottosoluzione di viscosità; in maniera analoga si mostra che essa è anche una soprasoluzione di viscosità.

Si fissi $\phi \in C^2((0,T) \times \mathbb{R}^n)$; sia $(\bar{t}, \bar{x})$ un punto di massimo stretto di $u - \phi$. Vogliamo mostrare che vale la seguente diseguaglianza

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + \overline{F}(\bar{X}) \leq 0,$$

dove $\bar{X} := D^2\phi(\bar{t}, \bar{x})$. Introduciamo le funzioni

$$(4.3) \qquad v^{\varepsilon_j}(t,x) := u^{\varepsilon_j}(t,x) - \phi(t,x) - \varepsilon_j^2\chi(x/\varepsilon, \bar{X}).$$

Come nella dimostrazione della Proposizione 3.1, si ha

i) $v^{\varepsilon_j} \to u - \phi$ localmente uniformemente,
ii) esistono dei punti (t_j, x_j) di massimo locale di v^{ε_j},
iii) $(t_j, x_j) \to (\bar{t}, \bar{x})$ per $j \to +\infty$.

Dalla definizione di sottosoluzione di viscosità per u^{ε_j} e dalla relazione (4.3), deduciamo che

$$\phi_t(t_j, x_j) + F\left(x_j/\varepsilon_j, D^2_{xx}\phi(t_j, x_j) + D^2_{yy}\chi(x_j/\varepsilon_j)\right) \leq 0. \tag{4.4}$$

Analogamente alla dimostrazione della Proposizione 3.1 otteniamo

$$\begin{aligned}\phi_t(t_j, x_j) + F\left(x_j/\varepsilon_j, D^2_{xx}\phi(t_j, x_j) + D^2_{yy}\chi(x_j/\varepsilon_j)\right) &= \\ = \phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + F\left(x_j/\varepsilon_j, \bar{X} + D^2_{yy}\chi(x_j\varepsilon_j)\right) + o(1)\end{aligned}$$

per $j \to +\infty$. Sostituendo la relazione precedente in (4.4) e considerando che χ è soluzione del problema di cella (CP_2), si ottiene

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + \overline{F}(\bar{X}) + o(1) \leq 0 \qquad \text{per} \quad j \to +\infty,$$

e quindi l'asserto è completamente dimostrato. ■

Analogamente a quanto visto nel Teorema 3.1, proveremo che il problema di cella (CP_2) ammette soluzione. Naturalmente, seguiremo una dimostrazione lievemente differente dovuta alla mancanza della coercività dell'hamiltoniana. A tal fine consideriamo i seguenti problemi approssimanti

$$\delta w^\delta + F\left(y, X + D^2_{yy}w^\delta\right) = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}^n. \tag{CP_2^δ}$$

Definizione 4.1. L'hamiltoniana $F(y, X)$ sarà detta uniformemente ellittica se esistono due costanti positive Λ, μ tali che per ogni $Y \geq 0$ valga la relazione

$$\mu\,\mathrm{tr}Y \leq F(y, X) - F(y, X + Y) \leq \Lambda\,\mathrm{tr}Y$$

Osservazione 4.1. Se F fosse un operatore lineare, allora la relazione precedente implicherebbe che μ sia minore del più piccolo autovalore di F e, analogamente, che Λ sia maggiore del più grande autovalore.

Ipotesi 4.2. Esistono $C_1 \geq 0$ e una funzione continua $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ nondecrescente e con $\omega(0) = 0$ tale che

$$|F(z_1, X) - F(z_2, X)| \leq C_1|z_1 - z_2|\,\|X\| + \omega\left(|z_1 - z_2|\right),$$

$$|F(z, X) - F(z, Y)| \leq \omega\left(\|X - Y\|\right)$$

$\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, $\forall X, Y \in \mathcal{S}^n$, dove $\|\cdot\|$ indica una norma matriciale.

D'ora in avanti supporremo che F sia uniformemente ellittica e regolare in y (oltre ad essere periodica rispetto alla y). Per semplicità supporremo anche che essa abbia la seguente forma

$$F(y, X) = \tilde{F}(y, X) + l(y)$$

dove la funzione $\tilde{F}$ è *1-omogenea positiva* rispetto alla variabile X, cioè verifica $\lambda\tilde{F}(y, X) = \tilde{F}(y, \lambda X)$ per ogni $\lambda \geq 0$ (si veda l'osservazione b a p. 22 per il caso generale).

Nel prossimo enunciato elencheremo alcune proprietà verificate dagli operatori uniformemente ellittici e regolari; per le dimostrazioni dei principi di confronto si vedano [T, CIL, BBD], per quella del principio di massimo forte [BDL, BBD], per le stime [T, CC].

Proposizione 4.2. *Sia F è un operatore uniformemente ellittico che soddisfa l'Ipotesi 4.2.*

Principio del confronto ellittico. Si consideri il problema (CP_2^δ)

$$\delta w^\delta + F\left(y, X + D^2_{yy} w^\delta\right) = 0, \qquad \textit{in } \mathbb{R}^n;$$

se w_1 e w_2 sono rispettivamente una sottosoluzione ed una soprasoluzione (in senso di viscosità), allora si ha: $w_1 \leq w_2$ in tutto $\mathbb{R}^n$.

Principio del confronto parabolico. Siano u_1 ed u_2 rispettivamente una sottosoluzione ed una soprasoluzione dell'equazione

$$u_t(t,y) + F\left(y, X + D^2_{yy} u\right) = 0 \qquad \textit{in } (0,T) \times \mathbb{R}^n.$$

Se $u_1(0,y) \leq u_2(0,y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, allora $u_1(t,y) \leq u_2(t,y)$ per ogni $(t,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$. Se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ e se $u_1 \leq u_2$ su $(0,T) \times \partial\Omega$ e su $\{0\} \times \Omega$, allora $u_1 \leq u_2$ in $[0,T) \times \Omega$.

Principio di Massimo Forte (SMP). Se $u \in C(\overline{\Omega})$ è una sottosoluzione di

$$\tilde{F}(y, D^2_{yy} u) \leq 0 \qquad \textit{in } \Omega,$$

e se esiste un punto $y_0 \in \Omega$ in cui u raggiunge il suo massimo (in altre parole, vale: $u(y_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$), allora la funzione u è costante.

Stime di regolarità hölderiana (alla Krylov-Safonov). Se w è soluzione di viscosità di

$$-C \leq F(y, D^2 w) \leq C \qquad \textit{in} \quad \mathbb{R}^n,$$

allora esistono due costanti $\alpha \in (0,1)$ e $K > 0$, tali che

$$|w(y) - w(z)| \leq K|y-z|^\alpha \qquad \forall y, z \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre le costanti α e K dipendono da C, n, μ, Λ, C_1, $c_0 := \max_{y\in\mathbb{R}^n} |F(y,0)|$ e $\|w\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Osservazione 4.2. Nel caso parabolico o nel caso stazionario con $\delta > 0$, basta la ellitticità degenere (Definizione 2.1) per dimostrare il principio del confronto.

Osservazione 4.3. La seguente variante del principio del confronto ellittico ci servirà nella sezione 7. Siano w_1 e w_2 rispettivamente soluzioni delle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \delta w_1 - L w_1 &= c(y), \\ \delta w_2 - L w_2 &= c(y+h), \end{aligned}$$

dove $Lw := a_{ij} w_{x_i x_j}$, (a_{ij}) è una matrice semidefinita positiva e $c = c(y)$ è una funzione continua. Allora si ha

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\delta} \|c(\cdot) - c(\cdot + h)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Dimostrazione dell'Oss. 4.3.. Vediamola solo per w_1, $w_2 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ (per funzioni meno regolari, si dovrà passare alle funzioni test). La funzione $w := w_1 - w_2$ soddisfa

$$\delta w - Lw = c(y) - c(y+h).$$

Si verifica facilmente che $\|c(\cdot)-c(\cdot+h)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}/\delta$ e $-\|c(\cdot)-c(\cdot+h)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}/\delta$ sono rispettivamente una sopra- ed una sottosoluzione dell'ultima equazione. Pertanto, per il principio del confronto ellittico, si deduce

$$-\|c(\cdot)-c(\cdot+h)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \delta(w_1-w_2) \leq \|c(\cdot)-c(\cdot+h)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

e quindi l'asserto. ■

Il seguente teorema stabilisce la risolubilità del problema di cella (CP_2). Il primo risultato di questo tipo si trova in [E2] . La dimostrazione che esporremo è dovuta ad Arisawa e Lions [AL].

Teorema 4.1. *Sia F un operatore definito come in precedenza. Per ogni $X \in \mathcal{S}^n$, esiste una ed una sola costante λ tale che il problema (CP_2^δ) ammetta (almeno) una soluzione χ continua e periodica rispetto alla variabile y. Inoltre $\chi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ (ma in generale $\chi \notin C^2(\mathbb{R}^n)$).*

Infine, ponendo $\overline{F}(X) := \lambda$, si ha che $\overline{F}$ dipende in maniera continua dalla X ed è uniformemente ellittica.

Dimostrazione. Con argomentazioni simili a quelle seguite nella dimostrazione del Teorema 3.1, si prova l'unicità della costante λ (usando il Principio del Confronto enunciato nella Proposizione precedente), la continuità uniforme della funzione $\overline{F}$, e che la uniforme ellitticità di F implica quella di $\overline{F}$.

Vediamo ora che esiste una costante λ per la quale il problema di cella ammette una soluzione χ.

Si osservi innanzitutto che le funzioni δw^δ sono equilimitate: infatti si verifica facilmente che, per $C := \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |F(y,0)|$, le funzioni $\zeta_1(y) := -C/\delta$ e $\zeta_2(y) := C/\delta$ sono rispettivamente una sottosoluzione ed una soprasoluzione (entrambe in senso di viscosità) di (CP_2^δ). Per il principio del confronto, si ha: $\left|w^\delta(y)\right| \leq C/\delta$ e quindi

$$\left|\delta w^\delta(y)\right| \leq C \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{4.5}$$

Passiamo ora ad ottenere una stima di equicontinuità delle w^δ. Dall'ultima relazione deduciamo anche che:

$$-C \leq F(y, X + D^2_{yy}w^\delta) \leq C.$$

(Si osservi che, se avessimo la stima $\|w^\delta\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C$ uniforme rispetto a δ, potremmo applicare le stime di hölderianità di Krylov-Safonov e l'equicontinuità ne discenderebbe immediatamente).

Poniamo

$$v^\delta(y) := w^\delta(y) - w^\delta(0).$$

Se mostriamo che esse sono equicontinue ed equilimitate, allora la dimostrazione sarebbe conclusa. In tal caso, infatti, per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione $\delta_j \to 0$, tale che v^{δ_j} converge uniformemente ad una funzione continua χ e $\delta_j v^{\delta_j}(0)$ ad una costante $-\lambda$. Analogamente alla dimostrazione del Teorema 3.1, sommando e sottraendo $\delta w^\delta(0)$ dall'equazione (CP_2^δ), si ottiene

$$\delta v^\delta(y) - \delta w^\delta(0) + F(y, X + D^2_{yy}v^\delta) = 0$$

e per l'usuale proprietà di stabilità si conclude la dimostrazione.

Quindi passiamo a provare che le funzioni v^δ sono equilimitate. Supponiamo per assurdo che esista una successione $\delta_k \to 0$ tale che

$$\varepsilon_k^{-1} := \left\| w^{\delta_k}(\cdot) - w^{\delta_k}(0) \right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \to +\infty$$

Introduciamo

$$\psi_k(y) := \varepsilon_k v^{\delta_k}(y);$$

si verifica facilmente che le funzioni ψ_k verificano:

$$\text{(4.6)} \qquad \psi_k(0) = 0, \quad \|\psi_k\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} = 1 \qquad \text{e} \qquad -C \le F\left(y, X + D^2_{yy}\psi_k/\varepsilon_k\right) \le C.$$

Per la decomposizione di F, dall'ultima relazione si deduce

$$-C \le \frac{1}{\varepsilon_k}\tilde{F}\left(y, \varepsilon_k X + D^2_{yy}\psi_k\right) + l(y) \le C;$$

quindi, per la periodicità della l, vale anche la seguente

$$-\varepsilon_k C' \le \tilde{F}\left(y, \varepsilon_k X + D^2_{yy}\psi_k\right) \le \varepsilon_k C'.$$

Applicando le stime di hölderianità, le funzioni ψ_k sono equicontinue (in effetti sono equihölderiane). Per il teorema di Ascoli-Arzelà, otteniamo una sottosuccessione (che per comodità denoteremo ancora con ψ_k) uniformemente convergente ad una funzione ψ. Passando al limite deduciamo

$$\tilde{F}\left(y, D^2_{yy}\psi\right) = 0;$$

per il principio del massimo forte, la funzione ψ è costante. Ciò contraddice le proprietà (4.6) delle funzioni ψ_k.

Infine la equicontinuità delle funzioni v^δ segue dalla loro equilimitatezza. Infatti dalla relazione

$$-C \le F\left(y, X + D^2_{yy}w^\delta\right) \le C$$

segue immediatamente la seguente:

$$-C \le F\left(y, X + D^2_{yy}v^\delta\right) \le C.$$

Per l'equilimitatezza e per le stime di Krylov-Safonov, si ottiene l'equicontinuità e quindi l'asserto è completamente provato. ■

5. Il metodo della funzione-test perturbata

Finora abbiamo visto che, per H coerciva, esiste una hamiltoniana effettiva $\overline{H}$ ed una funzione $\chi \in Lip(\mathbb{R}^n)$ (ma in generale $\chi \notin C^1(\mathbb{R}^n)$), soluzione del problema di cella (CP_1). Il teorema seguente ci mostra in che modo si può rinunciare all'ipotesi di regolarità C^1 per la funzione χ richiesta nella Proposizione 3.1.

Teorema 5.1. *Si supponga che esiste esattamente una costante λ per la quale si abbia (almeno) una funzione $\chi \in C(\mathbb{R}^n)$ che sia soluzione del problema di cella (CP_1). Se u^ε è la soluzione di (HJ_ε) ed esiste una sottosucccessione u^{ε_j} localmente uniformemente convergente ad una funzione u, allora questa è soluzione di viscosità del problema effettivo*

$$u_t + \overline{H}(x, Du) = 0.$$

Osservazione 5.1. Si richiede solo che il problema di cella ammetta soluzione; di conseguenza, il Teorema precedente può essere applicato anche in tutti i casi ove il problema di cella è risolubile pur non essendo verificate le ipotesi richieste nel Teorema 3.1.

Per il caso parabolico abbiamo finora visto che, per F uniformemente ellittica, esiste una hamiltoniana effettiva $\overline{F}$ ed una funzione $\chi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ (ma in generale $\chi \notin C^2(\mathbb{R}^n)$), soluzione del problema di cella (CP_2). In maniera analoga al Teorema 5.1, il teorema seguente mostra che si può rinunciare alla ipotesi "$u \in C^2$", richiesta nella Proposizione 4.1.

Teorema 5.2. *Si supponga che esiste esattamente una costante λ per la quale si abbia (almeno) una funzione $\chi \in C(\mathbb{R}^n)$, soluzione del problema di cella (CP_2). Se u^ε è la soluzione di (P_ε) ed esiste una sottosucccessione u^{ε_j} localmente uniformemente convergente ad una funzione u, allora questa è soluzione di viscosità del problema effettivo*

$$u_t + \overline{F}(x, D^2u) = 0.$$

Osservazione 5.2. Si richiede solo che il problema di cella sia solvibile; di conseguenza, il Teorema precedente può essere applicato anche in tutti i casi ove il problema di cella è risolubile pur non essendo verificate le ipotesi richieste nel Teorema 4.1.

Dimostrazione (Teorema 5.2). Sia $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e sia $(\bar{t}, \bar{x})$ un punto di massimo locale stretto di $u - \phi$. Vogliamo mostrare che vale la seguente relazione:

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + \overline{F}\left(D^2\phi(\bar{t}, \bar{x})\right) \leq 0.$$

Ragioniamo per assurdo supponendo

$$\phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + \overline{F}\left(D^2\phi(\bar{t}, \bar{x})\right) > 0. \tag{5.1}$$

Sarà sufficiente mostrare che la funzione $\phi^\varepsilon(t, x) := \phi(t, x) + \varepsilon^2\chi(x/\varepsilon)$ è una soprasoluzione di viscosità di

$$\phi_t^\varepsilon(t, x) + F\left(x/\varepsilon, D^2\phi_\varepsilon(t, x)\right) \geq 0 \tag{5.2}$$

in $V_r := (\bar{t} - r, \bar{t} + r) \times B_r(\bar{x})$, per $r > 0$ sufficientemente piccolo. Infatti, se la relazione (5.2) è vera, allora il principio del confronto implica la seguente relazione:

$$\max_{V_r} |u_\varepsilon - \phi_\varepsilon| \leq \max_{\partial V_r} |u_\varepsilon - \phi_\varepsilon|.$$

Operando il limite $\varepsilon \to 0$, si ottiene

$$\max_{V_r} |u - \phi| \leq \max_{\partial V_r} |u - \phi|;$$

questa relazione contraddice il fatto che in $(\bar{t}, \bar{x})$ ci sia un massimo locale stretto di $u - \phi$.

Quindi per terminare la dimostrazione rimane da provare che vale (in senso di viscosità) la relazione (5.2). Per far ciò, fissiamo $\psi \in C^2$, supponiamo che $\phi_\varepsilon - \psi$ ammetta un minimo relativo in $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in V_r$ e mostriamo che è vera la seguente relazione:

$$\psi_t(\tilde{t}, \tilde{x}) + F\left(\tilde{x}/\varepsilon, D^2\psi(\tilde{t}, \tilde{x})\right) \geq 0. \tag{5.3}$$

Si osservi che per la regolarità della funzione ϕ rispetto alla variabile t, si ha: $\psi_t(\tilde{t}, \tilde{x}) = \phi_t(\tilde{t}, \tilde{x})$.

D'altra parte, per $\tilde{t}$ fissata, si noti che la funzione (della sola variabile x) $\phi(\tilde{t}, x) + \varepsilon^2\chi(x/\varepsilon) - \psi(\tilde{t}, x)$ ammette un punto di minimo in $\tilde{x}$. Ne consegue che anche la funzione (della variabile y) $\chi(y) - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\psi(\tilde{t}, \varepsilon y) - \phi(\tilde{t}, \varepsilon y)\right)$ assume un valore di minimo in $y = \tilde{x}/\varepsilon$. Essendo χ soluzione (in senso di viscosità) del problema di cella (ricordiamo: con $X := D^2\phi(\bar{t}, \bar{x})$), si deduce

$$F\left(\tilde{x}/\varepsilon, D^2\phi(\bar{t}, \bar{x}) - D^2\psi(\tilde{t}, \tilde{x}) - D^2\phi(\tilde{t}, \tilde{x})\right) \geq \overline{F}(D^2\phi(\bar{t}, \bar{x})).$$

È immediato verificare che $(\tilde{t}, \tilde{x}) \to (\bar{t}, \bar{x})$ per $r \to 0^+$; perciò e per la continuità della funzione F, otteniamo

$$F\left(\tilde{x}/\varepsilon, D^2\psi(\tilde{t}, \tilde{x})\right) \geq \overline{F}(D^2\phi(\bar{t}, \bar{x})) + o(1);$$

quindi

$$\psi_t(\tilde{t}, \tilde{x}) + F\left(\tilde{x}/\varepsilon, D^2\psi(\tilde{t}, \tilde{x})\right) \geq \phi_t(\bar{t}, \bar{x}) + \overline{F}\left(D^2\phi(\bar{t}, \bar{x})\right) + o(1)$$

per $r \to 0$. Grazie a (5.1) otteniamo (5.3) per $r > 0$ sufficientemente piccolo. ∎

La dimostrazione del Teorema 5.1 è simile e viene lasciata come esercizio per il lettore.

6. Convergenza per H coerciva e per F uniformemente ellittica

Finora (negli enunciati della Proposizione 3.1, della Proposizione 4.1, del Teorema 5.1 e del Teorema 5.2) abbiamo sempre supposto l'esistenza di una sottosuccessione u^{ε_j} localmente uniformemente convergente ad una funzione u. In questa Sezione ci proponiamo di mostrare come tale ipotesi possa essere sostituita da una stima di equilimitatezza delle funzioni u^{ε_j} grazie al metodo dei *semilimiti rilassati* (o *limiti deboli in senso di viscosità*) introdotto da Barles e Perthame [BaP].

Definizione 6.1. Data la famiglia di funzioni $u^\varepsilon : [0,T) \times \mathbb{R}^n \supseteq E \to \mathbb{R}$, con $0 < \varepsilon \leq 1$, il *semilimite rilassato inferiore* (o *limite debole inferiore in senso di viscosità*) nel punto $(\bar{t}, \bar{x}) \in E$ è

$$\begin{aligned}\underline{u}(\bar{t}, \bar{x}) \equiv &\liminf_{(\varepsilon,t,x)\to(0^+,\bar{t},\bar{x})} u^\varepsilon(t,x) := \\ &\sup_{\delta>0} \inf \left\{ u^\varepsilon(t,x) :\ (t,x) \in E,\ \left(|x-\bar{x}|^2 + |t-\bar{t}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \delta \quad \text{e} \quad 0 < \varepsilon < \delta \right\}.\end{aligned}$$

In maniera analoga il *semilimite rilassato superiore* (o *limite debole superiore in senso di viscosità*) nel punto $(\bar{t}, \bar{x}) \in E$ è

$$\overline{u}(\bar{t}, \bar{x}) \equiv \limsup_{(\varepsilon,t,x)\to(0^+,\bar{t},\bar{x})} u^\varepsilon(t,x) :=$$

$$\inf_{\delta>0} \sup \Big\{ u^\varepsilon(t,x) : \ (t,x) \in E, \ \big(|x-\bar{x}|^2 + |t-\bar{t}|^2\big)^{\frac{1}{2}} < \delta \quad \text{e} \quad 0 < \varepsilon < \delta \Big\}.$$

Osservazione 6.1. Se le funzioni u^ε sono equilimitate in un compatto K (cioè verificano: $\|u^\varepsilon\|_{\mathbb{L}^\infty(K)} < C_K$, per qualche costante $C_K > 0$), allora esistono finiti entrambi i semilimiti su tutto K.

Proposizione 6.1: Proprietà dei semilimiti. *Siano u^ε delle funzioni come nella Definizione 6.1. Allora si ha:*

$$i) \quad \underline{u}(\bar{t},\bar{x}) = \min \Big\{ \lim_{j\to+\infty} u^{\varepsilon_j}(t_j,x_j) : (\varepsilon_j,t_j,x_j) \to (0^+,\bar{t},\bar{x}) \ \textit{per } j \to +\infty \Big\};$$

$$ii) \quad \overline{u}(\bar{t},\bar{x}) = \max \Big\{ \lim_{j\to+\infty} u^{\varepsilon_j}(t_j,x_j) : (\varepsilon_j,t_j,x_j) \to (0^+,\bar{t},\bar{x}) \ \textit{per } j \to +\infty \Big\};$$

$$iii) \quad \underline{u} \in LSC(E), \qquad \bar{u} \in USC(E);$$

$$iv) \quad \underline{u}(t,x) \le \bar{u}(t,x) \qquad \forall (t,x) \in E;$$

v) se $\underline{u} = \bar{u}$ in un compatto K, allora $u^\varepsilon \to \underline{u} = \bar{u}$ uniformemente in K.

La dimostrazione della Proposizione è elementare; comunque si può trovarla in [BCD, pag. 296 e segg.].

Lemma 6.1. *Sia u^ε una famiglia di funzioni localmente uniformemente limitate e $\phi^\varepsilon \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ con $\phi^\varepsilon \to \phi$ localmente uniformemente. Si assuma inoltre che $\overline{u} - \phi$ raggiunga un valore di massimo locale stretto nel punto $(\bar{t},\bar{x})$. Allora esiste una sottosuccessione $\varepsilon_j \to 0$ tale che $u^{\varepsilon_j} - \phi^{\varepsilon_j}$ abbia massimo locale in (t_j,x_j) con $(t_j,x_j) \to (\bar{t},\bar{x})$.*

Analogamente, se $\underline{u} - \phi$ raggiunge un valore di minimo locale stretto nel punto $(\bar{t},\bar{x})$, allora esiste una sottosuccessione $\varepsilon_j \to 0$ tale che $u^{\varepsilon_j} - \phi^{\varepsilon_j}$ abbia minimo locale in (t_j,x_j) con $(t_j,x_j) \to (\bar{t},\bar{x})$.

Osservazione 6.2. Nella dimostrazione dei Teoremi 5.1 e 5.2 (e, precedentemente, delle Proposizioni 3.1 e 4.1) la locale uniforme convergenza delle funzioni u^ε serviva solo per ottenere quanto contenuto nella tesi del Lemma precedente per il limite uniforme $\overline{u}$.

Dimostrazione. Per alleggerire la notazione indicheremo con z un punto generico di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, con $\bar{z}$ il punto $(\bar{t},\bar{x})$ e così via.

Per ipotesi, $\overline{u} - \phi$ ha un massimo locale stretto in $\bar{z}$, quindi si ha

$$\overline{u}(\bar{z}) - \phi(\bar{z}) > \overline{u}(z) - \phi(z) \qquad \forall \bar{z} \neq z \in B_r(z)$$

per $r > 0$ sufficientemente piccolo. Per la Proposizione 6.1-(ii), esiste una successione $(\varepsilon_n, z^n) \to (0,\bar{z})$ tale che $u^{\varepsilon_n}(z^n) \to \overline{u}(\bar{z})$. Denotiamo con z_n un punto di massimo locale di $u^{\varepsilon_n} - \phi^{\varepsilon_n}$ nel compatto $\overline{B_r(\bar{z})}$; quindi si ha

$$u^{\varepsilon_n}(z_n) - \phi^{\varepsilon_n}(z_n) \ge u^{\varepsilon_n}(z) - \phi^{\varepsilon_n}(z) \qquad \forall z \in B_r(\bar{z}). \tag{6.1}$$

Si osservi che per concludere la dimostrazione basta mostrare che esiste una sottosuccessione di $\{z_n\}$ convergente a $\bar{z}$.

Sostituendo $z = z^n$ nella relazione (6.1), otteniamo in particolare che

$$u^{\varepsilon_n}(z_n) - \phi^{\varepsilon_n}(z_n) \geq u^{\varepsilon_n}(z^n) - \phi^{\varepsilon_n}(z^n). \tag{6.2}$$

Poiché i punti z_n appartengono tutti al compatto $\overline{B_r(\bar{z})}$ e le funzioni u^ε sono localmente uniformemente limitate, esiste una sottosuccessione di $\{z_n\}$ (che per comodità di notazione continueremo a denotare con z_n) tale che

$$z_n \to \tilde{z}, \qquad\qquad u^{\varepsilon_n}(z_n) \to s$$

(per un qualche $\tilde{z} \in \overline{B_r(\bar{z})}$ ed $s \in \mathbb{R}$). Per concludere dobbiamo far vedere che $\tilde{z} = \bar{z}$. A tal fine, osserviamo che per $n \to +\infty$, la relazione (6.2) diventa

$$s - \phi(\tilde{z}) \geq \overline{u}(\bar{z}) - \phi(\bar{z}). \tag{6.3}$$

D'altra parte, per la Proposizione 6.2-(ii), si ha: $s \leq \overline{u}(\tilde{z})$ e quindi $\overline{u}(\tilde{z}) - \phi(\tilde{z}) \geq s - \phi(\tilde{z})$. Dall'ultima relazione e dalla (6.3) deduciamo che

$$\overline{u}(\tilde{z}) - \phi(\tilde{z}) \geq \overline{u}(\bar{z}) - \phi(\bar{z});$$

questa relazione implica che $\bar{z}$ e $\tilde{z}$ coincidono perché $\bar{z}$ è un punto di massimo locale stretto per $\overline{u} - \phi$. ■

Corollario 6.1. *Se le funzioni u^ε, soluzioni del problema (HJ_ε), sono localmente uniformemente limitate, allora $\overline{u}$ e $\underline{u}$ sono rispettivamente una soprasoluzione ed una sottosoluzione del problema (3.1) (entrambe in senso di viscosità).*

Corollario 6.2. *Se le funzioni u^ε, soluzioni del problema (P_ε), sono localmente uniformemente limitate, allora $\overline{u}$ e $\underline{u}$ sono rispettivamente una soprasoluzione ed una sottosoluzione di (4.1) (entrambe in senso di viscosità).*

Teorema 6.1. *Sia u^ε soluzione del problema di Cauchy (HJ_ε) con dato iniziale $h \in BUC(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$. Si supponga anche che l'hamiltoniana $H = H(y,p)$ sia continua, periodica rispetto alla variabile y, coerciva (ricordiamo: $H(y,p) \to +\infty$ per $|p| \to +\infty$, uniformemente in y). Allora esiste una hamiltoniana continua $\overline{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tale che $u^\varepsilon \to u$ localmente uniformemente in $[0,T) \times \mathbb{R}^n$, dove u è soluzione di*

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \overline{H}\,(Du) = 0 & \text{in} \quad (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = h(x) & \text{in} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Teorema 6.2. *Sia u^ε soluzione del problema di Cauchy (P_ε) con dato iniziale $h \in BUC(\mathbb{R}^n) \cap C^2(\mathbb{R}^n)$. Si assuma anche che $F = F(y,X)$ sia uniformemente ellittica, soddisfi l'Ipotesi 4.2, sia periodica rispetto ad y e abbia la forma: $F(y,X) = \tilde{F}(y,X) + l(y)$, con la funzione $\tilde{F}$ 1-omogenea rispetto alla variabile X. Allora esiste una funzione $\overline{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, continua ed uniformemente ellittica, tale che $u^\varepsilon \to u$ localmente uniformemente in $[0,T) \times \mathbb{R}^n$, dove u è soluzione di*

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \overline{F}\left(D^2 u\right) = 0 & \text{in} \quad (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = h(x) & \text{in} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Dimostrazione (Teorema 6.2). Per provare l'asserto del Teorema 6.2 si tratta di collegare le varie parti della teoria sviluppata finora e di verificare come sia soddisfatto il dato iniziale.

Come primo passo costruiremo delle stime uniformi. Siano $C := \|h\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}$ e $M := \max_{y \in \mathbb{R}^n} F(y, 0)$ (si osservi che sono entrambi finiti per la periodicità rispetto alla variabile y di h e F). Si verifica immediatamente che le funzioni $w_1(t,x) := C + Mt$ e $w_2(t,x) := -C - Mt$ sono rispettivamente una sopra- ed una sottosoluzione del problema (P_ε). Ne consegue che

$$-C - tM \leq u^\varepsilon(t,x) \leq C + tM \qquad \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n.$$

Pertanto le funzioni u^ε sono equilimitate e, per l'Osservazione 6.1, i semilimiti rilassati $\overline{u}$ e $\underline{u}$ sono finiti. Per il Corollario 6.2, le funzioni $\overline{u}$ e $\underline{u}$ sono rispettivamente una sottosoluzione ed una soprasoluzione del problema effettivo.

Per terminare la dimostrazione è sufficiente dimostrare la seguente relazione:

$$\underline{u}(0,x) = \overline{u}(0,x) = h(x). \tag{6.4}$$

In tal caso, infatti, per il principio del confronto parabolico (che vale anche per il problema effettivo grazie alla Proposizione 4.2), si ha $\overline{u} \leq \underline{u}$. Questa relazione insieme alla Proposizione 6.1-(iv) dà l'uguaglianza $\overline{u} = \underline{u}$; infine si conclude applicando la Proposizione 6.1-(v).

Passiamo quindi a dimostrare la relazione (6.4). Sia $N := \max_{y \in \mathbb{R}^n} \left| F(y, D^2 h(y)) \right|$ (per la regolarità e la periodicità di h, questo massimo è ben definito); si introducano le seguenti funzioni: $W_+(t,x) := h(x) + Nt$ e $W_-(t,x) := h(x) - Nt$. Si verifica immediatamente che $W_+, W_- \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ e che sono rispettivamente una sopra- ed una sottosoluzione del problema (P_ε). Il principio del confronto parabolico (per (P_ε)) implica:

$$h(x) - Nt \leq u^\varepsilon(t,x) \leq h(x) + Nt \qquad \forall \varepsilon \in (0,1], \quad \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n.$$

Operando sulla relazione precedente il semilimite superiore e quello inferiore per $t \to 0^+$, otteniamo:

$$h(x) \leq \left\{ \begin{matrix} \underline{u}(0,x) \\ \overline{u}(0,x) \end{matrix} \right\} \leq h(x),$$

cioè la relazione (6.4). ■

La dimostrazione del Teorema 6.1 è simile e viene lasciata come esercizio per il lettore.

Estensioni.

a) È sufficiente richiedere che $h \in BUC$. In tal caso, si approssimerà il dato iniziale con dati iniziali regolari.

b) Nel Teorema 6.2, l'ipotesi "$F(y,X) = \tilde{F}(y,X) + l(y)$, con $\tilde{F}$ 1-omogenea rispetto alla X" può essere indebolita. È infatti sufficiente richiedere che esista finito il $\lim_{s \to +\infty} F(y, sX)/s$.

c) Nel Teorema 6.1, si può indebolire l'ipotesi di coercività dell'hamiltoniana scrivendo H nella forma che si ottiene in teoria del controllo o dei giochi differenziali e facendo ipotesi di controllabilità sul sistema dinamico controllato.

d) Nel Teorema 6.2 si possono considerare funzioni F molto più generali, tipo funzioni $F = F(x, x/\varepsilon, Du^\varepsilon, D^2u^\varepsilon)$. Ovviamente in questo caso l'hamiltoniana effettiva risulterà dipendere anch'essa dalla x e dal termine di primo grado: $\overline{F} = \overline{F}(x, Du, D^2u)$. Inoltre la regolarità della dipendenza della $\overline{F}$ dalla variabile x non è scontata in generale.

7. Collegamenti con la teoria ergodica

In questa Sezione rivolgeremo la nostra attenzione al seguente problema:

Problema: È possibile indebolire la coercività di H o la uniforme ellitticità di F al punto che non sia più assicurata l'esistenza di una soluzione χ del problema di cella associato?

Si osservi che λ deve esistere, altrimenti non sapremmo definire l'hamiltoniana effettiva; quindi vogliamo indagare cosa succede nel caso se non esiste una soluzione continua χ del problema di cella.

Rammentiamo (si vedano i Teoremi 3.1 e 4.1) che, sia per il caso del primo ordine che per quello del secondo, la funzione χ e la costante λ erano state introdotte rispettivamente come $\lim_{\delta\to 0^+} \big(w^\delta(y) - w^\delta(0)\big)$ e $\lim_{\delta\to 0^+} \delta w^\delta(y)$ (dove w^δ è la soluzione dell'opportuno problema di cella approssimato). Cerchiamo allora di capire meglio il senso di questi limiti.

Esempio 7.1 (Hamiltoniana affine). Consideriamo il problema (HJ_ε) (cioè: $u_t + H(x/\varepsilon, Du) = 0$) con

$$H(y,p) := -p \cdot g(y) - l(y) \tag{7.1}$$

con g ed l funzioni continue e periodiche (si tratta evidentemente di una hamiltoniana non coerciva). Il problema di cella approssimato ha la forma

$$\delta w^\delta(y) - Dw^\delta(y) \cdot g(y) = l(y) + \bar{p} \cdot g(y) =: \mathcal{L}(y).$$

Si tratta di una equazione lineare di cui è facile trovare la soluzione esplicita

$$w^\delta(y) = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}(y_t) exp\{-\delta t\}\, dt,$$

dove y_t è la *traiettoria* del seguente sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{y}_t = g(y_t) \\ y_0 = y. \end{cases} \tag{S}$$

Il nostro candidato per l'hamiltoniana effettiva è il limite

$$\lim_{\delta\to 0^+} \delta w^\delta(y),$$

se esiste e se non dipende dalla y. Tale limite può essere scritto anche come

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{L}(y_t)\, dt,$$

con le traiettorie y_t date sempre dal sistema dinamico (S), grazie al seguente risultato classico:

Teorema 7.1: Teorema Abeliano-Tauberiano. *Se $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, allora si ha*

$$\lim_{\delta\to 0^+} \delta \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\delta t}\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

nel senso che se uno dei due limiti esiste, allora esiste anche l'altro e coincide con il primo. (In effetti, l'integrazione può essere fatta rispetto ad una misura qualunque, anche discreta, v. [Si]*).*

Osservazione 7.1. Come già accennato, per l'equazione dell'Esempio 7.1 il Teorema Abeliano-Tauberiano dà:

$$-\overline{H}(\bar{p}) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{L}(y_t)\,dt.$$

Osserviamo che la funzione $w(T,y) := \int_0^T \mathcal{L}(y_t)\,dt$ soddisfa la seguente equazione (*equazione del trasporto*):

$$\text{(EP)} \qquad \begin{cases} w_t - D_y w \cdot g = l \\ w(0,y) = 0. \end{cases}$$

Quindi l'Hamiltoniana effettiva $\overline{H}$ si può anche ottenere mediante un "limite per tempi lunghi" della soluzione del problema evolutivo (EP).

Definizione 7.1. (v.: [ArAv, CFS]) Un sistema dinamico (S) è detto *ergodico* se esiste una misura μ, *invariante* per (S) (in altre parole: $\mu(A) = \mu(\Phi_t(A))$, dove Φ_t è il *flusso* del sistema (S) al tempo t), tale che per ogni $f \in \mathbb{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ sia verificata

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(y_t)\,dt = \int f(z)\,d\mu(z)$$

per quasi ogni scelta di $y_0 = y$, punto iniziale della traiettoria.

"La media temporale di f lungo le traiettorie tende alla media spaziale di f."

Teorema 7.2. *(v.* [CFS, AB2]*) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(y_t)\,dt = cost. \qquad \text{uniformemente in } y$$

se e solo se esiste un'unica misura invariante μ per il sistema dinamico (S). In tal caso la costante è $\int f(z)\,d\mu(z)$ ed il sistema si chiama "uniquely ergodic".

Esempio 7.2. Consideriamo il problema

$$\text{(7.2)} \qquad \begin{cases} u^\varepsilon_t - \xi \cdot D_x u^\varepsilon = l(x/\varepsilon) \\ u^\varepsilon(0,x) = h(x), \end{cases}$$

dove $\xi \in \mathbb{R}^n$ è una costante. Il sistema dinamico associato è

$$(\mathrm{S}_J) \qquad \begin{cases} \dot{y} = \xi \\ y_0 = y. \end{cases}$$

Per un classico risultato di Jacobi, questo sistema dinamico è ergodico sul toro $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ se e solo se vale:

$$\xi \cdot k \neq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}.$$

Questa condizione (detta *condizione di non risonanza*) stabilisce che le componenti di ξ sono razionalmente indipendenti.

Inoltre Bohl, Sierpinski e Weyl hanno dimostrato che per funzioni integrande f Riemann-integrabili la convergenza della media temporale nella Definizione 7.1 avviene per ogni $y = y_0$ e non solo *q.o.* (*Teorema di equipartizione modulo 1*, v. [ArAv]). Vedremo tra poco che la convergenza è uniforme in y per funzioni f continue e che la misura invariante è quella di Lebesgue (v. Proposizione 7.1).

Possiamo quindi sperare che le soluzioni u^ε dell'equazione (7.2) convergano localmente uniformemente ad una soluzione u del problema effettivo dove l'hamiltoniana effettiva $\overline{H}$ è data dalla seguente relazione

$$-\overline{H}(\bar{p}) := \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{L}(y_t)\, dt = \int_{[0,1]^n} \mathcal{L}(z)\, dz = \int_{[0,1]^n} l(y)\, dy + \xi \cdot \bar{p}$$

(perché: $\mathcal{L}(y) := l(y) + \xi \cdot \bar{p}$). E quindi il problema effettivo si scrive:

$$u_t - \xi \cdot D_x u = \int_{[0,1]^n} l(y)\, dy.$$

Enunciamo ora il teorema che ci permetterà di definire una hamiltoniana effettiva per una classe di equazioni del secondo ordine che comprenda anche l'equazione dell'Esempio 7.2.

Teorema 7.3. *Si consideri il seguente problema:*

$$(7.3) \qquad \delta w^\delta - a_{ij} w^\delta_{y_i y_j} - \xi \cdot D_y w^\delta = \mathcal{L}(y), \qquad in \quad \mathbb{R}^n.$$

Se per ogni $k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$ vale almeno una delle due condizioni:

$$\begin{aligned} i)& \quad \xi \cdot k \neq 0, \\ ii)& \quad a_{ij} k_i k_j \neq 0, \end{aligned}$$

allora per $\delta \to 0^+$ la successione δw^δ converge uniformemente ad una costante.

Dimostrazione. Procederemo come nel Teorema 4.1 usando il teorema di Ascoli-Arzelà. Per avere una stima di equilimitatezza basta osservare che $\|\mathcal{L}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}/\delta$ e $-\|\mathcal{L}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}/\delta$ sono rispettivamente una sopra- ed una sottosoluzione di (7.3). Ne segue immediatamente che $\|\delta w^\delta\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathcal{L}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Passiamo ora ad individuare una stima di equicontinuità, mostrando che vale la seguente relazione

$$\|\delta w^{\delta}(\cdot) - \delta w^{\delta}(\cdot + h)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \omega(|h|), \qquad \text{per} \quad h \to 0, \tag{7.4}$$

dove ω è un *modulo di continuità* (cioè è una funzione continua su $[0, +\infty)$, nondecrescente e tale che $\omega(0) = 0$).

Per comodità di notazione, introduciamo:

$$w^{\delta,h}(y) := w^{\delta}(y + h) \qquad e \qquad Lw := a_{ij} w_{y_i y_j}.$$

Si verifica immediatamente che $w^{\delta,h}$ soddisfa

$$\delta w^{\delta,h} - L w^{\delta,h} = \mathcal{L}(y + h)$$

Per il Principio del Confronto (v. Osservazione 4.3) si ha la seguente relazione

$$\|w^{\delta} - w^{\delta,h}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\delta} \|\mathcal{L}(\cdot) - \mathcal{L}(\cdot + h)\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

e quindi

$$\|w^{\delta} - w^{\delta,h}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\delta} \omega_{\mathcal{L}}(|h|), \tag{7.5}$$

dove $\omega_{\mathcal{L}}$ è il modulo di continuità di $\mathcal{L}$. Ne deduciamo immediatamente che δw^{δ} è una successione di funzioni equicontinue ed equilimitate; per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste una successione $\delta_j \to 0^+$ tale che risulti

$$\delta_j w^{\delta_j} \to \mathcal{U} \qquad \text{localmente uniformemente.}$$

In generale si ha $\mathcal{U} = \mathcal{U}(y)$; ora, invece, vogliamo mostrare che $\mathcal{U}$ è una funzione costante. A tal fine, si moltiplichi l'equazione (7.3) per δ ottenendo

$$\delta(\delta w^{\delta}) - a_{ij}(\delta w^{\delta}_{y_i y_j}) - \xi \cdot (\delta D_y w^{\delta}) = \delta \mathcal{L}(y). \tag{7.6}$$

Per l'usuale stabilità delle soluzioni di viscosità, la funzione $\mathcal{U}$ soddisfa l'equazione ottenuta passando al limite per $\delta \to 0^+$ nella relazione precedente, quindi si ha:

$$-a_{ij} \mathcal{U}_{y_i y_j} - \xi \cdot D_y \mathcal{U} = 0. \tag{7.7}$$

Essendo periodica, la funzione $\mathcal{U}$ può essere espressa come somma di una serie trigonometrica:

$$\mathcal{U}(y) = \lambda + \sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \left(\alpha_k \cos(y \cdot k) + \beta_k \sin(y \cdot k)\right).$$

Supponiamo per comodità che la funzione $\mathcal{U}$ sia sufficientemente regolare; derivando termine a termine otteniamo le derivate di $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U}_{y_i} = \sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \left(-\alpha_k k_i \sin(y \cdot k) + \beta_k k_i \cos(y \cdot k)\right),$$

$$\mathcal{U}_{y_i y_j} = \sum_{k \in 2\pi\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \left(-\alpha_k k_i k_j \cos(y \cdot k) - \beta_k k_i k_j \sin(y \cdot k)\right).$$

Sostituendo queste relazioni nella (7.7), si giunge alla seguente:

$$\sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} [(\alpha_k k_i k_j a_{ij} - \beta_k \xi\cdot k)\cos(y\cdot k) + (\beta_k k_i k_j a_{ij} + \alpha_k \xi \cdot k)\sin(y\cdot k)] = 0$$

Affinchè questa serie sia identicamente nulla, ogni coefficiente deve risultare nullo; in altre parole, per ogni $k \in 2\pi\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ devono valere le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \alpha_k k_i k_j a_{ij} - \beta_k \xi \cdot k = 0, \\ \beta_k k_i k_j a_{ij} + \alpha_k \xi \cdot k = 0. \end{cases} \tag{7.8}$$

Si fissi $k \in 2\pi\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$ e si denoti: $a := k_i k_j a_{ij}$ e $b := \xi \cdot k$; il sistema (7.8) diventa

$$\begin{cases} \alpha_k a - \beta_k b = 0 \\ \alpha_k b + \beta_k a = 0, \end{cases} \tag{7.9}$$

dove α_k e β_k sono le incognite. Il determinante di (7.9) vale a^2+b^2; pertanto esso si annulla se e solo se valgono le seguenti relazioni: $a = b = 0$, cioè $k_i k_j a_{ij} = \xi \cdot k = 0$. Quindi ne deduciamo che $\mathcal{U}$ deve essere costante.

Infine, con argomentazioni simili a quelle seguite nei Teoremi 3.1 e 4.1 per provare l'unicità della costante λ, si dimostra che ogni sottosuccessione convergente di δw^δ converge alla costante $\mathcal{U}$. ■

La discussione fatta finora motiva le seguenti definizioni:

Definizione 7.2. Diremo che una hamiltoniana del primo ordine $H(y,p)$ è *ergodica* se per ogni p la soluzione w^δ dell'equazione

$$\delta w^\delta + H(y, Dw^\delta + p) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n$$

ha la proprietà che δw^δ converge uniformemente ad una costante per $\delta \to 0^+$. In tal caso, per *hamiltoniana effettiva* intenderemo: $\overline{H}(p) := -\lim_{\delta\to 0^+} \delta w^\delta$.

Definizione 7.3. Una hamiltoniana del secondo ordine $F(y,X)$ è *ergodica* se per ogni X la soluzione w^δ di

$$\delta w^\delta + F(y, D^2 w^\delta + X) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n$$

verifica la seguente proprietà: per $\delta \to 0^+$, δw^δ converge uniformemente ad una costante. In tal caso, per *hamiltoniana effettiva* intenderemo: $\overline{F}(X) := -\lim_{\delta\to 0^+} \delta w^\delta$.

Osservazione 7.2. Per quanto visto finora, fra le hamiltoniane del primo ordine, sono ergodiche quelle coercive e quella introdotta nell'Esempio 7.2; fra quelle del secondo ordine, lo sono le uniformemente ellittiche della forma $F(x,X) = \tilde{F}(x,X) + l(x)$ (sotto le condizioni stabilite nella Sezione 4). Possiamo allora definire una hamiltoniana effettiva per tutti i casi appena elencati ed anche per equazioni della forma

$$u_t^\varepsilon - a_{ij} u^\varepsilon_{x_i x_j} = l(x/\varepsilon),$$

con a_{ij} che soddisfano l'ipotesi (*ii*) del Teorema 7.3. Infatti il problema di cella associato è

$$\delta w^\delta - a_{ij} w^\delta_{y_i y_j} = l(y) + \operatorname{tr}(aX)$$

che rientra fra quelli della forma (7.3).

Proposizione 7.1. *Nell'Esempio 7.2, si ha*

$$-\overline{H}(p) = \int\limits_{[0,1]^n} \mathcal{L}(y)\, dy = \xi \cdot p + \int\limits_{[0,1]^n} l(y)\, dy \tag{7.10}$$

Dimostrazione. Rammentiamo che l'hamiltoniana effettiva può essere espressa anche usando il problema evolutivo (EP); più precisamente si ha

$$-\overline{H}(p) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} w(T, y)$$

dove $w(T, y)$ è soluzione del problema evolutivo (EP), che riportiamo per comodità:

$$\begin{cases} w_t - D_y w \cdot \xi = \mathcal{L}(y) \\ w(0, y) = 0 \end{cases} \tag{EP}$$

Integrando (rispetto alla misura di Lebesgue) su $[0, 1]^n$ l'equazione in (EP), si ottiene:

$$\int\limits_{[0,1]^n} w_t\, dy - \int\limits_{[0,1]^n} \xi \cdot Dw\, dy = \int\limits_{[0,1]^n} \mathcal{L}(y)\, dy. \tag{7.11}$$

Per il Teorema fondamentale del calcolo e per la periodicità della funzione w, si ottengono rispettivamente le seguenti relazioni:

$$\int\limits_{[0,1]^n} w_t\, dy = \frac{d}{dt} \int\limits_{[0,1]^n} w(t, y)\, dy, \qquad \int\limits_{[0,1]^n} \xi \cdot D_x w\, dy = 0.$$

Sostituendo le relazioni precedenti in (7.11), integrando rispetto alla variabile t (si osservi che il secondo membro ne è indipendente), si ottiene

$$\int\limits_{[0,1]^n} w(T, y)\, dy - \int\limits_{[0,1]^n} w(0, y)\, dy = T \int\limits_{[0,1]^n} \mathcal{L}(y)\, dy.$$

Poiché il dato iniziale del problema (EP) è nullo, la relazione precedente diventa

$$\frac{1}{T} \int\limits_{[0,1]^n} w(T, y)\, dy = \int\limits_{[0,1]^n} \mathcal{L}(y)\, dy.$$

Infine si conclude la dimostrazione osservando che, poiché (per $T \to +\infty$) $w(T, y)/T$ converge uniformemente ad una costante per i Teoremi 7.1 e 7.3, tale costante deve essere il limite della media rispetto ad y (calcolata con la misura di Lebesgue "dy"), cioè $\int_{[0,1]^n} \mathcal{L}(y)\, dy$. ■

I prossimi due risultati, dovuti ad Arisawa e P.-L. Lions, estendono il Teorema 7.3 dal caso lineare ad hamiltoniane nonlineari che si presentano nel controllo ottimo deterministico e, rispettivamente, stocastico.

Teorema 7.4. [AL] *Sia H una hamiltoniana così definita:*

$$H(x,p) := \max_{\alpha\in A} \{\xi(\alpha)\cdot p - l(y,\alpha)\},$$

dove A è un insieme compatto, $l \in BUC(\mathbb{R}^n \times A)$ è una funzione periodica in y. Se per ogni $k \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ esiste (almeno) un valore $\alpha \in A$ tale che $\xi(\alpha)\cdot k \neq 0$, allora l'hamiltoniana è ergodica.

Teorema 7.5. [AL] *Sia F una hamiltoniana del secondo ordine così definita:*

$$F(x,X) := \max_{\alpha\in A} \{tr(a(\alpha)X) - l(y,\alpha)\},$$

dove $a(\alpha) \geq 0$. Se per ogni $k \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ esiste (almeno) un valore $\alpha \in A$ tale che $a(\alpha)_{ij}k_ik_j \neq 0$, allora l'hamiltoniana F è ergodica.

8. Omogeneizzazione sotto ipotesi di non risonanza

Il teorema principale di questa sezione afferma che l'ergodicità dell'Hamiltoniana (v. Def. 7.2 e 7.3) è sufficiente per la convergenza dell'omogeneizzazione.

Teorema 8.1. [AB2]
a) Se la funzione u^ε è soluzione del problema (HJ_ε)

$$(\mathrm{HJ}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} u^\varepsilon_t(t,x) + H\left(x/\varepsilon, Du^\varepsilon\right) = 0 & \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u^\varepsilon(0,x) = h(x) & \text{su} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

e se H è ergodica, allora l'hamiltoniana $\overline{H}$ introdotta nella definizione (7.2) è continua e $\{u^\varepsilon\}$ converge uniformemente localmente ad una funzione u, soluzione del problema limite

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \overline{H}\left(Du\right) = 0 & \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = h(x) & \text{su} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

b) Se u^ε è soluzione del problema (P_ε)

$$(\mathrm{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} u^\varepsilon_t(t,x) + F\left(x/\varepsilon, D^2u^\varepsilon\right) = 0 & \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u^\varepsilon(0,x) = h(x) & \text{su} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

e se F è ergodica, allora la hamiltoniana $\overline{F} : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ introdotta nella definizione (7.2) è continua ed ellittica degenere. Inoltre $\{u^\varepsilon\}$ converge uniformemente localmente ad una funzione u, soluzione del problema limite

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \overline{F}\left(D^2u\right) = 0, & \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = h(x) & \text{su} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Osservazione 8.1. La parte (a) (rispettivamente, (b)) del precedente Teorema era già nota per hamitoniane coercive (risp. per le hamiltoniane uniformemente ellittiche definite nella Sezione 4).

Combinando il teorema di convergenza 8.1 con i teoremi ergodici 7.4 e 7.5 otteniamo subito due risultati di omogeneizzazione sotto ipotesi di non risonanza invece che di coercività di H o di uniforme ellitticità di F.

Corollario 8.1. *Si consideri il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + \max\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \{-\xi(\alpha)\cdot Du^\varepsilon - l(x/\varepsilon,\alpha)\} & in \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u^\varepsilon(0,x) = h(x) & su \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Si supponga inoltre che per ogni $k\in\mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ esiste (almeno) un valore $\alpha\in\mathcal{A}$ tale che $\xi(\alpha)\cdot k\neq 0$. Allora esiste una hamiltoniana continua $\overline{H}$ tale che $\{u^\varepsilon\}$ converge uniformemente localmente ad una funzione u, soluzione del problema limite

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \overline{H}\,(Du) = 0 & in \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = h(x) & su \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Corollario 8.2. *Si consideri il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + \max\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \left\{-tr\left(a(\alpha)D^2u^\varepsilon\right) - l(x/\varepsilon,\alpha)\right\} & in \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u^\varepsilon(0,x) = h(x) & su \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Se per ogni $k\in\mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$ esiste (almeno) un valore $\alpha\in\mathcal{A}$ tale che $a(\alpha)_{ij}k_ik_j\neq 0$, allora esiste una hamiltoniana $\overline{F}$ continua ed ellittica degenere tale che $\{u^\varepsilon\}$ converge uniformemente localmente ad una funzione u, soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) + \overline{F}\left(D^2u\right) = 0 & in \quad (0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = h(x) & su \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Inoltre, se $\mathcal{A}$ è un singleton (cioè è un insieme con un solo elemento), allora l'hamiltoniana effettiva può essere scritta come:

$$\overline{F}\left(D^2u\right) = -tr\left(aD^2u\right) - \int\limits_{[0,1]^n} l(y)\,dy.$$

Osservazione 8.2. La condizione di *non-risonanza* ($\forall k\in\mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$, $\exists\alpha\in\mathcal{A}$ tale che $a(\alpha)_{ij}k_ik_j\neq 0$) può anche valere in casi molto degeneri. Infatti, per esempio, se la matrice $(a_{ij})_{ij}$ è il prodotto di un vettore-riga per il proprio trasposto, cioè: $a_{ij}(\alpha) = \xi_i(\alpha)\xi_j(\alpha)$ (e quindi la matrice $(a_{ij})_{ij}$ ha rango 1), allora la condizione di non-risonanza equivale alla seguente: $\forall k\in\mathbb{Z}^n\backslash\{0\}$, $\exists\alpha\in\mathcal{A}$ tale che $\xi(\alpha)\cdot k\neq 0$.

È interessante notare che l'effetto della omogeneizzazione in questo caso è lo stesso che nell'equazione del calore (cioè $F(x/\varepsilon,X) := -\mathrm{tr}(X) - l(x/\varepsilon)$), dove è noto che il problema effettivo è:

$$u_t - \Delta u = \int\limits_{[0,1]^n} l(y)\,dy.$$

9. Perturbazioni singolari

Le tecniche esposte finora per i problemi di omogeneizzazione si applicano con successo anche a diversi problemi della forma

$$v_t^\varepsilon + H(x, y, D_x v^\varepsilon, D_y v^\varepsilon/\varepsilon) = 0, \qquad \forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{8.1}$$

con n, $m \in \mathbb{N}$. Questi problemi sono detti di *perturbazione singolare*, o di *penalizzazione* (dove il termine penalizzato è $D_y v^\varepsilon$), e si presentano in problemi di riduzione di scala per sistemi controllati di grande dimensione mediante la separazione di variabili che evolvono su scale di tempo diverse.

Si osservi che, almeno formalmente, il problema di omogeneizzazione (HJ_ε) trattato in precedenza rientra come caso perticolare nel problema (8.1). Infatti, se u^ε è soluzione di

$$u_t^\varepsilon(t, x) + H\left(x/\varepsilon, D_x u^\varepsilon(t, x)\right) = 0, \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,$$

allora possiamo formulare il seguente ansatz:

$$u^\varepsilon(t, x) = v^\varepsilon(t, x, x/\varepsilon)$$

dove $v^\varepsilon = v^\varepsilon(t, x, y)$. Ponendo formalmente "$y = x/\varepsilon$", si ottengono le seguenti relazioni:

$$u_t^\varepsilon(t, x) = v_t^\varepsilon(t, x, y), \qquad D_x u^\varepsilon(t, x) = D_x v^\varepsilon(t, x, y) + \frac{1}{\varepsilon} D_y v^\varepsilon(t, x, y),$$

e quindi v^ε soddisfa l'equazione

$$v_t^\varepsilon + H(x, y, D_x v^\varepsilon + D_y v^\varepsilon/\varepsilon) = 0 \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

che è un caso particolare di equazione della forma (8.1).

Nelle equazioni tipo (8.1) rientrano anche i cosiddetti *problemi di averaging*:

$$u_t^\varepsilon(t, x) + H\left(t/\varepsilon, D_x u^\varepsilon(t, x)\right) = 0, \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n. \tag{8.2}$$

Con un procedimento formale analogo a quello appena visto, ponendo $u^\varepsilon(t, x) = v^\varepsilon(t, x, t/\varepsilon)$ (con $v^\varepsilon = v^\varepsilon(t, x, y)$) e $t/\varepsilon = y$, si ha che la funzione v^ε soddisfa la seguente equazione

$$v_t^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} v_y^\varepsilon + H(y, D_x v^\varepsilon) = 0, , \qquad \forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$$

(dove la variabile penalizzata è uno-dimensionale).

Per le equazioni del secondo ordine provenienti dal controllo stocastico i problemi di perturbazione singolare sono della forma

$$v_t^\varepsilon + F(x, y, D_x v^\varepsilon, \frac{D_y v^\varepsilon}{\varepsilon}, D_{xx} v^\varepsilon, \frac{D_{yy} u^\varepsilon}{\varepsilon^2}, \frac{D_{xy} u^\varepsilon}{\varepsilon}) = 0, \qquad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

e l'argomento appena visto mostra che anche questi problemi comprendono come casi particolari l'omogeizzazione (P_ε) e l'averaging, stavolta per equazioni del secondo ordine.

Il recente articolo [AB2] contiene un teorema di convergenza molto generale che afferma, in sostanza, che l'ergodicità dell'Hamiltoniana rispetto alle variabili veloci y, in un senso opportuno, implica la convergenza della soluzione $v^\varepsilon(t, x, y)$ del problema di perturbazione singolare a una $v(t, x)$ indipendente da y e che soddisfa l'equazione associata ad una Hamiltoniana effettiva. Il Teorema 8.1 ne è un caso particolare. Tutti i risultati di omogeneizzazione presentati in queste note e in [AB1, AB2, AB3, ABM] si possono ottenere applicando questo teorema.

REFERENCES

[AB1] O. Alvarez and M. Bardi, *Viscosity solutions methods for singular perturbations in deterministic and stochastic control*, SIAM J. Control Optim. **40** (2001), 1159–1188.

[AB2] O. Alvarez and M. Bardi, *Singular perturbations of nonlinear degenerate parabolic PDEs: a general convergence result*, Arch. Rat. Mech. Anal. **170** (2003), 17–61.

[AB3] O. Alvarez and M. Bardi, *Ergodicity, stabilization, and singular perturbations for Bellman –Isaacs equations*, Mem. Amer. Math. Soc. **204(960)** (2010).

[ABM] O. Alvarez, M. Bardi, and C. Marchi, *Multiscale problems and homogenization for second-order Hamilton-Jacobi equations.*, J. Differential Equations **243** (2007), 349–387.

[AL] M. Arisawa and P.-L. Lions, *On ergodic stochastic control*, Comm. Partial Differential Equations **23** (1998), 2187–2217.

[ArAv] V.I. Arnold and A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967 (Francese); English transl.: W. A. Benjamin, New York, 1968.

[BBD] M. Bardi, S Bottacin and F. Da Lio, *Soluzioni di viscosità di equazioni nonlineari ellittiche degeneri*, Note del corso di Dottorato 1998.

[BCD] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal Control and Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, Birkhäuser, Boston, 1997.

[BDL] M. Bardi and F. Da Lio, *On the strong maximum principle for fully nonlinear degenerate elliptic equations*, Arch. Math. **73** (1999), 276 – 285.

[BCE] M. Bardi, M. Crandall, L. C. Evans, H. M. Soner, P. E. Souganidis, *Viscosity solutions and applications*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1660, Berlin, 1997.

[Brl] G. Barles, *Solutions de viscosité des equations de Hamilton-Jacobi*, Mathématiques et Applications, vol. 17, Springer-Verlag, Paris, 1994.

[BaP] G. Barles and B. Perthame, *Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problem*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **21** (1987), 557–579.

[Ben] A. Bensoussan, *Perturbation methods in optimal control*, Wiley - Gauthiers-Villars, Chichester, 1988.

[BBM] A. Bensoussan, L. Boccardo, and F. Murat, *Homogenization of elliptic equations with principal part not in divergence form and Hamiltonian with quadratic growth*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 769–805.

[BLP] A. Bensoussan, J.-L. Lions and G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[BrD] A. Braides, A. Defranceschi, *Homogenization of multiple integrals*, Oxford University Press, Oxford, 1998.

[CC] L. A. Caffarelli and X. Cabré, *Fully nonlinear elliptic equations*, AMS Colloquium Pubblication, vol. 43, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1995.

[CFS] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, and Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[CIL] M. G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **27** (1992), no. 1, 1–67.

[E1] L. C. Evans, *The perturbed test function method for viscosity solutions of nonlinear P.D.E.*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **111** (1989), 359–375.

[E2] L. C. Evans, *Periodic homogenization of certain fully nonlinear partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **120** (1992), 245–265.

[FS] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[JKO] V. V. Jikov, S. M. Kozlov and O. A. Oleinik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[L] P.-L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Pitman, Boston, 1982.

[LPV] P.-L. Lions, G. Papanicolaou, and S. R. S. Varadhan, *Homogenization of Hamilton-Jacobi equations*, Unpublished (1986).

[Si] B. Simon, *Functional integration and quantum physics*, Academic Press, New York, 1979.

[T] N. S. Trudinger,, *Comparison principles and pointwise estimates for viscosity solutions of nonlinear elliptic equations*, Rev. Mat. Iberoamericana **4** (1988), 453–468.

[X] J. Xin., *An introduction to fronts in random media,*, Springer, New York, 2009.