Urti tra sistemi materiali: bersaglio libero $\vec{P}$ e $\vec{L}$ si conservano (forze sterne trascurabili)

Osserviamo subito che si possono verificare due situazioni distinte: il bersaglio può essere libero oppure soggetto a vincoli. Nel primo caso, come per gli urti tra particelle, possiamo trascurare le forze esterne rispetto alle intense forze interne impulsive che agiscono durante l'urto. Di conseguenza la quantità di moto totale e il momento angolare totale si conservano. Nell'urto tra particelle la conservazione del momento angolare non ha alcun ruolo, essa non dà infatti alcuna informazione in più di quelle date dalla conservazione della quantità di moto. La conservazione del momento angolare ha conseguenze osservabili solo nell'urto tra sistemi. Osserviamo anzi che la conservazione del momento angolare di un sistema isolato è conseguenza di un particolare aspetto del principio di azione e reazione: del fatto che l'azione e la reazione hanno la stessa retta di applicazione. Quest'aspetto non è verificato sperimentalmente dagli esperimenti d'urto tra pendoli descritti nel capitolo 6, o simili. Lo si verifica invece proprio osservando che il momento angolare si conserva in collisioni tra sistemi materiali.

Urti tra sistemi materiali: bersaglio vincolato $\vec{P}$ e $\vec{L}$ non si conservano (forze esterne presenti)

Se sono presenti vincoli, questi, durante l'urto agiscono vincolando appunto il moto. Ciò significa che essi esercitano forze durante il breve intervallo dell'urto. Come esempio di urto con un bersaglio soggetto ad un vincolo pensiamo ad una palla che colpisca un'asta imperniata ad un asse. Le forze esercitate dal vincolo devono essere tali da equilibrare qualche componente delle forze interne impulsive che si sviluppano durante l'urto. Esse sono quindi intense, altrettanto intense di quelle interne e *non* si possono trascurare. L'urto con un corpo vincolato quindi non è un processo in un sistema isolato. Quantità di moto e momento angolare in generale non si conservano.

Non tratteremo qui la materia in generale, esamineremo invece due esempi.

Urti tra sistemi materiali: bersaglio libero $\vec{P}$ e $\vec{L}$ si conservano (forze sterne trascurabili)

ESEMPIO 8.18.1. Un disco omogeneo di massa M e raggio R è appoggiato su di un piano orizzontale. Il disco inizialmente è fermo. Un proiettile di massa m con velocità iniziale $\mathbf{v}_{i1}$ colpisce il disco in un punto del bordo, tangenzialmente, rimanendovi conficcato. Determinare il moto del sistema dopo l'urto.

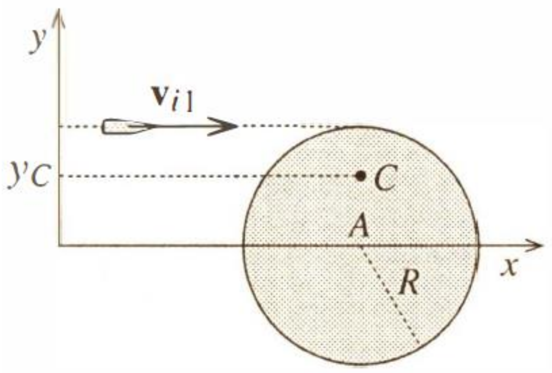


FIGURA 8.18.1

Il vincolo, il piano d'appoggio, non agisce durante l'urto, dato che il moto avviene sul piano; il sistema si può considerare quindi isolato e si conservano quantità di moto e momento angolare. L'energia cinetica invece diminuisce perché ovviamente l'urto è anelastico.

Scegliamo il baricentro come polo per i momenti angolari. La sua coordinata y si mantiene costante durante il moto ed è

$$y_C = \frac{Rm + 0M}{m + M} = R\,\frac{m}{m + M}$$

Le quantità di moto hanno solo componenti x e y diverse da zero. Il momento angolare, che riferiremo al baricentro C del sistema, ha solo componente z. La conservazione della quantità di moto, tenendo conto che dopo l'urto i due corpi si muovono assieme con la velocità $\mathbf{v}_C$ del loro baricentro, dà le equazioni

$$m v_{i1} = (m + M) v_{Cx}, \qquad 0 = (m + M) v_{Cy}$$

$$v_C = v_{Cx} = \frac{m v_{i1}}{m + M}$$

Il momento angolare totale iniziale è quello del proiettile, perché il disco è fermo. La sua direzione è opposta a quella dell'asse z ed il suo modulo vale

$$L_{iC} = (R - y_C) m v_{i1} = \frac{mM}{m + M} R v_{i1}$$

Urti tra sistemi materiali: bersaglio libero $\vec{P}$ e $\vec{L}$ si conservano (forze sterne trascurabili)

Nello stato finale il sistema, disco più proiettile, ruota con velocità angolare, da determinare, ω. Il suo momento angolare rispetto al baricentro è $L_{fC} = I_C\omega$. La conservazione del momento angolare dà quindi

$$I_C\omega = \frac{mM}{m+M} R v_{i1}$$

che fornisce ω. Bisogna ancora calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse normale al disco per il baricentro C. Questo è la somma del momento d'inerzia del proiettile I_p

$$I_p = m(R - y_C)^2 = mR^2\left(\frac{M}{m+M}\right)^2$$

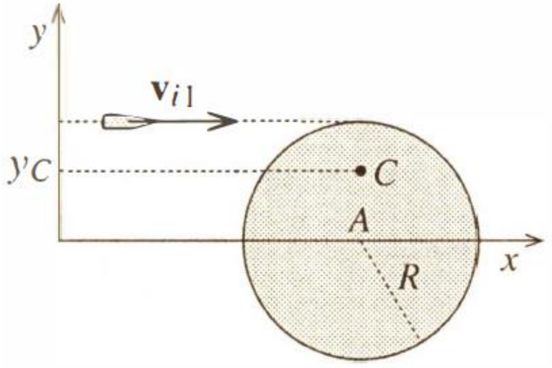


FIGURA 8.18.1

e di quello I_d del disco. Il momento d'inerzia del disco è per il teorema di Steiner dato da

$$I_d = \frac{1}{2} MR^2 + My_C^2 = \frac{1}{2} MR^2 \frac{3m^2 + M^2 + 2mM}{(m+M)^2}$$

Quindi

$$I_C = I_p + I_d = MR^2 \frac{M + 3m}{2(m+M)}$$

e quindi,

$$\omega = \frac{v_{i1}}{R} \frac{2m}{(3m+M)} .$$

Urti tra sistemi materiali: bersaglio libero $\vec{P}$ e $\vec{L}$ si conservano (forze sterne trascurabili)

ESEMPIO 8.18.1. Un disco omogeneo di massa M e raggio R è appoggiato su di un piano orizzontale. Il disco inizialmente è fermo. Un proiettile di massa m con velocità iniziale $\mathbf{v}_{i1}$ colpisce il disco in un punto del bordo, tangenzialmente, rimanendovi conficcato. Determinare il moto del sistema dopo l'urto.

Il vincolo, il piano d'appoggio, non agisce durante l'urto, dato che il moto avviene sul piano; il sistema si può considerare quindi isolato e si conservano quantità di moto e momento angolare. L'energia cinetica invece diminuisce perché ovviamente l'urto è anelastico.

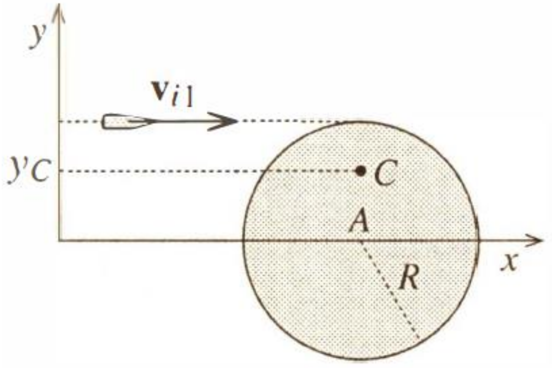


FIGURA 8.18.1

Osservazione: non c'è attrito tra il piano e il disco. Il moto finale del disco non è un moto di puro rotolamento. Il moto traslatorio e quello rotatorio sono completamente indipendenti. Il problema ha due gradi di libertà ed occorrono due equazioni per risolverlo.

Urti tra sistemi materiali: bersaglio libero $\vec{P}$ e $\vec{L}$ si conservano (forze sterne trascurabili)

ESEMPIO 8.18.2. Supponiamo ora che il disco del precedente esempio sia vincolato da un asse verticale, attorno al quale può ruotare, passante per il suo centro A.

In questo caso il sistema non si può più considerare isolato, non si può quindi dire a priori che quantità di moto e momento angolare si conservano. Le forze esterne però sono quelle vincolari, che sono applicate nel punto, fisso, A. Il loro momento rispetto a questo punto quindi è nullo e il momento angolare del sistema rispetto ad A si conserva, cioè $L_{Ai} = L_{Af}$.

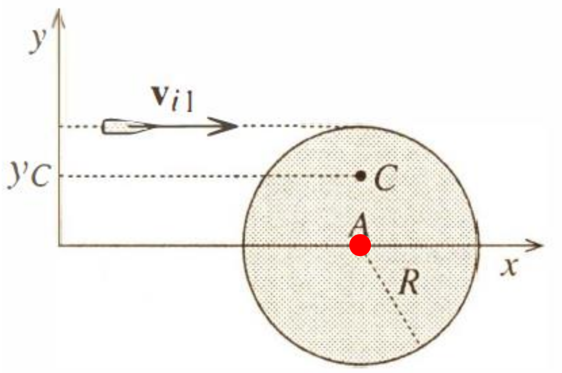


FIGURA 8.18.1

$$\frac{d\mathbf{L}_\Omega}{dt} = \mathbf{M}_\Omega^{(e)}$$

la *seconda equazione cardinale della meccanica*. Essa ci dice che *la derivata rispetto al tempo del momento angolare di un sistema meccanico rispetto ad un polo fisso in un sistema inerziale è uguale al momento delle forze esterne (rispetto al medesimo polo).*

Nello stato finale il sistema è un corpo rigido, disco più proiettile, che ruota con una determinata velocità angolare ω attorno all'asse. Quindi

$$L_{Ai} = m v_{i1} R = L_{Af} = I_A \omega$$

dove I_A è il momento d'inerzia del sistema rispetto ad A, cioè

$$I_A = \frac{1}{2} M R^2 + m R^2$$

Quindi la velocità angolare finale è

$$\omega = \frac{2m}{M + 2m} \frac{v_{i1}}{R}$$

che è diversa da quella del precedente esempio.

Il principio dei lavori virtuali.

Discuteremo qui un metodo che risulta spesso molto utile per determinare le condizioni di equilibrio di sistemi meccanici, non necessariamente rigidi. Il metodo si basa sul cosiddetto *principio dei lavori virtuali*.

Si chiama *spostamento virtuale* di un corpo, o di un sistema meccanico, un suo spostamento infinitesimo che sia compatibile con i vincoli cui esso è sottoposto. Ad esempio se il corpo è rigido e vincolato a ruotare attorno ad un asse, una rotazione infinitesima attorno a questo, se è una particella vincolata a muoversi su di una rotaia, qualsiasi spostamento infinitesimo lungo la rotaia, ecc.

Il lavoro dW_i fatto da ognuna delle forze applicate al corpo in corrispondenza ad uno spostamento virtuale di questo, si chiama *lavoro virtuale* di quella forza. Il principio dei lavori virtuali afferma che: un sistema meccanico si trova in equilibrio stabile in una determinata configurazione, se, per qualunque spostamento virtuale a partire da quella posizione, la somma dei lavori virtuali di tutte le forze applicate è nulla

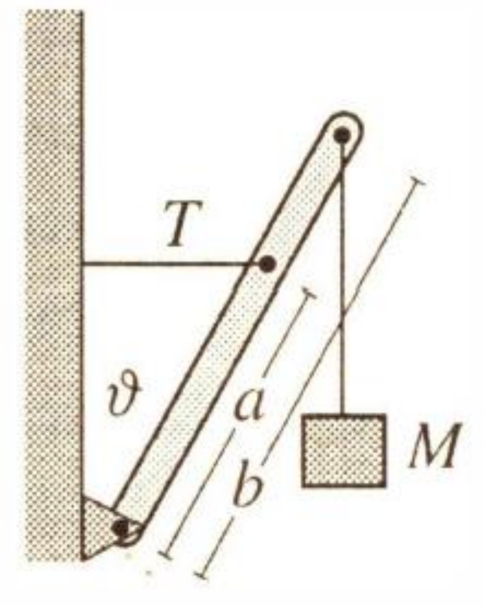
$$\sum_{i=1}^{N} dW_i = 0$$

Il principio dei lavori virtuali è una semplice conseguenza del principio di conservazione dell'energia e delle condizioni generali di equilibrio. Se il sistema si trova in una configurazione di equilibrio stabile infatti, la sua energia è minima in quella configurazione. Le variazioni di energia per tutti gli spostamenti da essa sono quindi nulle, ma queste sono pari al lavoro complessivo fatto dall'esterno del sistema.

L'enunciato, nella forma che abbiamo dato, si applica solo se i vincoli sono bilaterali e lisci; lo si può però generalizzare anche ad ammettere la presenza di attriti e di vincoli unilaterali, ma non lo faremo. Discutiamo invece alcuni esempi.

Il principio dei lavori virtuali.

ESEMPIO 8.19.3. In figura 8.19.3 è mostrata una sbarra di massa m, imperniata nel punto più basso e tenuta da una fune. La sbarra regge il peso di una massa M. Qual è la tensione della fune?



Supponiamo di variare l'angolo di $-d\vartheta$ (lo diminuiamo un po'). Il corpo M sale di $d(b\cos\vartheta) = b\sin\vartheta\, d\vartheta$. Il lavoro del peso è $dW_1 = -Mgb\sin\vartheta\, d\vartheta$. Possiamo pensare al peso mg della sbarra stessa applicato al suo baricentro; il lavoro di questa forza per lo spostamento virtuale considerato è $dW_2 = -mg(b/2)\sin\vartheta\, d\vartheta$. Il punto in cui è attaccata la fune si sposta di $d(a\sin\vartheta) = a\cos\vartheta\, d\vartheta$ e il lavoro della tensione è $dW_3 = Ta\cos\vartheta\, d\vartheta$. Imponendo che la somma dei tre lavori sia nulla si ottiene $T = (M + m/2)g(b/a)\tan\vartheta$. □

Il lettore si eserciti su di un ulteriore esempio, il quesito 20.

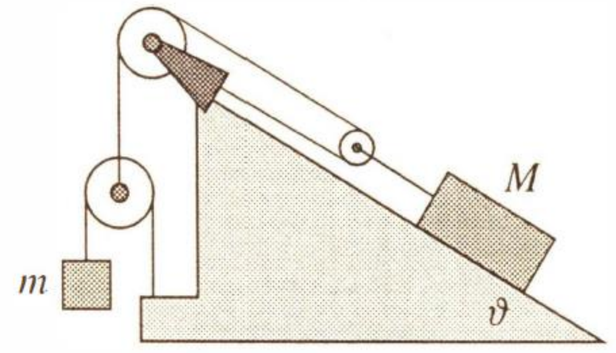


FIGURA 8.Q.6

Ad uno spostamento *ds* della massa M corrisponde uno spostamento *4ds* della massa m

$$Mg\sin\vartheta\, ds - 4mg = 0 \rightarrow m = \frac{1}{4}M\sin\vartheta$$