PARTE E
Circuiti in regime sinusoidale
Circuiti trifase

Premessa – Questa parte delle dispense è dedicata ai circuiti trifase in regime periodico sinusoidale (sistemi trifase).

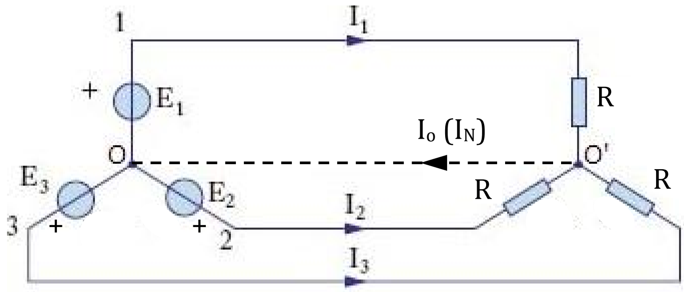
Dopo l'introduzione dei principali concetti, con riferimento ai sistemi simmetrici equilibrati, sono trattate le problematiche del rifasamento e delle linee elettriche, già viste per i sistemi monfase.

Capitolo 19

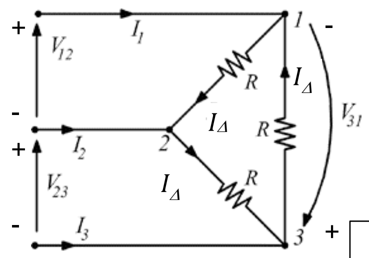
Circuiti trifase in corrente alternata sinusoidale

Problema 19.1: *Una linea trifase a 400 V, 50 Hz alimenta i tre resistori, <u>collegati a stella,</u> di un forno elettrico industriale, ognuno avente una resistenza R = 20 Ω.*

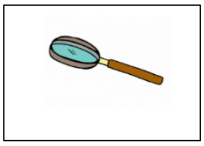
a) Determinare il valore efficace delle correnti I_1, I_2, e I_3 della linea trifase e la potenza scaldante del forno (figura a))
b) Ripetere dopo aver <u>commutato</u> gli stessi tre resistori a triangolo (figura b)).



a)



b)



Per motivi tecnico-economici la generazione e la trasmissione/distribuzione dell'energia elettrica viene fatta con reti trifase.

Ogni generatore di tensione trifase presenta tre fasi, ognuna delle quali costituisce un generatore monofase, le cui fem sono rispettivamente E_1, E_2, ed E_3. Le tre fasi sono normalmente collegate a stella, nel senso che i tre poli negativi di ciascuna fase cono connessi insieme a formare il centro stella O, dal quale si diparte l'eventuale *filo (o conduttore) neutro*, mentre ciascuno dei poli positivi va a formare la terna 1,2,3 dei morsetti del generatore trifase, dai quali si dipartono i *fili (o conduttori) di linea* (figura a)).

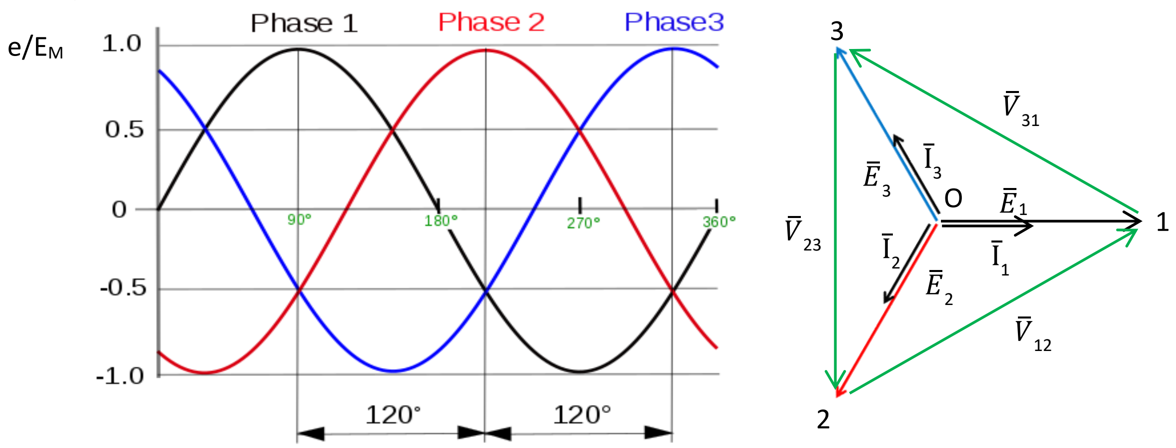
Le tre fem E_1, E_2, ed E_3 costituiscono le *tensioni stellate o tensioni di fase* del generatore (in inglese sono dette *phase voltages*). Esse hanno uguali valori massimi E_M, e quindi anche uguali valori efficaci E, ma hanno fasi angolari diverse. Precisamente la fem E_2 è in ritardo di 120° (un terzo di periodo) rispetto alla fem E_1, mentre la fem E_3 è in ritardo di 120° (un altro terzo di periodo) rispetto alla fem E_2, e quindi è in ritardo di 240° (due terzi di periodo) rispetto alla fem E_1 (o in altri termini è in anticipo di 120° (un terzo di periodo) rispetto alla stessa fem E_1).

Gli andamenti temporali e il diagramma vettoriale delle tre fem sono rappresentati nella figura sottostante.

La *sequenza ciclica* descritta (l'ordine con cui si susseguono le tre fem) prende il nome di *sequenza (ciclica) diretta*. Si dice che le tre tensioni costituiscono una *terna simmetrica (perché hanno uguale ampiezza e uguali sfasamenti reciproci) diretta.*

Quando le ampiezze o gli sfasamenti reciproci non siano tutti uguali, la terna si dice dissimmetrica.

Nel caso di sequenza ciclica inversa è la fem E_2 che è in anticipo di 120° (un terzo di periodo) rispetto alla fem E_1, mentre la fem E_3 è in ritardo di 120°. La modifica della sequenza ciclica si ottiene banalmente chiamando E_2 la fem E_3 e chiamando E_3 la fem E_2 ossia scambiando le due fasi (in realtà si può ottenere scambiando due fasi qualsiasi). Questo è quello che fanno gli installatori elettrici quando "scambiano due fili" di una linea trifase.



Si vede, sia dagli andamenti temporali che dal digramma vettoriale che vale $\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_1 = 0$[1].

Oltre alle tensioni stellate, si definiscono anche le *tensioni concatenate*, che sono le tensioni fra due fili di linea (in inglese sono dette *phase-to-phase voltages*). Per il principio di Kirchhoff delle tensioni, ognuna di esse è data dalla differenza delle due tensioni stellate che fanno capo a quei due fili di linea. Per esempio, la tensione concatenata $\bar{V}_{12}$ fra i conduttori di linea 1 e 2 è data da $\bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$ ed è rappresentata vettorialmente dal vettore che va dal vertice di $\bar{E}_2$ al vertice di $\bar{E}_1$ (rappresentazioni vettoriali disegnate leggermente allontanate per motivi grafici).

Definendole in una sequenza ciclica ordinata possiamo scrivere:

$$\bar{V}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2$$
$$\bar{V}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3$$
$$\bar{V}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1$$

ed anche le tensioni concatenate formano una terna simmetrica diretta. Esse hanno tutte la stessa ampiezza di valore V che, dal diagramma vettoriale, si vede vale:

$$V = 2(E \cdot cos30°) = \sqrt{3}\ E$$

NB1 : Per la legge di Kirchhoff delle tensioni, la somma delle tre tensioni concatenate è sempre nulla, sia per terne simmetriche che dissimmetriche, sia dirette che inverse.

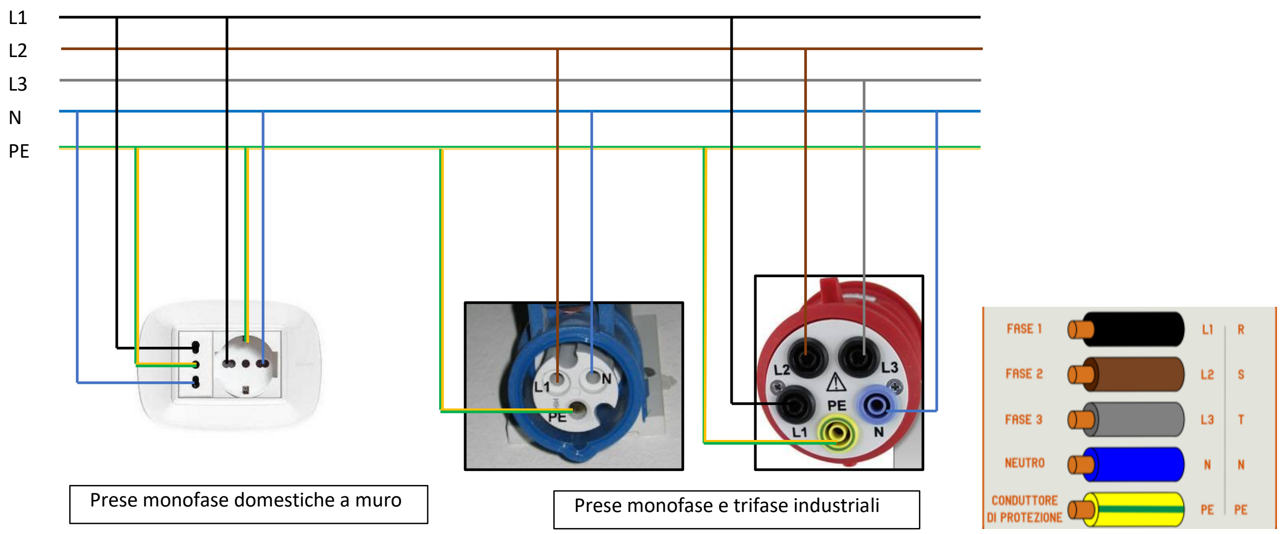
[1] Questa proprietà non deriva dal principio di Kirchhoff per le tensioni (le tre fem non stanno in una maglia chiusa), ma da come è costruito il generatore trifase.

NB2 : Per convenzione normativa, riferendosi a sistemi trifase, se non diversamente indicato, ci si riferisce sempre alla tensione concatenata. Una linea trifase a 20 kV è una linea trifase con tensioni concatenate efficaci di 20.000 V. Le tensioni di fase (tensioni stellate) hanno valore efficace di 20.000/$\sqrt{3}$ =11547 V.

NB3 : L' alimentazione delle comuni utenze artigianali è ottenuta portando all'utenza i tre fili di linea e il filo neutro. La tensione trifase è di 400 V, cioè la linea presenta una tensione concatenata efficace di 400 V (concatenata massima V_M= 400 $\cdot\sqrt{2}$= 565.7 V). La tensione efficace di fase (stellata), che si misura fra un qualsiasi filo di linea e il filo neutro, vale E=V/$\sqrt{3}$ = 230 V (esattamente 230.9 V) che è la tensione impiegata per alimentare i carichi monofase. La figura sottostante illustra in modo schematico elementare una possibile configurazione di impianto elettrico in bassa tensione 230/400 V.

I colori che contrassegnano i conduttori sono quelli prescritti dalla normativa. E' mostrato anche un conduttore PE gialloverde "di protezione" (terra) del quale non abbiamo ancora parlato.

Eventuali interruttori sono inseriti sui conduttori di fase e, in alcuni casi, ANCHE sul filo neutro. <u>Mai solo</u> sul filo neutro. E <u>mai, in senso assoluto, è interrotto il conduttore di terra PE</u>.



Riprendiamo il nostro Problema. Le tre resistenze identiche, connesse a stella, sono collegate al generatore trifase mediante i tre fili di linea e il filo neutro (a tratteggio nella prima figura), che collega i due centri stella O e O'.

Un carico trifase costituito da tre impedenze identiche sulle tre fasi (in questo caso sono tre resistenze) si dice *carico equilibrato*. Stiamo quindi studiando un *sistema trifase simmetrico ed equilibrato.*

Con il filo neutro, ciascuna resistenza è evidentemente alimentata da uno dei tre generatori che formano il generatore trifase, come si riconosce facilmente dalla figura. Allora le correnti saranno:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1}{R}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{R}$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}_3}{R}$$

Esse saranno rappresentate da *tre vettori in fase con le rispettive tensioni*, come mostrato nel diagramma vettoriale sopra.

Applicando il 1^ principio di Kirchhoff ad uno dei nodi che costituiscono i centri stella troviamo per il filo neutro

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = \frac{1}{R}(\bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3) = 0$$

In un sistema simmetrico ed equilibrato, nel filo neutro, anche se presente, non circola corrente. Allora nel nostro caso lo possiamo rimuovere ed immaginare che il collegamento a tratteggio nella figura sopra non sia presente, senza che cambi alcunché.

I valori efficaci delle tre correnti di linea sono allora pari a

$$I_1 = I_2 = I_3 = I = \frac{E}{R} = \frac{230.9}{20} = 11.54\ A$$

La potenza scaldante, ovvero la potenza dissipata dalle tre resistenze sarà pari e 3 volte quella di una singola resistenza, e possiamo allora calcolarla con una delle seguenti espressioni:

$$P = 3RI^2 = 3\frac{E^2}{R} = 3EI = \sqrt{3}VI = \sqrt{3}\,400 \cdot 11.54 = 7995\ W \cong 8\ kW$$

Immaginiamo ora di <u>*commutare*</u> i tre resistori <u>*da*</u> configurazione a <u>*stella*</u> a quella <u>*a triangolo*</u>, come nella figura b) all'inizio del Capitolo. Ogni resistore si trova pertanto connesso a due fili di linea e sarà sottopsto ad una tensione concatenata. Il filo neutro non ha possibilità di esistere con questa configurazione.
Per esempio il resistore collegato fra i fili 1 e 2 sarò sottoposto alla tensione $\bar{V}_{12}$ (morsetto positivo in 1 e negativo in 2). Con la convenzione di segno degli utilizzatori la corrente $\bar{I}_{12}$ che lo percorre (da 1 a 2) , <u>*corrente di lato di triangolo*</u> (detta anche corrente di *fase del triangolo*) sarà data da:

$$\bar{I}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{R}$$

e appare nel diagramma vettoriale sottostante rappresentata da un vettore parallelo a $\bar{V}_{12}$ e disegnato, per motivi di comodità come si vedrà fra poco, sul vertice di $\bar{V}_{12}$ ossia nel "*punto che rappresenta il morsetto (nodo) del carico connesso filo di linea 1*", nodo dal quale la corrente è uscente.
Lo stesso possiamo fare per le altre due correnti di lato di triangolo, in forma analitica e in forma grafica sicché in generale abbiamo:

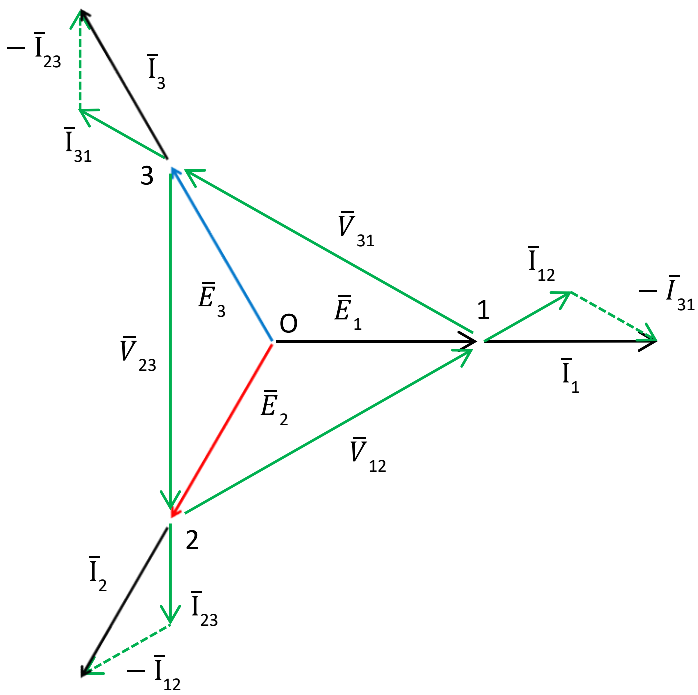
$$\bar{I}_{12} = \frac{\bar{V}_{12}}{R}$$

$$\bar{I}_{23} = \frac{\bar{V}_{23}}{R}$$

$$\bar{I}_{31} = \frac{\bar{V}_{31}}{R}$$

con ciascuna corrente in fase con la rispettiva tensione concatenata (quella che cade sullo stesso lato di triangolo).
Essendo le tensioni concatenate tutte con lo stesso valore efficace V e il carico equilibrato, anche le correnti di lato di triangolo avranno lo stesso valore efficace pari a

$$I_{12} = I_{23} = I_{31} = I_{\Delta} = \frac{V}{R}$$



Per risalire alle correnti di linea osserviamo che ogni nodo che costituisce un vertice del triangolo delle resistenze è interessato da tre correnti: una di linea (entrante) e due di lato di triangolo (una entrante e una uscente), che devono soddisfare il principio di Kirchhoff delle correnti (vedi figura b) all'inizio del Capitolo). Per esempio, per il nodo 1 possiamo deve valere:

$$\bar{I}_1 - \bar{I}_{12} + \bar{I}_{31} = 0$$

ossia

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{12} - \bar{I}_{31} = \bar{I}_{12} + (-\bar{I}_{31})$$

come mostrato vettorialmente nell'ultimo diagramma vettoriale. Ovviamente simile bilancio possiamo fare anche per gli altri vertici del triangolo sicché in generale:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{I}_{12} - \bar{I}_{31} \\ \bar{I}_2 &= \bar{I}_{23} - \bar{I}_{12} \\ \bar{I}_3 &= \bar{I}_{31} - \bar{I}_{23} \end{aligned}$$

che corrispondono alle tre costruzioni vettoriali sopra mostrate ai tre vertici 1,2,3 del triangolo delle tensioni.
Le tre correnti di linea hanno uguale valore efficace (i tre vettori hanno lo stesso modulo) I. Graficamente riconosciamo che:

$$I = 2(I_\Delta \cdot cos30°) = \sqrt{3}\ I_\Delta$$

formula che legga i valori efficaci delle correnti di linea e di fase di un carico equilibrato a triangolo

A questo risultato si arriva facilmente anche per via analitica, per esempio prendendo in esame la corrente della linea 1:

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_{12} - \bar{I}_{31} = \frac{1}{R}(\bar{V}_{12} - \bar{V}_{31}) = \frac{1}{R}[\bar{E}_1 - \bar{E}_2 - (\bar{E}_3 - \bar{E}_1)] = \frac{1}{R}[2\bar{E}_1 - \bar{E}_2 - \bar{E}_3] = \frac{3\bar{E}_1}{R}$$

da questa:

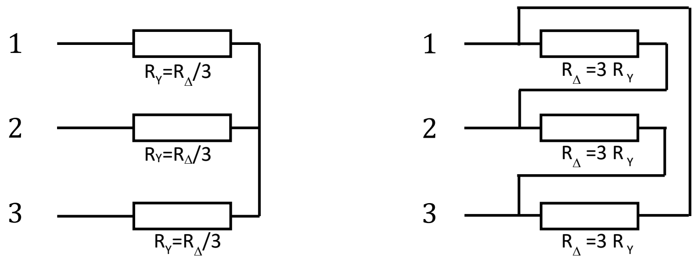
$$I = |\bar{I}_1| = \frac{3|\bar{E}_1|}{R} = \frac{3E}{R} = \frac{\sqrt{3}V}{R} = \sqrt{3}\ I_\Delta \qquad c.v.d.$$

Ma la formula vettoriale appena scritta

$$\bar{I}_1 = \frac{3\bar{E}_1}{R} = \frac{\bar{E}_1}{(R/3)}$$

ci evidenzia anche altre proprietà:

a) La corrente di linea $\bar{I}_1$ è in fase con la tensione stellata $\bar{E}_1$ come avevamo trovato con il carico a stella, anche se le correnti di lato di triangolo sono in fase con le tensioni concatenate. Lo stesso vale ovviamente anche per le altre due correnti di linea (vedi diagramma vettoriale).
b) La corrente di linea $\bar{I}_1$ di un carico equilibrato a triangolo avente una resistenza R in ciascun lato, è quella che si avrebbe con un carico equilibrato a stella e resistenza (R/3), (vedi soluzione del caso di carico a stella). I due seguenti carichi sono pertanto indistinguibili dalla linea trifase che, con pari tensione, sarà impegnata con la stessa corrente e fornirà la stessa potenza.



Equivalenza stella-triangolo per un carico trifase equilibrato

NB : la figura permette di ricordare che spesso si usa il simbolo Y per denotare il carico a stella e il simbolo Δ (o D) per quello a triangolo. Si vede anche che la disposizione visiva dei resistori non è necessariamente una stella e un triangolo ed è di fatto priva di importanza. Ciò che conta e che distingue i due casi di carico a stella e carico a triangolo è il criterio di connessione elettrica delle tre fasi.
La regola della trasformazione stella-triangolo sopra esposta vale anche per il caso di carichi equilibrati costituiti da tre impedenze Z identiche.

Per il nostro problema allora possiamo ricavare:

$$I_\Delta = \frac{V}{R} = \frac{400}{20} = 20.0\ A$$

$$I = \sqrt{3}\ I_\Delta = 34.64\ A$$

E infine per le potenze (**Autovalutazione**: verificare la corrispondenza ricavando un'espressione da un'altra):

$$P = 3RI_\Delta{}^2 = 3\frac{V^2}{R} = 3VI_\Delta = 3EI = \sqrt{3}VI = \sqrt{3}\,400 \cdot 34.64 = 24000\ W = 24\ kW$$

Insomma:

a) *Con la commutazione da stella a triangolo di tre identiche fasi, la potenza (e la corrente di linea) si triplica,* lasciando invariata la tensione. Viceversa, *con la commutazione da triangolo a stella di tre identiche fasi, la potenza (e la corrente di linea) si riduce ad un terzo.*

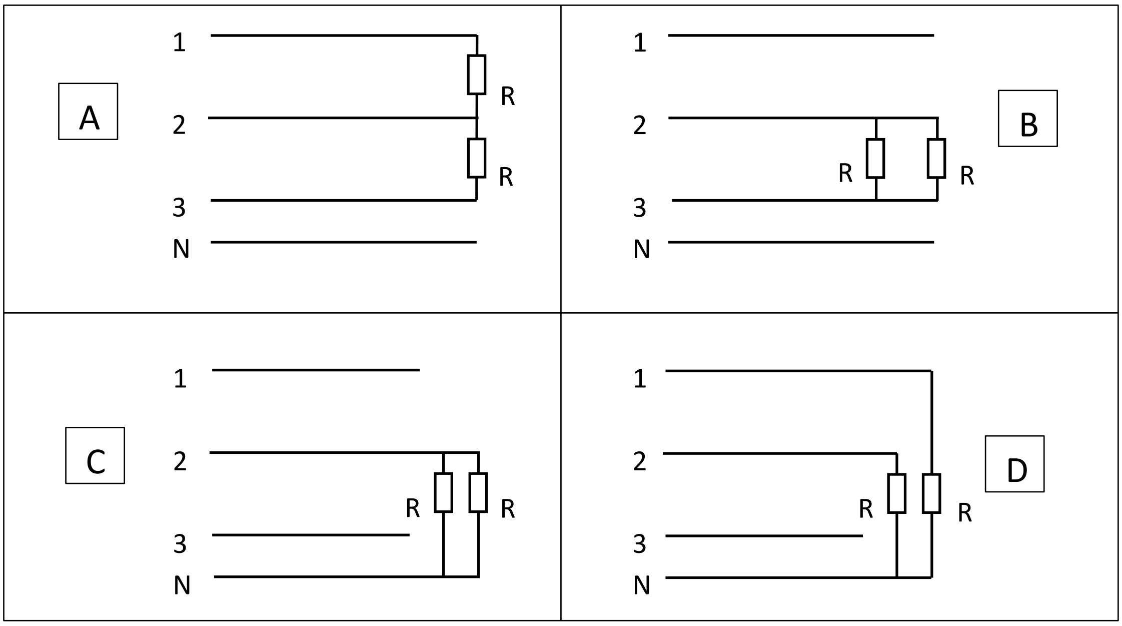
b) Se avessimo voluto un carico a triangolo con stesse correnti di linea e la stessa potenza di quello a stella, avremmo dovuto usare il carico a *triangolo equivalente* cioè con resistori di resistenza tre volte maggiori, nel nostro caso 60 Ω. Con esso infatti si sarebbe avuto:

$$I_\Delta = \frac{V}{R} = \frac{400}{60} = 6.667\ A$$

$$I = \sqrt{3}\ I_\Delta = 11.54\ A \qquad (la\ stessa\ del\ carico\ a\ stella\ da\ 20\ \Omega)$$

$$P = 3RI_\Delta{}^2 = 3\frac{V^2}{R} = 3VI_\Delta = 3EI = \sqrt{3}VI = \sqrt{3}\,400 \cdot 11.54 = 8000\ W \quad (idem)$$

Problema 19.2: (**Autovalutazione**) *Una linea trifase a 400 V, 50 Hz (tensioni simmetriche in sequenza diretta) alimenta i DUE resistori identici da R = 20 Ω, collegati nei 4 differenti modi di figura. Calcolare per le 4 configurazioni le correnti di linea e del filo neutro (valori efficaci) e le potenze dei singoli resistori.*



NB: In questo caso non si tratta di carichi equilibrati per cui ogni conduttore di linea ha la sua corrente.

NB: Si ricorda che i principi di Kirchhoff si applicano con le rappresentazioni simboliche.

Capitolo 20

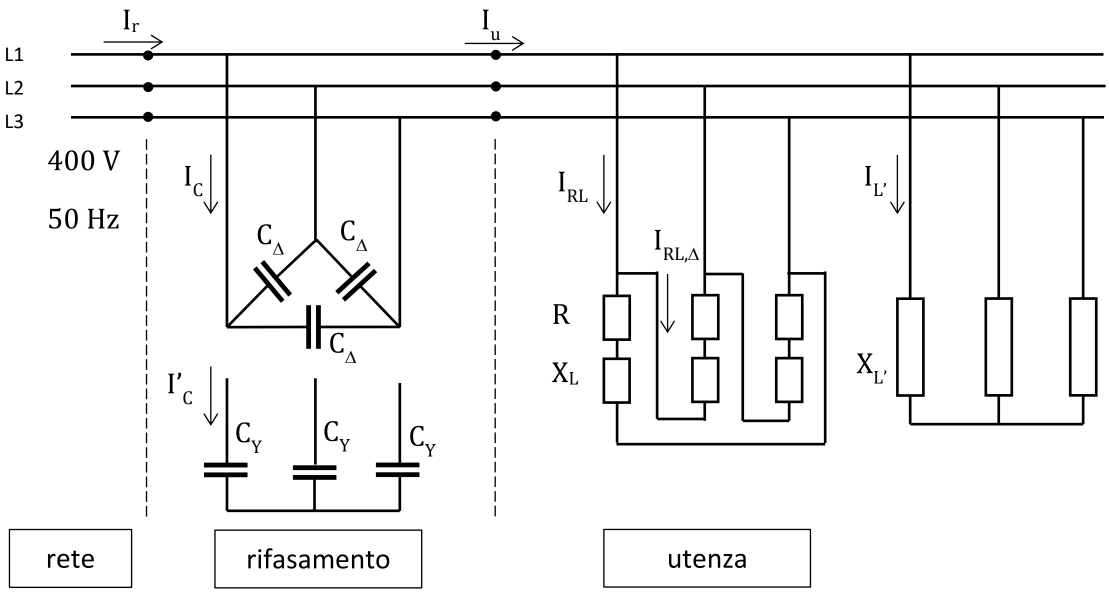
Potenze trifase in corrente alternata sinusoidale

Problema 20.1: *Un'utenza trifase alimentata a 400 V, 50 Hz è costituita da:*

1. *un carico trifase equilibrato a triangolo con ciascun lato costituito dalla serie di una resistenza R=40 Ω e da una reattanza induttiva X_L=30 Ω (potrebbe rappresentare un motore elettrico a carico);*
2. *un carico trifase equilibrato a stella con ciascuna fase costituita da una reattanza induttiva $X_{L'}$ = 80 Ω (potrebbe rappresentare un motore elettrico a vuoto).*

come rappresentato in figura. Determinare:

a) *I valori efficaci delle correnti di linea I_{RL} e I_L dei due carichi e I_u dell'intera utenza;*
b) *I valori delle potenze attive, reattive ed apparenti dei due carichi e dell'intera utenza;*
c) *I valori delle capacità di rifasamento a triangolo o a stella da inserire per avere una potenza reattiva (induttiva) assorbita dalla rete non superiore al 30% della potenza attiva;*
d) *Il valori efficaci della corrente I_C (o I'_C) del banco di condensatori e I_r di rete dopo aver soddisfatto la condizione c).*



Incominciamo con il carico RL a triangolo. Ogni sua fase (lato di triangolo) è connessa fra due fili di linea e quindi sottoposta alla tensione (efficace) di 400 V e alla frequenza di 50 Hz. L'impedenza di ciascun a fase (modulo dell'operatore impedenza complessa) lo calcoliamo con la:

$$Z_{RL} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\ \Omega$$

Il valore efficace della corrente che percorre l'impedenza (corrente di lato di triangolo) è allora:

$$I_{RL,\Delta} = \frac{V}{Z_{RL}} = \frac{400}{50} = 8 \quad A$$

e la corrente di linea di quel carico

$$I_{RL} = \sqrt{3}\, I_{RL,\Delta} = \sqrt{3}\, 8 = 13.86 \quad A$$

Questo valori (efficaci) di corrente valgono ovviamente per tutti i tre lati del triangolo (il primo) e per tutte i fili di linea (il secondo), anche se in figura l'indicazione della corrente è riportata solo su un lato del triangolo e solo su un filo di linea.

La corrente che interessa il resistore R è quella del lato di triangolo $I_{RL,\Delta}$. La potenza attiva assorbita dall'intero carico trifase a triangolo sarà 3 volte quella di una singola resistenza e quindi

$$P_{RL} = 3\, R\, I_{RL,\Delta}^2 = 3 \cdot 40 \cdot 8^2 = 7680\, W$$

Analogo ragionamento possiamo fare per la potenza reattiva, sicché la potenza reattiva assorbita dall'intero carico trifase a triangolo sarà 3 volte quella di una singola reattanza e quindi

$$Q_{RL} = 3\, X_L\, I_{RL,\Delta}^2 = 3 \cdot 30 \cdot 8^2 = 5760 \quad var$$

Possiamo anche definire una potenza apparente trifase pari a:

$$S_{RL} = \sqrt{{P_{RL}}^2 + {Q_{RL}}^2} = \sqrt{7680^2 + 5760^2} = 9600 \quad VA$$

$$cos\varphi_{RL} = \frac{P_{RL}}{S_{RL}} = \frac{7680}{9600} = 0.800$$

Possiamo ancora riconoscere una proprietà già vista nel precedente Capitolo e generalizzare le formule per il calcolo delle potenze trifase.

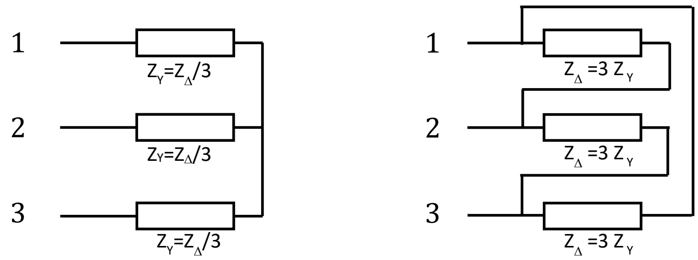
Innanzitutto, possiamo scrivere la potenza attiva e quella reattiva anche come:

$$P_{RL} = 3\,\mathrm{R}\, I_{RL,\Delta}^2 = 3\, \frac{R}{3} \left(\sqrt{3}\ \ I_{RL,\Delta}\right)^2 = 3\, \frac{R}{3}\, I_{RL}^2$$

$$Q_{RL} = 3\, X_L\, I_{RL,\Delta}^2 = 3\, \frac{X_L}{3} \left(\sqrt{3}\ \ I_{RL,\Delta}\right)^2 = 3\, \frac{X_L}{3}\, I_{RL}^2$$

che mostrano che un carico equilibrato a triangolo con impedenze R, X_L percorse dalla corrente di lato di triangolo $I_{RL,\Delta}$ è equivalente ad un carico a stella con impedenze R/3, $X_L/3$ percorse dalla corrente di linea I_{RL}. Le seguenti due configurazioni sono quindi equivalenti[2] (già visto per il caso particolare dei carichi resistivi):

[2] Esistono nei manuali e stesti specifici formule di trasfomazione stella-triangolo anche per carichi non equilibrati



Equivalenza stella-triangolo per un carico trifase equilibrato

L'equivalenza mostra che le impedenze $\dot{Z}_Y$ e $\dot{Z}_\Delta$ sono simili (sono proporzionali) cioè hanno lo stesso argomento φ. Ne deriva che *lo sfasamento φ in anticipo della tensione stellata rispetto alla corrente di linea* (argomento della $\dot{Z}_Y$) *è uguale allo sfasamento φ in anticipo della tensione di linea (tensione di lato di triangolo) rispetto alla corrente di lato di triangolo* (argomento della $\dot{Z}_\Delta$)

Più in generale possiamo scrivere (usando i valori efficaci delle tensioni e delle correnti e lo sfasamento dell'impedenza) le potenze attiva e reattiva come:

- <u>Carico equilibrato a stella con tensioni simmetriche</u>

$$P = 3EIcos\varphi\ = \sqrt{3}\ (\sqrt{3}E)Icos\varphi\ = \sqrt{3}VIcos\varphi$$

$$Q = 3EIsin\varphi\ = \sqrt{3}\ (\sqrt{3}E)Isin\varphi\ = \sqrt{3}VIsin\varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}\ = 3EI\ = \sqrt{3}\ (\sqrt{3}E)I\ = \sqrt{3}VI$$

- <u>Carico equilibrato a triangolo con tensioni simmetriche</u>

$$P = 3VI_\Delta cos\varphi\ = \sqrt{3}\,E(\sqrt{3}I_\Delta)cos\varphi\ = \sqrt{3}VIcos\varphi$$

$$Q = 3VI_\Delta sin\varphi\ = \sqrt{3}\,E(\sqrt{3}I_\Delta)sin\varphi\ = \sqrt{3}VIsin\varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}\ = 3VI_\Delta\ = \sqrt{3}\,E(\sqrt{3}I_\Delta) = \sqrt{3}VI$$

riconoscendo come in entrambi i casi si possa usare la stessa ultima espressione riportata in ogni riga.

Riprendiamo il problema considerando il secondo carico, puramente reattivo. E'collegato a stella e pertanto su ciascuna reattanza cade la tensione stellata E. La corrente della reattanza, pari alla corrente di linea è allora:

$$I_{L'} = \frac{E}{X_{L'}} = \frac{400/\sqrt{3}}{80}\ =\ 2.887\quad A$$

Le potenze diventano (per questo carico $\varphi_{L'} = 90°$, $\cos\varphi_{L'} = 0$, $\sin\varphi_{L'} =1$):

$$P_{L'} =\ \sqrt{3}VI_{L'}cos\varphi_{L'}\ = 0$$

$$Q_{L'} = 3X'_L\, I_{L'}^2 = \sqrt{3}VIsin\varphi_{L'} = 2000 \ \ var$$

$$S_{L'} = \sqrt{{P_{L'}}^2 + {Q_{L'}}^2} = \sqrt{3}VI_{L'} = 2000\, VA$$

Infine possiamo applicare il principio delle potenze attive e reattive (non per le apparenti!) e ricavare per l'intera utenza:

$$P_u = P_{RL} + P_{L'} = 7680 + 0 = 7680 \ W$$

$$Q_u = Q_{RL} + Q_{L'} = 5760 \ + 2000 = 7760 \ var$$

$$S_u = \sqrt{{P_u}^2 + {Q_u}^2} = \sqrt{7680^2 + 7760^2} = 10918 \ VA$$ [3]

Ai morsetti dell'intera utenza allora abbiamo

$$S_u = \sqrt{3}VI_u \quad \Rightarrow \quad I_u = \frac{S_u}{\sqrt{3}V} = \frac{10918}{\sqrt{3}\cdot 400} = 15.76 \ \ A$$ [4]

$$cos\varphi_u = \frac{P_u}{S_u} = \frac{7680}{10918} = 0.7034$$

Passiamo al rifasamento richiesto. Si vuole che la potenza reattiva (induttiva) sia non superiore al 30% della potenza attiva. L'inserimento di condensatori di rifasamento non modifica la potenza attiva, quindi da subito possiamo dire che ai morsetti della rete avremo:

$$P_r = P_u = 7680 \ W$$

e dovrà essere:

$$Q_r \leq 0.3\, P_r = 0.3 \cdot 7680 = 2304 \ var$$

Sia Q_r = 2300 var. Allora il bilancio delle potenze reattive porta a scrivere

$$Q_r = Q_u + Q_C = 2300 \ var$$

da cui

$$Q_C = 2300 - Q_u = 2300 - 7760 = -5460\, var \equiv 5460\, VAC$$

Questa è la potenza reattiva del banco di condensatori di rifasamento ($Q_{C[VAC]}$ = 5460 VAC).

<u>Condensatori di rifasamento a triangolo</u> – Se i condensatori di rifasamento sono connessi a triangolo, ad ogni condensatore è applicata la tensione di linea V. La potenza reattiva capacitiva trifase risulta:

$$Q_{C[VAC]} = 3VI_\Delta = 3V(\omega C_\Delta V) = 3\omega C_\Delta V^2$$

da cui calcoliamo:

---

[3] Notiamo che non è la somma delle potenze apparenti dei due carichi.

[4] Notiamo che non è la somma delle correnti efficaci dei due carichi.

$$C_{\Delta} = \frac{Q_{C[VAC]}}{3\omega V^2} = \frac{5460}{3(2\pi 50)400^2} = 36.21 \; 10^{-6}\, F \; \equiv \; 36.21 \; \mu F$$

$$I_{\Delta} = \omega C_{\Delta} V = (2\pi 50)\; 36.21 \cdot 10^{-6} \cdot 400 = 4.550 \; A$$

$$I_C = \sqrt{3} I_{\Delta} = \sqrt{3} \cdot 4.550 = 7.881 \; A$$

<u>Condensatori di rifasamento a stella</u> – Se i condensatori di rifasamento sono connessi a stella, ad ogni condensatore è applicata la tensione di fase (tensione stella) E. La potenza reattiva capacitiva trifase risulta:

$$Q_{C[VAC]} = 3EI = 3E(\omega C_Y E) = 3\omega C_Y E^2$$

da cui calcoliamo:

$$C_Y = \frac{Q_{C[VAC]}}{3\omega E^2} = \frac{5460}{3(2\pi 50)\left(400/\sqrt{3}\right)^2} = 108.6 \; 10^{-6}\, F \; \equiv \; 108.6 \; \mu F$$

$$I'_C = \omega C_Y E = (2\pi 50)\; 108.6 \; 10^{-6} \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} = 7.879 \; A$$

pari ovviamente a I_C, essendo identica la potenza reattiva delle due configurazioni.

Per quanto riguarda la corrente di rete con rifasamento possiamo calcolare prima la potenza apparente

$$S_r = \sqrt{{P_r}^2 + {Q_r}^2} = \sqrt{7680^2 + 2300^2} = 8017 \; VA$$

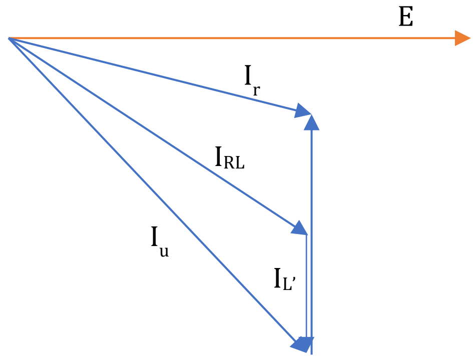
Ai morsetti della rete allora abbiamo

$$S_r = \sqrt{3} V I_r \quad \Rightarrow \quad I_r = \frac{S_r}{\sqrt{3}V} = \frac{8017}{\sqrt{3} \cdot 400} = 11.57 \; A$$

$$cos\varphi_r = \frac{P_r}{S_r} = \frac{7680}{8017} = 0.958$$

Quanto calcolato può essere rappresentato anche vettorialmente. Come si è visto il diagramma delle tensioni e delle correnti <u>delle tre fasi</u> sono identici (per i sistemi simmetrici ed equilibrati) salvo la rotazione di 120° fra di loro. È consuetudine allora fare il diagramma vettoriale per una sola fase, per esempio la fase 1.

Per questa fase il diagramma vettoriale delle tensioni e delle correnti è quello sottostante (in scala apporssimativa), avendo fissato arbitrariamente sull'asse reale la tensione stellata.



NB – Ci si potrebbe chiedere, dal punto di vista tecnico economico, quale delle due configurazioni (triangolo o stella) dei condensatori di rifasamento sia più conveniente.

Con la configurazione a triangolo servono tre condensatori di capacità più piccola, ma capaci di funzionare alla tensione (tensione di lavoro) V=400 V.
Con la configurazione a stella servono tre condensatori di capacità più grande (tripla), ma ai quali si chiede di essere capaci di funzionare alla tensione più bassa di $E=400/\sqrt{3}= 230$ V .

Per i condensatori di rifasamento in bassa tensione (BT) solitamente "la capacità costa più della tensione" e quindi conviene la soluzione con capacità più piccole (configurazione a triangolo).
Per i condensatori di rifasamento in media tensione (MT: sopra i 1000V) invece "la capacità costa meno della tensione" e quindi conviene la soluzione con tensioni più piccole (configurazione a stella).

In questo caso quindi la soluzione preferibile è quella a triangolo.

Capitolo 21

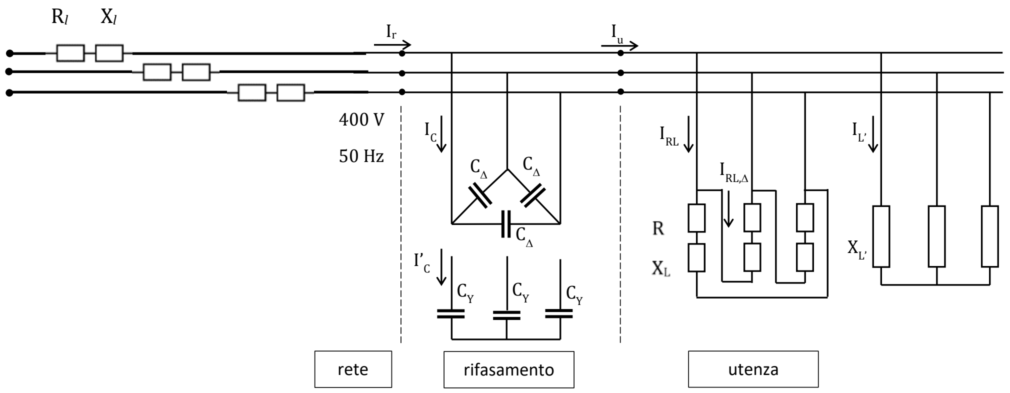
Linee e cavi trifase

Problema 21.1: *Il carico del Problema 20.1 è alimentato mediante un cavo tripolare in rame la cui lunghezza è l=50 m e la sezione è S= 6 mm².* *Il fornitore del cavo precisa che la sua induttanza per unità di lunghezza è L_x= 0.4 μH/m.*

Determinare:

a) *La tensione V_p alla partenza del cavo per avere V_a=400 V all'arrivo (con rifasamento inserito);*
b) *La tensione all'arrivo V'_a con il solo rifasamento inserito;*
c) *Le perdite Joule P_J del cavo.*

La situazione è mostrata nella figura seguente:



Il cavo trifase è costituito da tre conduttori identici (oltre al conduttore, evidenziato in giallo verde, di protezione (terra)). Nel caso di cavo tripolare i tre (quattro) conduttori sono assemblati nello stesso corpo isolante a formare un cavo unico.

Ogni conduttore presenta la resistenza (di linea) R_l e reattanza X_l. Questi parametri li possiamo calcolare con le:

$$R_l = \rho \frac{l}{S} = 0.018_{[\Omega\mathrm{mm}^2/m]} \frac{50_{[m]}}{6_{[\mathrm{mm}^2]}} = 0.15 \quad \Omega$$

e

$$X_l = \omega L_l = \omega(l \cdot L_x) = 314.2 \cdot 50_{[m]} \cdot (0.4 \cdot 10^{-6})_{[H/m]} = 0.0063 \quad \Omega$$

NB: per cavi di piccola sezione prevale il parametro resistivo che dipende, appunto dalla sezione. I due parametri si uguagliano con cavi di circa 100 mm² per prevalere poi il parametro induttivo per sezioni superiori.

Possiamo trattare ciascuna fase del sistema trifase come una linea monofase avente un fittizio filo di ritorno costituito dal filo neutro, non percorso da corrente (e per questo rimosso). Sul filo neutro non si hanno pertanto cadute di tensione.

La tensione in arrivo sarà la tensione di fase (tensione stellata) del nostro sistema trifase, quindi $V_{a,Y}=400/\sqrt{3}=230\ V$ e la tensione in partenza $V_{p,Y}$. Calcoliamo la caduta di tensione con la formula i Kapp:

$$\boxed{\Delta V_Y = I(R_l cos\,\varphi + X_l\,sin\,\varphi) \qquad caduta\ di\ tensione\ stellata\ di\ Kapp\ per\ sistema\ trifase}$$

Notare l'assenza del fattore 2, che invece compare nel caso di una normale rete monofase, in quanto in questo caso non abbiamo caduta di tensione sul filo di ritorno.

La tensione in partenza sarà allora

$$V_{p,Y} \cong V_{a,Y} + \Delta V_Y$$

Più praticamente possiamo riferirci alle tensioni concatenate e scrivere

$$\boxed{\Delta V = \sqrt{3}\, I(R_l cos\,\varphi + X_l\,sin\,\varphi) \qquad caduta\ di\ tensione\ concatenata\ di\ Kapp\ per\ sistema\ trifase}$$

per cui

$$V_p \cong V_a + \Delta V$$

a) Per rispondere al primo quesito del problema calcoliamo allora:

$$\Delta V = \sqrt{3} \cdot 11.57 \cdot (0.15 \cdot 0.958 + 0.0063 \cdot 0.287) = 2.92\,V$$

$$V_p \cong 400 + 2.92 = 403\,V$$

b) Con il solo rifasamento inserito abbiamo (corrente nel cavo pari a 7.879 *A):*

$$\Delta V' = \sqrt{3} \cdot 7.879 \cdot (0.15 \cdot 0.0 + 0.0063 \cdot (-1)) = -0.086\,V$$

$$V_p \cong V'_a + \Delta V'$$

$$V'_a \cong V_p - \Delta V' = 403 - (-0.086) = 403.1\,V$$

che è maggiore, se pure di molto poco, della tensione di partenza.

c) Infine per le perdite si calcola facilmente:

$$P_J = 3\,R_l\,I^2 = 3 \cdot 0.15 \cdot 11.57^2 = 60.2\,W$$