Ingegneria Meccanica – Fisica Generale 1 – **CANALE 2**

Prova del 15 Luglio 2022 – Prof. Merano, Giubilato

Matricola: Cognome: Nome:

- Non si consegnano i fogli di brutta
- Fogli senza matricola, cognome e nome non saranno considerati validi
- Si può utilizzare il solo formulario e la calcolatrice non programmabile
- La presenza di qualsiasi altro testo, documento, foglio, strumento,… **invaliderà la prova**
- Le risposte alle DOMANDE sono considerate valide se viene indicata la risposta esatta, e la scelta è correttamente giustificata nello spazio libero sottostante alla domanda stessa.
- Le DOMANDE con **risposta corretta** valgono **2 punti**, le domande **senza risposta 0 punti**, le domande **errate** incorrono in una penalizzazione di **-0.5 punti**.
- Gli ESERCIZI vanno svolti con ordine, e **i risultati giustificati analiticamente**. Risultati numericamente o algebricamente corretti, ma mancanti dei passaggi necessari a giustificarli, non verranno considerati validi.

Formulario

Costanti

$g_0 \cong 9.81\,\frac{m}{s^2}$	$G \cong 6.674 \times 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}$		
$M_\oplus \cong 5.972 \times 10^{24}\,kg$	$R_\oplus \cong 6.4 \times 10^6\,m$	$M_\odot \cong 1.989 \times 10^{30}\,kg$	
$\rho_{H_2O} \cong 1 \times 10^3\,\frac{kg}{m^3}$	$\rho_{air} \cong 1.25\,\frac{kg}{m^3}$	$\mu_{H_2O} \cong 0.864 \times 10^{-3}\,Pa\,s$	
$c \cong 3 \times 10^8\,\frac{m}{s}$	$q_0 \cong 1.6 \times 10^{-19}\,C$	$\varepsilon_0 \cong 8.854 \times 10^{-12}\,\frac{F}{m}$	$\mu_0 \cong 1.256 \times 10^{-6}\,\frac{H}{m}$

Cinematica, dinamica, lavoro ed energia del punto materiale

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$	$\mathbf{a}_C = -\omega^2 r\,\boldsymbol{u}_r = -\frac{v^2}{r}\,\boldsymbol{u}_r$	
$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} + \frac{dm}{dt}$	$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{x}$
$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}, \quad \frac{dW}{dt} = P$	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_g = mgh$	$E_e = \frac{1}{2}kx^2$

Gravitazione

$\boldsymbol{F} = G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$U = G\frac{Mm}{r}$		

Momenti

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$	

Moti armonici

$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$	$T_{molla} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T_{pendolo} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	

Dinamica, lavoro ed energia del corpo rigido

$\boldsymbol{r}_{cm} = \sum \boldsymbol{r}_i m_i / \sum m_i$	$I = \sum r_i^2 m_i$		
$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\alpha}$		$I = Í + mr^2$
$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM}$	$E_{kr} = \frac{1}{2} I\boldsymbol{\omega}^2$	$E_k = \frac{1}{2} m v_{cm}{}^2 + \frac{1}{2} I\boldsymbol{\omega}^2$	
$I_{asta} = \frac{1}{12} ml^2$	$I_{anello} = mr^2$	$I_{cilindro} = \frac{1}{2} mr^2$	$I_{sfera} = \frac{2}{5} ml^2$

Meccanica e dinamica dei fluidi incomprimibili

$F_A = \rho V g$	$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = k$	$Av = cost$	
$Re = \frac{\rho}{\mu} L v_r = \frac{L}{\nu} v_r$	$F_{lmn} = 6\pi r \mu v$		

Elettrostatica

$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q_1}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$\boldsymbol{E}_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$V_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	

Campi

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E} = -\nabla V$	$V = \int -\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dr} + k$	
$\phi_\Sigma(\boldsymbol{E}) = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_0}$	$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$C_\Gamma(\boldsymbol{E}) = \iint_\Sigma (\nabla \times \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{d\Sigma}$	$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$
$\boldsymbol{E}_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{u}_r$	$\boldsymbol{E}_{anello} = \frac{\lambda R y}{2\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{3/2}}\boldsymbol{u}_n$	$\boldsymbol{E}_{piano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$	$\boldsymbol{E}_{sup.\ cond.} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$

Capacità, condensatori

$C = \frac{Q}{V}$	$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2$		
$C_{piano} = \frac{A}{d}\varepsilon_0$	$C_{sfera} = 4\pi\varepsilon_0 R$	$C_{par} = \sum_{i=1}^{n} C_i$	$\frac{1}{C_{ser}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$

1.1 [**2 pt**] Domanda 1

Cosa si può dire del moto circolare uniforme di un punto materiale?

1) Il momento della quantità di moto e la velocità tangenziale rimangono costanti.
2) Il momento angolare e la velocità tangenziale rimangono costanti.
3) L'energia cinetica e la velocità tangenziale rimangono costanti.
4) L'energia cinetica e la velocità angolare rimangono costanti.
5) La velocità tangenziale e la velocità angolare rimangono costanti.

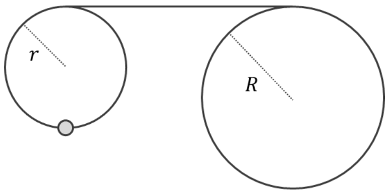
1.2 [**2 pt**] Domanda 2

Un pianeta orbita attorno ad una stella. La stella improvvisamente sparisce, e con essa la forza di gravità esercitata sul pianeta: cosa accade al moto ed al momento angolare del pianeta?

1) Il moto diventa rettilineo uniforme, il momento angolare rimane invariato.
2) Il moto diventa rettilineo uniforme, il momento angolare si annulla.
3) L'orbita rimane imperturbata, il momento angolare si annulla.
4) L'orbita rimane imperturbata, il momento angolare rimane invariato.
5) L'orbita cambia, il momento angolare rimane invariato.

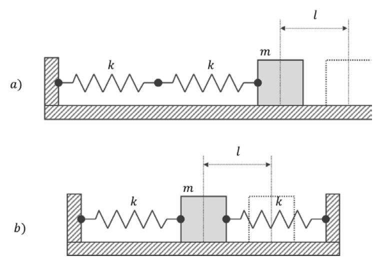
[**2 pt**] Domanda 3

Un carrello scorre senza attrito (vincolo liscio) su di un binario circolare di raggio r con velocità v_0. L'azionamento di uno scambio porta il carrellino su di un binario rettilineo tangente al primo, che si connette a sua volta ad un secondo percorso circolare, di raggio $R > r$. Come variano la velocità del carrello ed il suo momento angolare quando arriva a percorrere il binario circolare di diametro R?



1) La velocità ed il momento angolare rimangono invariati.
2) La velocità diminuisce, il momento angolare rimane invariato.
3) La velocità rimane invariata, il momento angolare varia.
4) La velocità ed il momento angolare diminuiscono entrambi.
5) La velocità rimane invariata, il momento angolare aumenta.

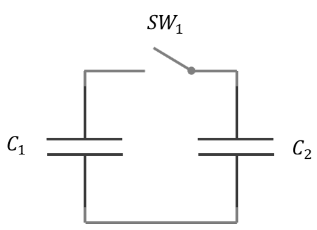
1.3 [2 **pt**] Domanda 4

Una massa m è appoggiata ad un piano senza attrito, e connessa a delle pareti fisse tramite 2 molle identiche, di costante elastica k, in due differenti configurazioni, come in figura. Se entrambi i sistemi partono da uno stato in cui la massa m è spostata dall'equilibrio di una stessa lunghezza l, cosa si può dire della loro frequenza di oscillazione?	
6) La frequenza di oscillazione è maggiore in a). 7) Entrambi i sistemi oscillano alla stessa frequenza. 8) Non si può rispondere alla domanda senza ulteriori dati. 9) La frequenza di oscillazione è maggiore in b). 10) Le frequenze di oscillazione sono differenti all'inizio, ma convergono rapidamente ad un valore comune.	

1.4 [2 **pt**] Domanda 5

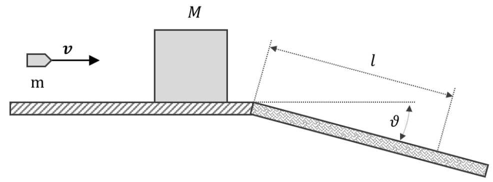
Si consideri un conduttore sferico omogeneo di raggio R e carica totale Q: cosa si può dire del campo e del potenziale elettrico?
1) Per $r > R$, il campo elettrico varia come $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, mentre il potenziale rimane costante. 2) Per $r > R$, il campo elettrico varia come $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, il potenziale è nullo. 3) Per $r < R$, il campo elettrico ed il potenziali sono entrambi costanti. 4) Per $r < R$, il campo elettrico varia come $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, e il potenziale egualmente nullo. 5) Per $r > R$, il campo elettrico è costante, il potenziale varia come $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

1.5 [2 **pt**] Domanda 6

Due condensatori C_1 e C_2 sono connessi come illustrato in figura, con un terminale cortocircuitato e l'altro connesso attraverso l'interruttore SW_1. All'inizio SW_1 è aperto, su C_1 è presente una carica di 5 nQ, mentre C_2 è scarico. Dopo che SW_1 viene chiuso, cosa avviene all'energia del sistema?	
1) L'energia totale diminuisce, la differenza di potenziale diminuisce. 2) L'energia totale diminuisce, la differenza di potenziale rimane costante. 3) L'energia totale si conserva, la differenza di potenziale rimane costante. 4) L'energia totale si conserva, la differenza di potenziale diminuisce. 5) L'energia totale si conserva, la capacità aumenta.	

1.6 [**6 pt**] Esercizio 1

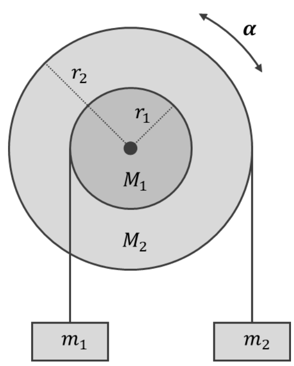
Una pallottola di massa $m = 100\ g$ colpisce un cubo di legno di massa $M = 5\ kg$ in quiete su di un piano liscio, rimanendovi incastrata. Al termine del piano liscio, inizia un tratto di piano scabro inclinato in maniera discendente di un angolo $\vartheta = 30°$, caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico $\mu_D = \sqrt{3}/2$.



Determinare:
[**1 pt**] la velocità del cubo in funzione della velocità iniziale v_0 della pallottola
[**3 pt**] la velocità iniziale della pallottola v_0 per cui il cubo si arresta sul piano inclinato dopo aver percorso una distanza $l = 1\ m$ sullo stesso.
[**2 pt**] l'angolo massimo ϑ per cui il problema ha soluzione.

1.7 [**6 pt**] Esercizio 2

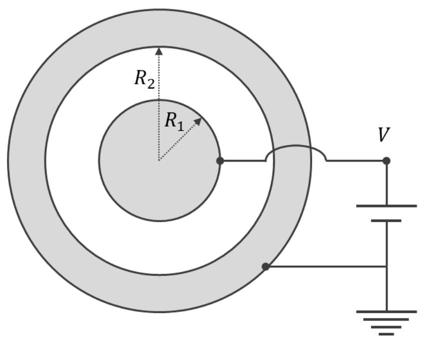
Una carrucola è costituita da due dischi omogenei coassiali e solidali di raggio $r_1 = 20\ cm$ e $r_2 = 30\ cm$, aventi rispettivamente massa $M_1 = 2\ kg$ e $M_2 = 5\ kg$, liberi di ruotare attorno all'asse principale di simmetria, parallelo al terreno. Due masse $m_1 = 4\ kg$ e $m_2 = 2kg$ sono connesse ai due dischi da funi ideali inestensibili prive di massa, come illustrato in figura.



Assumendo all'inizio il sistema si trovi in equilibrio, determinare:
[**1 pt**] la direzione di rotazione dei dischi
[**3 pt**] la sua accelerazione angolare
[**2 pt**] il massimo valore della reazione vincolare R esercitata dal perno che sostiene i dischi.

1.8 [**8 pt**] Esercizio 3

Due sfere metalliche concentriche come in figura di diametri $R_1 = 5\ cm$ e $R_2 = 18\ cm$ sono connesse ad un generatore che mantiene la sfera esterna a terra, e la sfera interna ad un potenziale $V = 95\ V$.



Determinare:
[**3 pt**] la carica Q_1 presente sulla superficie della sfera interna.
[**3 pt**] assumendo di poter variare R_1, per quale valore il campo elettrico alla superficie della sfera interna risulta minimo?
[**2 pt**] per il valore di R_1 che minimizza il campo, l'energia del sistema è minore o maggiore rispetto a quella che si ha con $R_1 = 5\ cm$?

Soluzioni

1.1 Domanda 1

La risposta corretta è "**L'energia cinetica e la velocità angolare rimangono costanti**.". La velocità tangenziale varia in direzione, e con essa il momento della quantità di moto. Rimangono invece costanti il vettore velocità angolare (e con esso il momento angolare) e l'energia cinetica.

1.2 Domanda 2

La risposta corretta è: "**Il moto diventa rettilineo uniforme, il momento angolare rimane invariato**". Venendo a mancare l'azione di qualsiasi forza, sia il momento della quantità di moto che quello angolare si conservano.

1.3 Domanda 3

La risposta corretta è "**La velocità rimane invariata, il momento angolare varia**". Assumendo di mantenere come polo di riferimento il centro della circonferenza di raggio r, il momento inizierà a variare nell'istante in cui il carrello raggiunge il binario di raggio R, in quanto la reazione normale esercitata dal binario (vincolo liscio) non sarà più equivalente ad una forza centrale. La velocità rimane invariata in quanto il vincolo è liscio.

1.4 Domanda 4

La risposta corretta è: "**La frequenza di oscillazione è maggiore in b)**": nel caso a) la pulsazione è pari a $\sqrt{k/m}$, mentre nel caso b) essa è pari a $\sqrt{2k/m}$, e quindi la frequenza risulta proporzionalmente maggiore.

1.5 Domanda 5

La risposta corretta è "**Per $\boldsymbol{r < R}$, il campo elettrico ed il potenziali sono entrambi costanti**". All'interno di un conduttore il campo elettrico è sempre nullo, ed il potenziale conseguentemente costante.

1.6 Domanda 6

La risposta corretta è "**L'energia totale diminuisce, la differenza di potenziale diminuisce**". La carica totale rimane invariata, ma la capacità totale aumenta (parallelo di condensatori), da cui $E' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1+C_2} < \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1}$, e l'energia quindi diminuisce. Per il potenziale vale la semplice relazione $Q = CV$, da cui anch'esso diminuisce.

1.7 Esercizio 1

L'urto tra la pallottola ed il cubo di legno è totalmente anelastico, quindi l'energia non si conserva, ma il momento si, in quanto non agiscono forze esterne al sistema pallottola-cubo lungo l'asse del moto. Se indichiamo con v_1 la velocità del cubo dopo l'urto, possiamo quindi scrivere:

$$p_0 = mv_0 = p_1 = (m + M)v_1 \rightarrow v_1 = m\frac{v_0}{m + M}$$

Il cubo (con la pallottola impiantata) scorre quindi indisturbato fino all'inizio del piano inclinato, dove inizia a scendere. Poniamo il valore del potenziale gravitazionale nullo quando il cubo ha percorso un tratto l sul piano inclinato; questo implica che all'inizio del piano inclinato potremo scrivere l'energia totale (cinetica + potenziale gravitazionale) come:

$$E_1 = \frac{1}{2}(M + m){v_1}^2 + (M + m)gl\sin\vartheta$$

Per come è stato definito il potenziale gravitazionale, una volta fermatosi il cubo avrà energia totale nulla, $E_2 = 0$. La differenza di energia sarà dovuta al lavoro della forza di attrito, che possiamo scrivere come:

$$L_a = l \cdot F_a = l\,\mu_D(M + m)g\cos\vartheta$$

Eguagliando la differenza delle energie col lavoro della forza di attrito dinamico si trova:

$$l\,\mu_D(M + m)g\cos\vartheta = \frac{1}{2}(M + m){v_1}^2 + (M + m)gl\sin\vartheta$$

Risolvendo rispetto a v_1 otteniamo:

$${v_1}^2 = 2lg(\mu_D\cos\vartheta - \sin\vartheta)$$

Notiamo che il termine ${v_1}^2$ è necessariamente positivo, mentre nella parentesi abbiamo una differenza: perché esista una soluzione, dovremo quindi prima verificare che il termine a destra dell'equazione sia positivo.

$$\mu_D\cos\vartheta - \sin\vartheta > 0 \rightarrow \mu_D\cos\vartheta > \sin\vartheta \rightarrow \mu_D > \tan\vartheta$$

Soluzioni valide esistono quindi se e solo se il coefficiente di attrito dinamico è maggiore della tangente dell'angolo di inclinazione del piano, ovvero se l'inclinazione del piano rispetto all'orizzontale è minore di $\vartheta \leq arctan(\mu_D) \cong 40.9°$. Nel caso richiesto di $\vartheta = 30°$ otteniamo:

$$m\frac{v_0}{m + M} = \sqrt{2lg(\mu_D\cos\vartheta - \sin\vartheta)} \rightarrow v_0 = \frac{m + M}{m}\sqrt{2lg(\mu_D\cos\vartheta - \sin\vartheta)}$$

Sostituendo numericamente i dati forniti dal problema si ha:

$$v_0 = \frac{0.1\,kg + 5\,kg}{0.1\,kg}\sqrt{2 \cdot 1\,m \cdot 9.8\,m\,s^{-2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)} \cong 51\sqrt{19.6\,m^2\,s^{-2}} \cong 112.9\,m\,s^{-1}$$

1.8 Esercizio 2

Considerando i soli momenti: rispetto all'asse di rotazione, agiscono due momenti, dovuti alla due masse, aventi direzione coincidente ma verso opposto. Il momento totale agente, assumendo che il verso positivo sia quello uscente dal foglio, risulta:

$$M_{tot} = \mathrm{g}\mathrm{m}_1\mathrm{r}_1 - \mathrm{g}\mathrm{m}_2\mathrm{r}_2 = \mathrm{g}(\mathrm{m}_1\mathrm{r}_1 - \mathrm{m}_2\mathrm{r}_2)$$

Si osserva che il sistema ha un'accelerazione angolare proporzionale al momento d'inerzia totale, che è dovuto ai due dischi e alle due masse sospese. La direzione di rotazione risulta antioraria, in quanto $\mathrm{m}_1\mathrm{r}_1 > \mathrm{m}_2\mathrm{r}_2$. Il momento d'inerzia dei due dischi si ottiene facilmente come somma dei due momenti d'inerzia:

$$I_{cilindri} = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}M_1{r_1}^2 + \frac{1}{2}M_2{r_2}^2$$

Riguardo le due masse sospese, il loro momento d'inerzia equivale alla massa per la distanza dall'asse di rotazione al quadrato, che rimane sempre costante a prescindere dalla posizione delle stesse ed è uguale al raggio della carrucola a cui sono connesse. Si può quindi scrivere:

$$I_{masse} = m_1{r_1}^2 + m_2{r_2}^2$$

L'accelerazione del sistema risulta infine dal rapporto tra momento torcente e momento d'inerzia:

$$\alpha = \frac{M_{tot}}{I_{tot}} = \mathrm{g}\frac{\mathrm{m}_1\mathrm{r}_1 - \mathrm{m}_2\mathrm{r}_2}{I_C + I_{masse}} = \frac{2g(\mathrm{m}_1\mathrm{r}_1 - \mathrm{m}_2\mathrm{r}_2)}{(M_1 + 2m_1){r_1}^2 + (M_2 + 2m_2){r_2}^2}$$

Allo stesso risultato si può arrivare ragionando sulle tensioni e considerando i dischi un sistema, e le due masse un altro. L'accelerazione delle masse sospese è la risultante dell'accelerazione gravitazionale g meno il valore della tensione della fune. Le accelerazioni lineari delle masse m_1 e m_2, a_1 e a_2 rispettivamente, sono dipendenti dall'accelerazione angolare α: $a_1 = \alpha r_1$, $a_2 = \alpha r_2$. Infine, l'accelerazione angolare della coppia di dischi dipenderà da momento risultate dalle due tensioni e dal momento d'inerzia dei soli dischi. Si può quindi comporre il sistema:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \mathrm{r}_1 = \dfrac{g\mathrm{m}_1 - T_1}{\mathrm{m}_1} \\ a_2 = \alpha \mathrm{r}_2 = \dfrac{T_2 - g\mathrm{m}_2}{\mathrm{m}_2} \\ \alpha\, I_{cilindri} = M = T_1\mathrm{r}_1 - T_2\mathrm{r}_2 \end{cases}$$

Risolvendo rispetto ad α si trova:

$$\begin{cases} T_1 = g\mathrm{m}_1 - \alpha\mathrm{r}_1\mathrm{m}_1 \\ T_2 = \alpha\mathrm{r}_2\mathrm{m}_2 - g\mathrm{m}_2 \\ \alpha\, I_{cilindri} = g\mathrm{m}_1\mathrm{r}_1 - \alpha{\mathrm{r}_1}^2\mathrm{m}_1 + \alpha{\mathrm{r}_2}^2\mathrm{m}_2 - g\mathrm{m}_2\mathrm{r}_2 \end{cases}$$

Risolvendo l'ultima equazione si ritrova il medesimo risultato:

$$\alpha = \frac{g(\mathrm{m}_1\mathrm{r}_1 - \mathrm{m}_2\mathrm{r}_2)}{I_{cilindri} + {\mathrm{r}_1}^2\mathrm{m}_1 + {\mathrm{r}_2}^2\mathrm{m}_2} = \frac{2g(\mathrm{m}_1\mathrm{r}_1 - \mathrm{m}_2\mathrm{r}_2)}{(M_1 + 2m_1){r_1}^2 + (M_2 + 2m_2){r_2}^2}$$

Inserendo i dati numerici del problema:

$$\alpha = \frac{2 \cdot 9.8\, m/s^2 \cdot (4\,\mathrm{kg} \cdot 0.2\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{kg} \cdot 0.3\,\mathrm{m})}{(2+8)\, kg \cdot 0.04\,\mathrm{m}^2 + (5+4) \cdot 0.09} \cong 3.24 \frac{rad}{s^2}$$

Riguardo la reazione vincolare del perno, essa deve eguagliare la forza peso dovuta alla massa dei due dischi, sommata alla tensione delle due funi; si ha dunque, in modulo:

$$R = (\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2)g + T_1 + T_2 = (\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2)g + \mathrm{m}_1(\mathrm{g} - \alpha \mathrm{r}_1) + \mathrm{m}_2(\mathrm{g} + \alpha \mathrm{r}_2)$$

Semplificando si ha:

$$R = (\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)g + \alpha(\mathrm{m}_2\mathrm{r}_2 - \mathrm{m}_1\mathrm{r}_1)$$

Si vede quindi che la reazione vincolare corrisponde al contributo “statico” delle masse quando l’accelerazione è nulla, ovvero per quanto visto prima quando $\mathrm{m}_1\mathrm{r}_1 = \mathrm{m}_2\mathrm{r}_2$. Inoltre, per l’espressione prima trovata di α, il segno di α è sempre discorde dal segno di $(\mathrm{m}_2\mathrm{r}_2 - \mathrm{m}_1\mathrm{r}_1)$, da cui la reazione vincolare massima R si ha quando il sistema è statico ($\alpha = 0$), e vale quindi $R_{\alpha=0} = (\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 + \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)g$.

1.9 Esercizio 3

Per il teorema di Gauss (immaginiamo una superficie immaginaria sferica interna al conduttore esterno), la carica Q_2 presente sulla superficie corrispondente ad R_2 dovrà necessariamente uguagliare in modulo quella presente sulla superficie della sfera interna. Il campo elettrico tra le due sfere vale:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\boldsymbol{u}_r, \qquad R_1 \leq r \leq R_2$$

Conseguentemente, la differenza di potenziale tra R_1 ed R_2 dovrà essere uguale a:

$$\Delta V = -\int_{R_1}^{R_2} \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{dr} = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right]$$

Da cui:

$$Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 \Delta V\left[\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right] = 4\pi\varepsilon_0 \cdot 95 \cdot \left[\frac{0.5 \cdot 0.18}{0.18 - 0.5}\right] \cong 3 \times 10^{-9} C \equiv 3\, nC$$

Per minimizzare il campo alla superficie della sfera interna, troviamo una sua espressione in funzione dei soli raggi e del potenziale V:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{{R_1}^2} = \frac{V}{R_1}\left[\frac{R_2}{R_2 - R_1}\right]$$

Ora, derivando l'espressione precedente rispetto ad R_1 si ha:

$$\frac{dE_1}{dR_1} = \Delta V R_2 \frac{d}{dR_1}\left[\frac{1}{R_1(R_2 - R_1)}\right] = 4\pi\varepsilon_0 \Delta V R_2\left[\frac{(R_2 - 2R_1)}{{R_1}^2(R_2 - R_1)^2}\right]$$

L'unico zero della derivata del campo elettrico si ha evidentemente per $R_1 = \frac{R_2}{2} = 9\ cm$. In questo caso il campo elettrico alla superficie della sfera interna vale:

$$E_1 = \frac{2V}{R_2}[2] = \frac{4V}{R_2} = \frac{4 \cdot 95}{0.18} \cong 2111\ \frac{V}{m}$$

Consideriamo la carica ${Q_1}'$che abbiamo nel caso $R_1 = \frac{R_2}{2}$:

$$Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 \Delta V\left[\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right] = 4\pi\varepsilon_0 \Delta V R_2 \cong 1.9 \times 10^{-9} C \equiv 1.9\, nC$$

Dato che l'energia immagazzinata è pari a $\frac{1}{2}QV$ ed il potenziale V è rimasto costante, l'energia immagazzinata per $R_1 = 9\ cm$ è minore che quella immagazzinata per $R_1 = 5\ cm$.