Rotazione attorno ad un asse fisso: direzione del momento angolare

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \omega I_z$$

La componente del momento angolare lungo z è pari alla velocità angolare per il momento di inerzia rispetto all'asse Z

The student at this moment may wonder whether, for each body, there is some axis of rotation for which the total angular momentum is parallel to the axis. The answer is yes.

Ad esempio per corpi simmetrici rispetto all'asse di rotazione questo è vero. I contributi fuori dall'asse dati al momento angolare, da elementi di massa simmetrici rispetto ad esso, si annullano

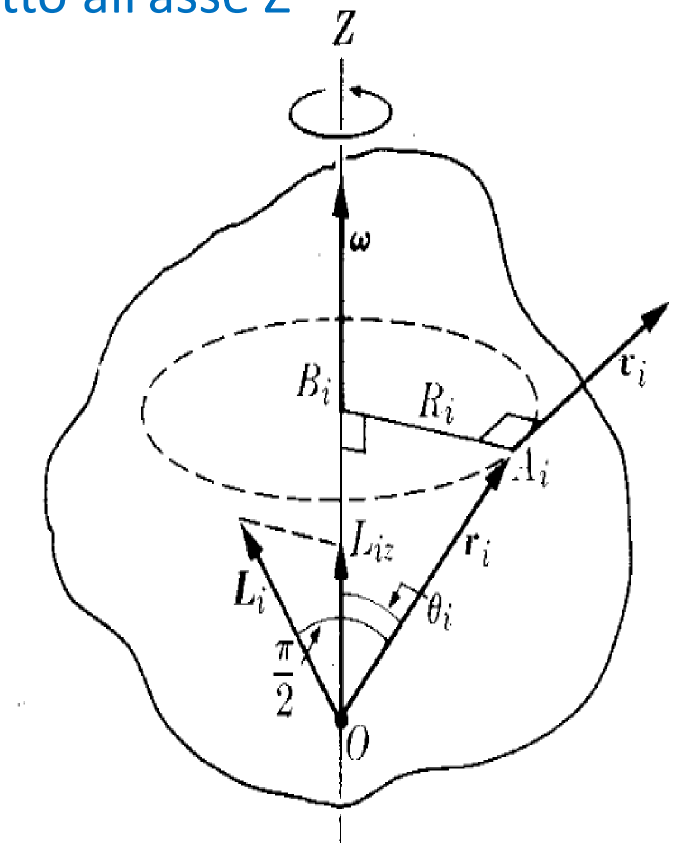
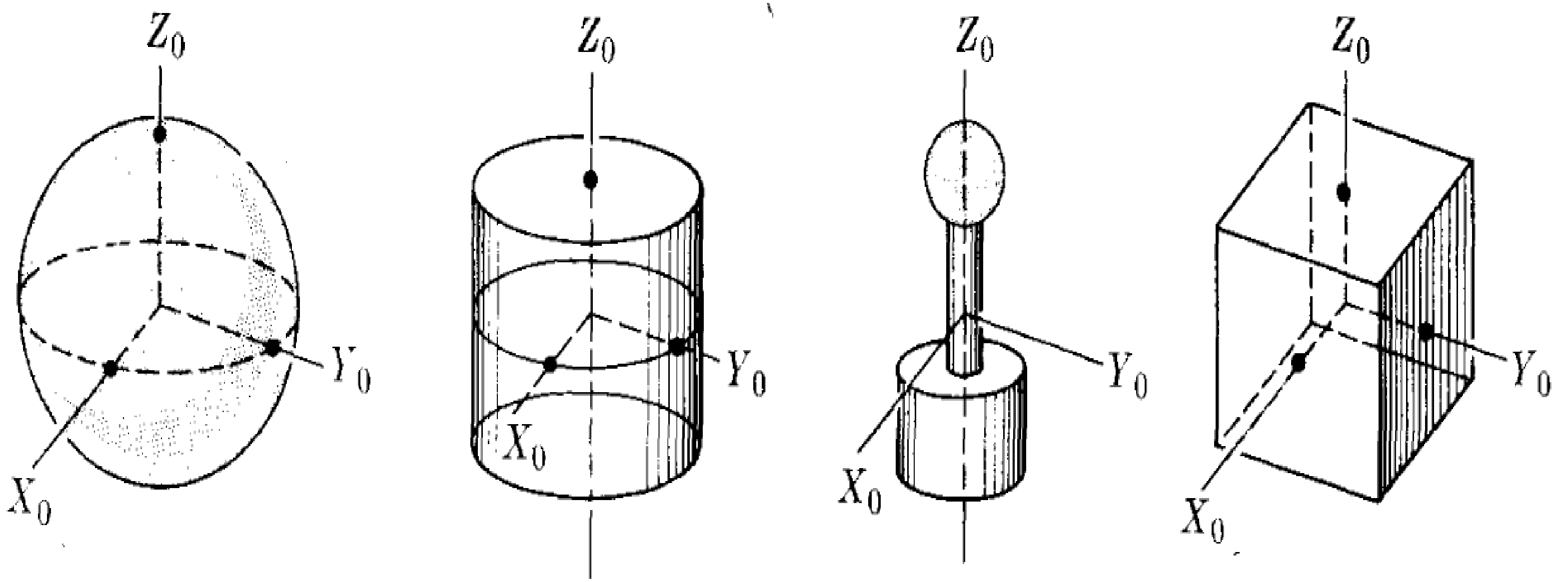


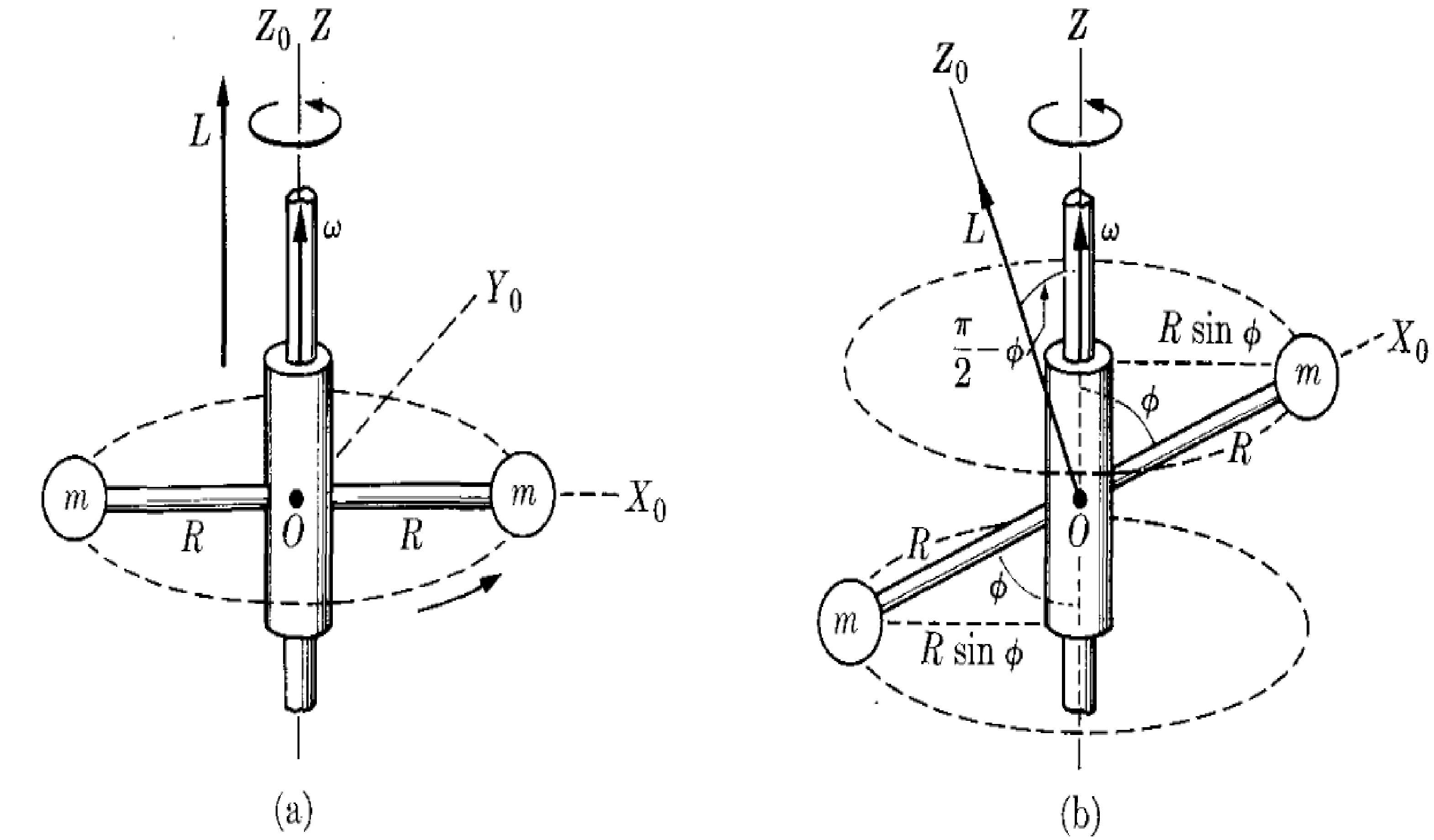
Fig. 10–4. Angular momentum of a rotating rigid body.



Rotazione attorno ad un asse fisso: direzione del momento angolare

In generale non è vero che $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ siano paralleli

EXAMPLE 10.1. Compute the angular momentum of the system illustrated in Fig. 10–7, which consists of two equal spheres of mass m mounted on arms connected to a bearing and rotating around the Z-axis. Neglect the masses of the arms.



Se faccio l'ipotesi che all'istante t le masse siano lungo l'asse X

$$a)\ \vec{L} = 2mR\ \hat{k}$$

$$b)\ \vec{L} = 2mR\sin\phi\ \hat{k} - 2mR\cos\phi\ \hat{\imath}$$

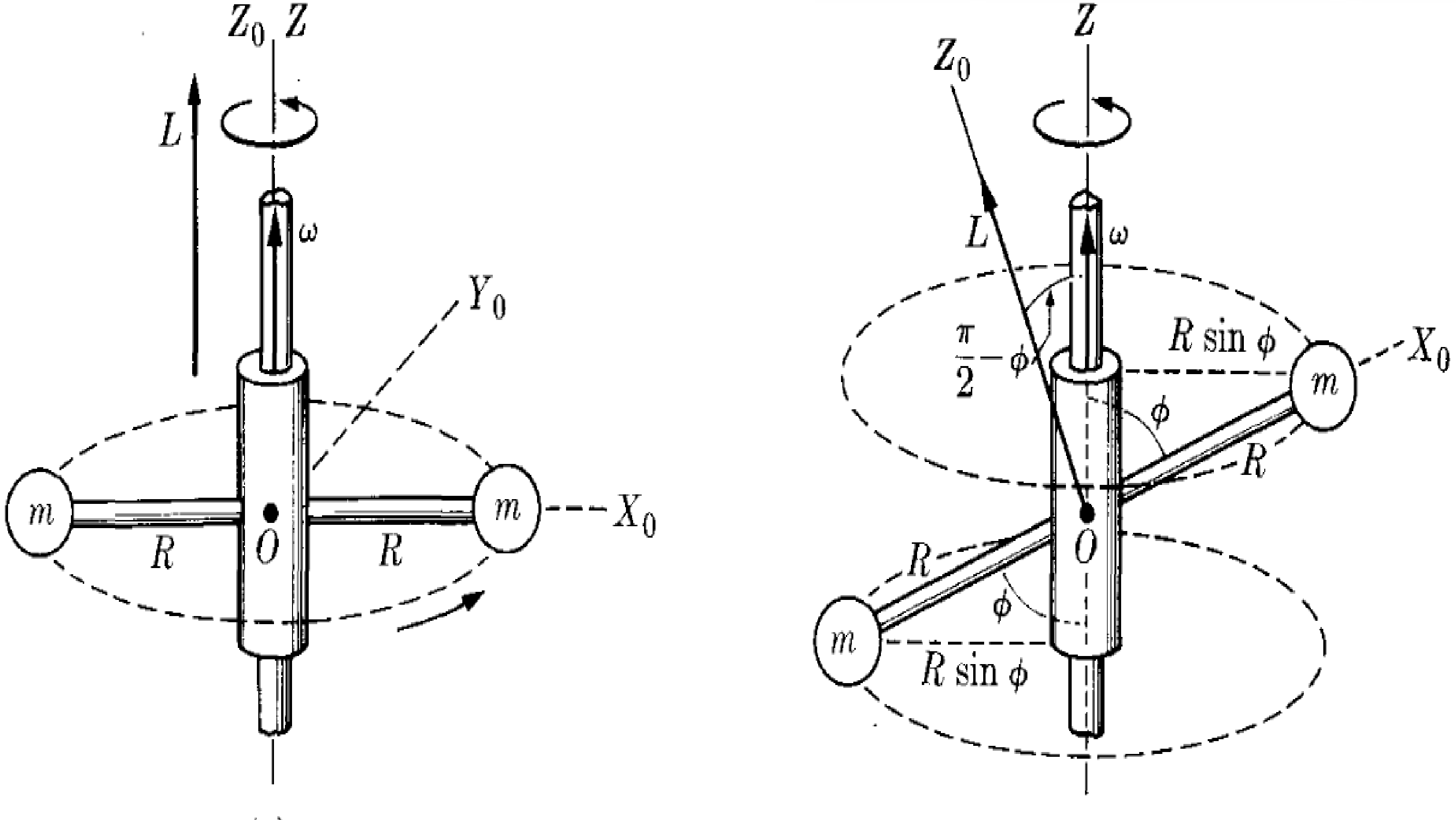
Nel caso b) la componente di $\vec{L}$ perpendicolare all'asse Z ruota nel tempo con la stessa velocità angolare delle due masse. Si usa il termine *precessione* di $\vec{L}$ attorno all'asse Z

Rotazione attorno ad un asse fisso: direzione del momento delle forze

EXAMPLE 10.7. Compute the torque required to rotate the system of Fig. 10–7(b) with constant angular velocity.

Corollario 1. Se un sistema di forze ha risultante nulla, il suo momento risultante è indipendente dal polo (cioè $M_{\Omega'} = M_{\Omega}$).

Scelgo come polo il punto O



(a) (b)

a) Le forze centripete che agiscono sulle due masse sono una opposta all'altra e collineari. Il momento delle forze è nullo

b) Le due forze centripete di modulo m ω^2R sin(ϕ) che agiscono sulle due masse formano una coppia di braccio 2 R cos(ϕ) a generare un momento delle forze pari a 2mR$^2\omega^2$ sin(ϕ) cos(ϕ). Tale momento giace nel piano XY, è perpendicolare ad $\vec{L}$ ed è uscente dal foglio. Nel tempo ruota.

Il vincolo esercita una forza sulle masse e le masse ne esercitano una uguale e contraria sul vincolo sollecitandolo. Nel caso a) le forze sul vincolo si annullano (idealmente).

Rotazione attorno ad un asse fisso: assi principali di rotazione

It can be proved that for each body, no matter what its shape, there are (at least) three mutually perpendicular directions for which the angular momentum is parallel to the axis of rotation. These are called the *principal axes of inertia*, and the corresponding moments of inertia are called the *principal moments of inertia*, designated by I_1, I_2, and I_3. Let us designate the principal axes by $X_0Y_0Z_0$; they constitute a frame of reference attached to the body, and therefore in general rotate relative to the observer. When the body has some kind of symmetry, the principal axes coincide with some of the symmetry axes. For example, in a sphere, any axis passing through its center is a principal axis.

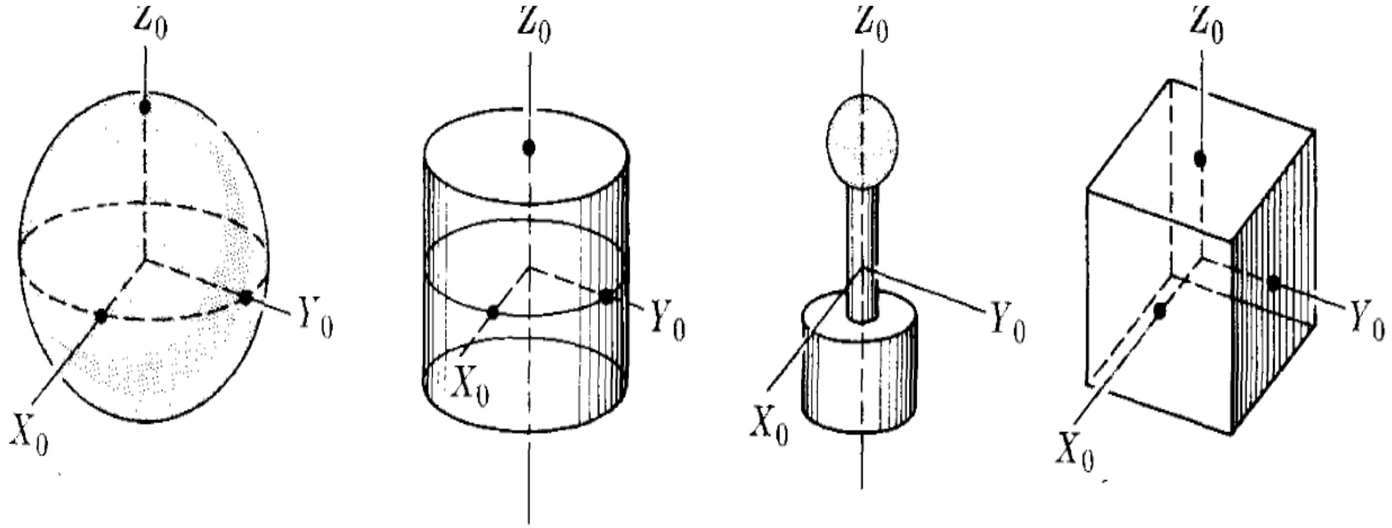


Fig. 10–5. Principal axis of symmetrical bodies.

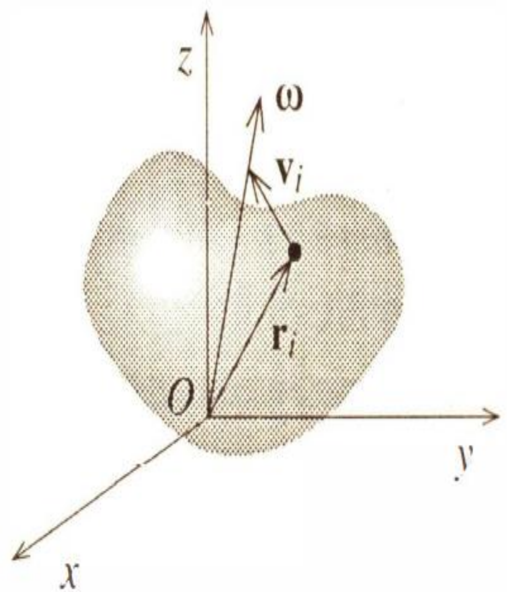
La relazione tra $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ per un corpo rigido in rotazione

Abbiamo visto che anche nel caso più semplice di rotazione di un corpo rigido, quella attorno ad un asse fisso, $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ non sono necessariamente paralleli tra di loro.

Ci chiediamo quale sia la relazione tra $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ per un corpo rigido. Non è una domanda che concerne la dinamica del corpo ma solo la sua cinematica.

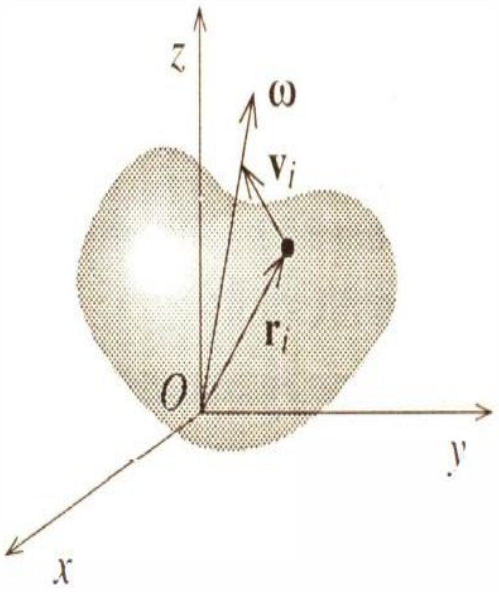
Per rispondere a questa domanda cominciamo a studiare il moto di un corpo attorno ad un punto fisso. Ad esempio il moto della trottola.

Il moto rigido generico con un punto fisso è ancora ad ogni istante di tempo una rotazione, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, ma questa varia nel tempo non solo in valore assoluto, ma anche in direzione. In altre parole istantaneamente il corpo ruota attorno ad un asse geometrico (non fisico) che passa per O e ha la direzione di $\boldsymbol{\omega}$, ma questa direzione cambia continuamente. Calcoliamo il momento angolare rispetto al polo fisso O.



La relazione tra $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ per un corpo rigido in rotazione

Scelgo come polo il punto fisso O. Per un punto materiale di massa m_i vale



$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \qquad \mathbf{l}_{Oi} = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} - m_i \mathbf{r}_i (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)$$

Conviene vederne esplicitamente una componente, ad esempio quella lungo l'asse x. Si trova subito, semplificando

$$\ell_{Oi,x} = m_i (y_i^2 + z_i^2)\omega_x - m_i x_i y_i \omega_y - m_i x_i z_i \omega_z$$

Per ottenere la componente x del momento angolare totale rispetto ad O, sommiamo su i:

$$L_{O,x} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} m_i (y_i^2 + z_i^2)\right]\omega_x - \left[\sum_{i=1}^{\infty} m_i x_i y_i\right]\omega_y - \left[\sum_{i=1}^{\infty} m_i x_i z_i\right]\omega_z$$
$$= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

dove abbiamo introdotto le grandezze

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{\infty} m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^{\infty} m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = \sum_{i=1}^{\infty} m_i x_i z_i$$

$$\begin{pmatrix} L_{Ox} \\ L_{Oy} \\ L_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ sono connessi tra di loro tramite una matrice quadrata 3x3 simmetrica, detta tensore d'inerzia.

La relazione tra $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ per un corpo rigido in rotazione

Noi abbiamo scelto il sistema di riferimento con origine nel polo O, ma con assi coordinati di direzione arbitraria. Ora, con una scelta opportuna degli assi, è possibile semplificare di molto l'espressione trovata. Si dimostra infatti (corso di Geometria) che qualsiasi matrice quadrata che sia anche simmetrica è, come si dice, diagonalizzabile. Ciò significa che scegliendo opportunamente gli assi coordinati (che saranno ruotati rispetto a quelli che abbiamo sinora considerato) la matrice diventa diagonale, tutti i suoi termini non diagonali sono cioè nulli. Chiamiamo ancora x, y, z i nuovi assi.

$$\begin{pmatrix} L_{Ox} \\ L_{Oy} \\ L_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$I_x = I_{xx} \text{ ecc.}$$

$$\mathbf{L}_O = I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}$$

Il momento angolare è quindi la somma di tre vettori, diretti come gli assi, di modulo ciascuno pari al prodotto della componente della velocità angolare rispetto a quell'asse e del momento d'inerzia (rispetto allo stesso asse). Questo è vero solo per la particolare scelta degli assi che diagonalizza la matrice d'inerzia. Gli assi che godono di questa proprietà si chiamano *assi principali d'inerzia* relativi ad O. Essi hanno, si badi bene, una posizione fissa rispetto al corpo, si muovono quindi con esso. Il riferimento $Oxyz$ quindi *non è in generale inerziale*. È questo il prezzo da pagare per avere l'espressione semplice (8.12.7). Se il polo O è il centro di massa, gli assi principali d'inerzia si chiamano *assi centrali d'inerzia*.

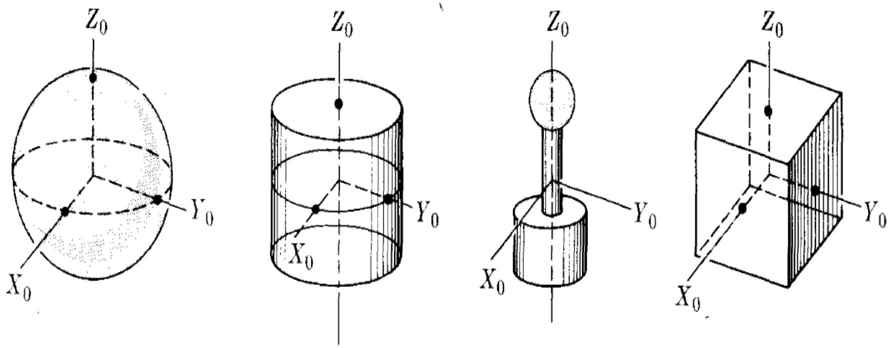


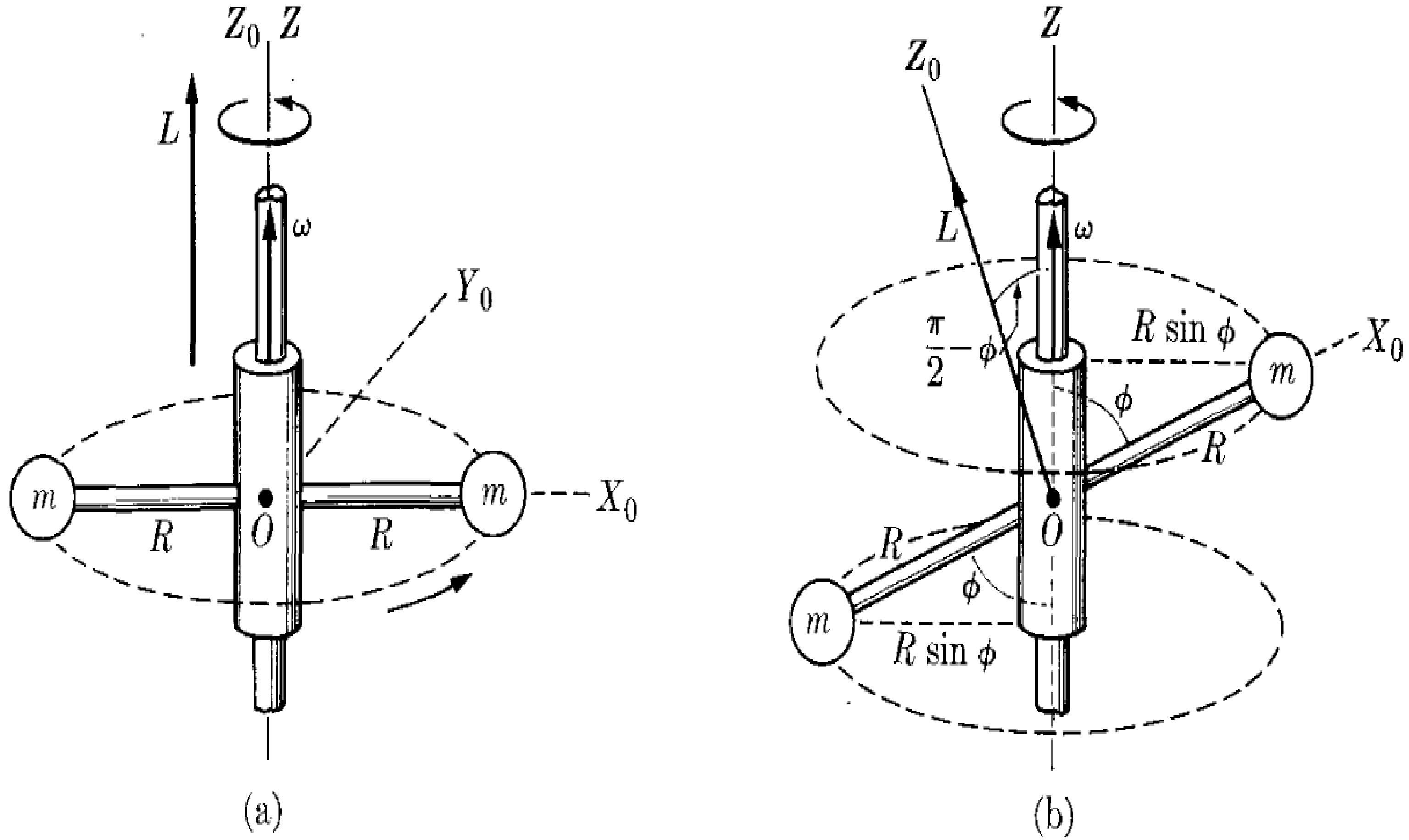
Fig. 10–5. Principal axis of symmetrical bodies.

La relazione tra $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ per un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso

$$\begin{pmatrix} L_{Ox} \\ L_{Oy} \\ L_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{xz}\omega_z \\ -I_{yz}\omega_z \\ I_{zz}\omega_z \end{pmatrix}$$

Scelgo come polo il punto O

Se faccio l'ipotesi che all'istante t le masse siano lungo l'asse X



$a)$ $\quad I_{xz} = 0; I_{yz} = 0; I_{zz} = 2mR^2$

b) $\quad I_{xz} = 2mR^2 \sin\phi\cos\phi$

$$I_{yz} = 0$$

$$I_{zz} = 2m(R\sin\phi)^2$$