Ingegneria Meccanica – Fisica Generale 1 – **CANALE 2**

Prova del 9 Febbraio 2023 – Prof. Merano, Giubilato

Matricola: Cognome: Nome:

- <u>Non si consegnano i fogli di brutta</u>
- Fogli senza matricola, cognome e nome non saranno considerati validi
- Si può utilizzare il solo formulario e la calcolatrice non programmabile
- La presenza di qualsiasi altro testo, documento, foglio, strumento,… **invaliderà la prova**
- Le risposte alle DOMANDE sono considerate valide se viene indicata la risposta esatta, **<u>e la scelta è correttamente giustificata nello spazio libero sottostante alla domanda stessa</u>**.
- Le <u>DOMANDE</u> con **risposta corretta** valgono **2 punti**, le domande **senza risposta 0 punti**, le domande **errate** incorrono in una penalizzazione di **-0.5 punti**.
- Gli <u>ESERCIZI</u> vanno svolti con ordine, e **i risultati giustificati analiticamente**. Risultati numericamente o algebricamente corretti, ma mancanti dei passaggi necessari a giustificarli, non verranno considerati validi.

Formulario

Costanti

$g_0 \cong 9.81\ \frac{m}{s^2}$	$G \cong 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}$		
$M_\oplus \cong 5.972 \times 10^{24}\ kg$	$R_\oplus \cong 6.4 \times 10^{6}\ m$	$M_\odot \cong 1.989 \times 10^{30}\ kg$	
$\rho_{H_2O} \cong 1 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$	$\rho_{air} \cong 1.25 \frac{kg}{m^3}$	$\mu_{H_2O} \cong 0.864 \times 10^{-3} Pa\ s$	
$c \cong 3 \times 10^8\ \frac{m}{s}$	$q_0 \cong 1.6 \times 10^{-19}\ C$	$\varepsilon_0 \cong 8.854 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$	$\mu_0 \cong 1.256 \times 10^{-6} \frac{H}{m}$

Cinematica, dinamica, lavoro ed energia del punto materiale

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$	$\mathbf{a}_C = -\omega^2 \mathrm{r}\, \boldsymbol{u}_r = -\frac{v^2}{r}\boldsymbol{u}_r$	
$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} + \frac{dm}{dt}$	$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{x}$
$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}, \quad \frac{dW}{dt} = P$	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_g = mgh$	$E_e = \frac{1}{2}kx^2$

Gravitazione

$\boldsymbol{F} = G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$U = G\frac{Mm}{r}$		

Momenti

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$	

Moti armonici

$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$	$T_{molla} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$T_{pendolo} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	

Dinamica, lavoro ed energia del corpo rigido

$\boldsymbol{r}_{cm} = \sum \boldsymbol{r}_i m_i / \sum m_i$	$I = \sum r_i^2 m_i$		
$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\alpha}$		$I = \acute{I} + mr^2$
$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM}$	$E_{kr} = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$	$E_k = \frac{1}{2}m{v_{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$	
$I_{asta} = \frac{1}{12}ml^2$	$I_{anello} = mr^2$	$I_{cilindro} = \frac{1}{2}mr^2$	$I_{sfera} = \frac{2}{5}ml^2$

Meccanica e dinamica dei fluidi incomprimibili

$F_A = \rho V g$	$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = k$	$Av = cost$	
$Re = \frac{\rho}{\mu}Lv_r = \frac{L}{\nu}v_r$	$F_{lmn} = 6\pi r\mu v$		

Elettrostatica

$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q_1}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$\boldsymbol{E}_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$V_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$	

Campi

$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{E} = -\nabla V$	$V = \int -\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dr} + k$	
$\phi_\Sigma(\boldsymbol{E}) = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_0}$	$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$C_\Gamma(\boldsymbol{E}) = \iint_\Sigma (\nabla \times \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{d\Sigma}$	$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$
$\boldsymbol{E}_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{u}_r$	$\boldsymbol{E}_{anello} = \frac{\lambda R y}{2\varepsilon_0(R^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{u}_n$	$\boldsymbol{E}_{piano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$	$\boldsymbol{E}_{sup.\ cond.} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$

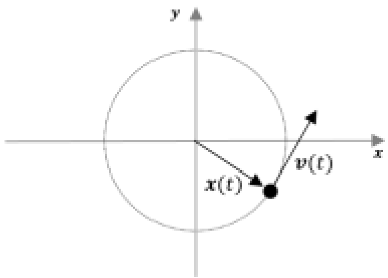
Capacità, condensatori

$C = \frac{Q}{V}$	$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$		
$C_{piano} = \frac{A}{d}\varepsilon_0$	$C_{sfera} = 4\pi\varepsilon_0 R$	$C_{par} = \sum_{i=1}^{n} C_i$	$\frac{1}{C_{ser}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$

1 [2.5 **pt**] Domanda 1

Se un punto sta compiendo un moto circolare uniforme, quale delle seguenti affermazioni è vera:

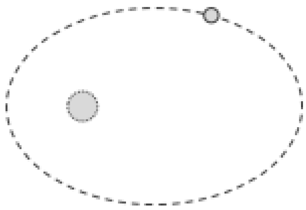
1) L'energia cinetica e la quantità di moto sono costanti.
2) Il momento angolare e l'energia cinetica sono costanti.
3) Il momento angolare e la quantità di moto sono costanti.
4) L'energia cinetica e la velocità tangenziale sono costanti.
5) La velocità tangenziale e la velocità angolare sono costanti.



2 [2.5 **pt**] Domanda 2

Un pianeta orbita attorno ad una stella. La stella improvvisamente sparisce, e con essa la forza di gravità esercitata sul pianeta: cosa accade al moto ed al momento angolare del pianeta?

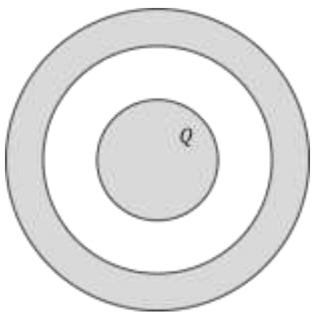
1) Il moto diventa rettilineo uniforme, il momento angolare rimane invariato.
2) Il moto diventa rettilineo uniforme, il momento angolare si annulla.
3) L'orbita rimane imperturbata, il momento angolare si annulla.
4) L'orbita rimane imperturbata, il momento angolare rimane invariato.
5) L'orbita cambia, il momento angolare rimane invariato.



3 [2.5 **pt**] Domanda 3

Quale delle seguenti affermazioni è corretta in merito al sistema illustrato in figura, dove una sfera conduttrice ideale cava (schermo) contiene un'altra sfera conduttrice solida, da essa isolata e avente carica positiva Q.

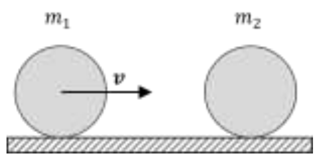
1) La carica sulla superficie interna della schermo è nulla.
2) Il campo elettrico all'interno dello schermo elettrostatico è nullo.
3) La carica sulla superficie esterna dello schermo è nulla.
4) La sfera interna ha un campo elettrico costante al suo interno.
5) Il campo elettrico all'esterno dello schermo ha simmetria sferica.



4 [2.5 **pt**] Domanda 4

Una sfera di massa m_1 viaggia con velocità v uniforme su di un piano liscio senza attrito, finché collide con un'altra sfera in quiete, di massa m_2. Assumendo un urto perfettamente elastico, quali condizioni sono necessarie affinché la sfera di massa m_1 non inverta la direzione del moto?

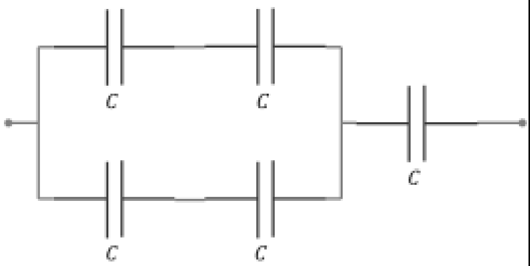
1) v deve essere maggiore di una determinata velocità v_T.
2) m_1, deve essere maggiore di m_2, e v maggiore di una soglia v_T.
3) m_1 deve essere maggiore di m_2, a prescindere da v.
4) m_2 deve essere maggiore di m_1, e v essere maggiore di una soglia v_T.
5) E' una condizione che non si può mai verificare.



5 [2.5 **pt**] Domanda 5

Il sistema in figura è composto da 5 condensatori identici, ognuno avente capacità C, connessi come illustrato. Qual è la capacità totale del sistema?

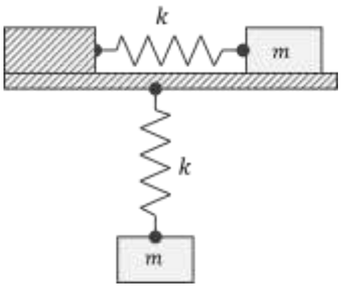
1) $1/5\,C$
2) $1/2\,C$
3) C
4) $2\,C$
5) $5\,C$



6 [2.5 **pt**] Domanda 6

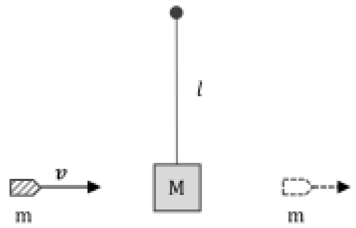
Due masse m, identiche, sono connesse and un supporto rigido statico attraverso due molle, anch'esse identiche, di costante elastica k. L'unica differenza è che una massa scorre su di un piano liscio senza attrito, mentre l'altra è sospesa verticalmente (vedi figura). I due sistemi sono messi in oscillazione allungando inizialmente le molle di una identica lunghezza l rispetto alle rispettive posizioni di equilibrio: cosa si può dire delle frequenze di oscillazione? La gravità è presente, non vi sono attriti, le molle sono ideali.

1) Il sistema "orizzontale" ha frequenza maggiore di quello "verticale"
2) Il sistema "verticale" ha frequenza maggiore di quello "orizzontale"
3) Le frequenze di oscillazione di entrambi i sistemi sono identiche.
4) Le frequenze di oscillazione sono identiche all'inizio, poi quella del sistema "verticale" diminuisce, mentre quella del sistema "orizzontale" rimane costante.
5) Le frequenze di oscillazione sono differenti all'inizio, ma convergono rapidamente ad un valore comune.



1 [**7 pt**] Esercizio 1

Un proiettile di massa $m = 100\ g$ viene lanciato contro un blocchetto ligneo di massa $M = 1\ kg$ appeso verticalmente ad un filo di lunghezza $l = 30\ cm$, come illustrato in figura. Il proiettile attraversa il blocchetto e ne esce con velocità dimezzata (urto anelastico).



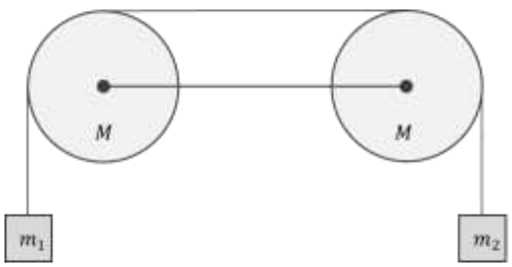
Determinare:

[**3 pt**] l'energia dissipata in calore durante l'urto, assumendo una velocità v iniziale pari a $3\ m/s$.

[**4 pt**] la velocità minima iniziale v del proiettile affinché il blocchetto completi una traiettoria circolare attorno al centro di sospensione.

2 [**7 pt**] Esercizio 2

Due cilindri identici di massa $M = 10\ kg$ e raggio $r = 10\ cm$ sono liberi di ruotare attorno al loro asse di simmetria, e collegati da un'asta rigida come in figura. L'asta è fissata al soffitto tramite due cavi non rappresentati in figura. Due masse $m_1 = 2\ kg$ e $m_2 = 4\ kg$ sono collegate da un filo inestensibile e di massa trascurabile, che scorre sulla superficie dei cilindri senza scivolare. All'inizio le due masse sono trattenute, poi vengono liberate.



Determinare:

[**1 pt**] Direzione e verso della forza che il filo esercita su m_2. Scrivere l'equazione di moto per m_2.

[**1 pt**] Direzione e verso della forza che il filo esercita su m_1. Scrivere l'equazione di moto per m_1.

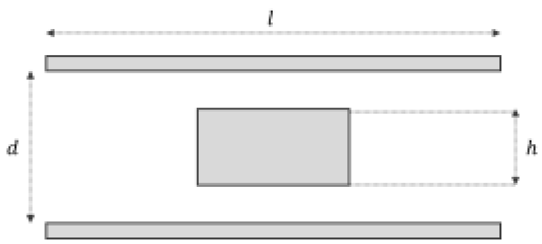
[**1 pt**] La relazione fra l'accelerazione di m_2 e quella di m_1.

[**1 pt**] La relazione fra l'accelerazione di m_2 e l'accelerazione angolare di cilindri

[**3 pt**] Si trovi l'accelerazione di m_2 e la forza di compressione che deve sopportare l'asta (reazione vincolare) col sistema in moto.

3 [**7 pt**] Esercizio 3

Un condensatore è formato da due armature piano parallele identiche, di lunghezza $l = 12\ cm$ e profondità incognita, separate da una distanza $d = 1\ mm$. Il capacitore è connesso ad un generatore di tensione $V = 225\ V$, e all'inizio ha immagazzinata un'energia pari a $E_0 = 4.5\ nJ$. Viene poi inserito tra le armature un parallelepipedo conduttore di lunghezza $l/3$ e altezza $h = d/2$, come in figura, di modo che si trovi sempre a eguale distanza dalle armature.



Determinare:

[**2 pt**] l'area A di un'armatura, e la capacità iniziale del condensatore.

[**3 pt**] la capacità finale del condensatore, dopo che vi è stato inserito il parallelepipedo.

[**2 pt**] la variazione di energia immagazzinata nel condensatore

(suggerimento: fintanto che il parallelepipedo è interamente contenuto all'interno delle armature, è rilevante la posizione orizzontale in cui si trova?).

Soluzioni

1 Domanda 1

La risposta corretta è "**Il momento angolare e l'energia cinetica sono costanti**". L'energia cinetica è uno scalare che dipende da v^2 ed m, ed essendo $v^2 = cost$ certamente si conserva. Il momento angolare è un vettore, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$, e in questo caso ha modulo, direzione e verso costanti, e quindi si conserva. La quantità di moto $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, invece, non si conserva, in quanto il vettore velocità ha si modulo costante, $|v| = cost$, ma non la direzione, e quindi $\boldsymbol{v}$ non è costante.

2 Domanda 2

La risposta corretta è "**Il moto diventa rettilineo uniforme, il momento angolare rimane invariato**": mancando qualsiasi forza dopo la scomparsa della stella, la conservazione della quantità di moto p impone che la traiettoria sia una retta (moto rettilineo uniforme). Mancando altresì momenti agenti sul sistema, il momento angolare si parimenti conserva: la costanza di p e della distanza della traiettoria del pianeta rispetto alla posizione originaria della stella illustra graficamente la conservazione di L.

3 Domanda 3

La risposta corretta è **"Il campo elettrico all'esterno dello schermo ha simmetria sferica"**. Per il th. di Gauss all'esterno della sfera cava deve esserci un campo elettrico a simmetria sferica, generato dalla carica Q. Sulla superficie esterna della sfera cava avremo una carica $-Q$ (induzione), e sulla sua superficie esterna una carica Q.

4 Domanda 4

La risposta corretta è "$\boldsymbol{m_1}$ **deve essere maggiore di** $\boldsymbol{m_2}$**, a prescindere da** $\boldsymbol{v}$". In un urto perfettamente elastico si conservano energia e quantità di moto, da cui $v_1 = v - \frac{m_2}{m_1} v_2$ e, contemporaneamente, $v_1 = \sqrt{v^2 - \frac{m_2}{m_1} {v_2}^2}$. Eguagliando si ha $v_1 = -\frac{{v_2}^2}{2v}\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)$, da cui segue immediatamente $v_1 > 0 \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} < 1$.

5 Domanda 5

La risposta corretta è "$\boldsymbol{\frac{1}{2} C}$". Ognuno dei due rami paralleli è costituito da una serie di due condensatori identici C, ed ha quindi capacità equivalente $\frac{C}{2}$. Il parallelo dei due rami ha quindi capacità $2 \times \frac{C}{2} = C$. L'ultimo condensatore è posto in serie al parallelo dei due rami, che abbiamo visto avere capacità equivalente C, e lacapacità totale sarà quindi (serie di due capacità identiche) $\frac{C}{2}$.

6 Domanda 6

La risposta corretta è "**Entrambi i sistemi oscillano con la medesima frequenza**": la frequenza di oscillazione è data dal solo parametro $\sqrt{k/m}$, ed è quindi identica per i due sistemi. La differenza sta nel punto di equilibrio, che nel sistema "verticale" risulterà differente da quello "orizzontale", ma ciò non ha influenza sulla frequenza. Non essendoci forze dissipative in gioco, entrambe le oscillazioni continueranno inalterate nel tempo.

7 Esercizio 1

Punto 1)

Il proiettile trasmette parte della sua energia nel trapassare il blocchetto di legno (urto parzialmente anelastico), ma non possiamo sapere esattamente quanta. Certamente però si deve conservare la quantità di moto del sistema, in quanto l'unica forza agente è la gravità, ortogonale al moto stesso. Chiamiamo v_{p0}la velocità del proiettile prima dell'urto, v_{p1} la velocità del proiettile dopo l'urto e v_{b1}la velocità del blocchetto immediatamente dopo l'urto. Questo ci permette di calcolare facilmente la velocità del blocco immediatamente dopo l'urto:

$$P = mv_{p0} = mv_{p1} + Mv_{b1} = m\frac{v_{p0}}{2} + Mv_{b1} \rightarrow v_{b1} = \frac{1}{2}\frac{m}{M}v_{p0} \rightarrow v_{b1} = 0.15\ m/s$$

In merito all'energia dissipata, all'inizio tutta l'energia del sistema E_0 equivale all'energia cinetica del proiettile, mentre appena dopo l'urto (prima che il blocchetto inizi a sollevarsi) essa si ripartisce in energia cinetica del proiettile E_p e del cubetto E_b. Sappiamo che la velocità del proiettile in uscita è dimezzata, da cui la sua energia cinetica sarà ¼ di quella iniziale:

$$E_p = \frac{1}{2}\mathrm{m}{v_{p1}}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{m}\left(\frac{v_{p0}}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\mathrm{m}{v_{p0}}^2 \equiv \frac{1}{4}E_0$$

Sfruttando la prima relazione ricavata in seguito alla conservazione della quantità di moto possiamo scrivere l'energia cinetica del cubetto subito dopo l'urto:

$$E_b = \frac{1}{2}\mathrm{M}{v_{b1}}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}\frac{m}{M}v_{p0}\right)^2 = \frac{1}{2}\mathrm{M}\frac{1}{4}\frac{m^2}{M^2}{v_{p0}}^2 = \frac{1}{8}\frac{m^2}{M}{v_{p0}}^2$$

La differenza di energia risulta quindi essere:

$$E_0 - (E_p + E_b) = \frac{1}{2}\mathrm{m}{v_{p0}}^2 - \frac{1}{8}\mathrm{m}{v_{p0}}^2 - \frac{1}{8}\frac{m^2}{M}{v_{p0}}^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\frac{m}{M}\right)m{v_{p0}}^2 = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{m}{M}\right)\frac{m}{2}{v_{p0}}^2$$

La differenza di energia (equivalente all'energia dissipata) risulta quindi essere:

$$E_0 - (E_p + E_b) = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{m}{M}\right)E_0 \cong 0.37\ [J]$$

Punto 2)

Il proiettile trasmette parte della sua energia nel trapassare il blocchetto di legno (urto parzialmente anelastico), ma non possiamo sapere esattamente quanta. Certamente però si deve conservare la quantità di moto del sistema, in quanto l'unica forza agente è la gravità, ortogonale al moto stesso. Chiamiamo v_{p0}la velocità del proiettile prima dell'urto, v_{p1} la velocità del proiettile dopo l'urto e v_{b1}la velocità del blocchetto immediatamente dopo l'urto. Questo ci permette di calcolare facilmente la velocità iniziale del blocco immediatamente dopo l'urto:

$$P = mv_{p0} = mv_{p1} + Mv_{b1} = m\frac{v_{p0}}{2} + Mv_{b1} \rightarrow v_{b1} = \frac{1}{2}\frac{m}{M}v_{p0}$$

Immediatamente dopo l'urto, l'energia meccanica del sistema si conserva (agiscono solo forze conservative su di esso). All'apice della traiettoria il blocchetto avrà un'energia totale $E_2 = E_{K2} + E_{g2}$ data dall'energia cinetica più l'energia potenziale gravitazionale, che dovrà eguagliare l'energia E_{K1} posseduta immediatamente dopo l'urto:

$$E_{K2} + E_{g2} = \frac{1}{2} M {v_{b2}}^2 + 2Mlg = \frac{1}{2} M {v_{b1}}^2$$

Ricaviamo quindi la velocità del blocchetto all'apice della traiettoria:

$${v_{b2}}^2 = {v_{b1}}^2 - 4lg = \frac{1}{4} \frac{m^2}{M^2} {v_{p0}}^2 - 4lg$$

Ora, se vogliamo che la traiettoria seguita sia quella di un moto circolare, nel punto di massima elevazione il blocchetto dovrà avere un'accelerazione centripeta pari a ${v^2}/{l}$. La forza peso è sempre presente, e nel culmine della traiettoria si somma parallelamente alla tensione del filo, da cui:

$$\frac{T + Mg}{M} = \frac{{v_{b2}}^2}{l} = \frac{1}{4l} \frac{m^2}{M^2} {v_{p0}}^2 - 4g$$

Per un filo ideale la tensione può essere arbitrariamente grande, ma non minore di zero, da cui il caso limite cercato corrisponde alla situazione in cui la forza di gravità è sufficiente a garantire la necessaria accelerazione, ovvero per $T = 0$:

$$g = \frac{1}{4l} \frac{m^2}{M^2} {v_{p0}}^2 - 4g \rightarrow v_{p0} = \sqrt{5g \frac{4lM^2}{m^2}} = \frac{2M}{m} \sqrt{5gl}$$

Notiamo subito che dimensionalmente il risultato ha senso fisico, in quanto il termine gl sotto radice ha dimensione $[m^2/s^2]$, e la restante frazione ha dimensione nulla (rapporto tra masse). Inoltre, si vede bene che sia un proiettile di massa trascurabile che un blocchetto di massa infinita richiedono una velocità iniziale del proiettile anch'essa infinita. Risolvendo numericamente troviamo:

$$v = \frac{2 \cdot 1}{0.1} \sqrt{5 \cdot 9.81 \cdot 0.3} \cong 76.7 \left[\frac{m}{s}\right]$$

8 Esercizio 2

I rulli hanno massa non nulla, dunque la tensione sarà differente nei tre rami liberi del filo. Chiamiamo T_1 la tensione del ramo che sostiene m_1, T_2 la tensione del ramo che sostiene m_2 e T_3 la tensione del tratto di filo tra i due rulli. Se ora scriviamo l'accelerazione per le due masse abbiamo:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T_1 - m_1 g \\ m_2 a_2 = T_2 - m_2 g \end{cases}$$

Sul primo disco viene esercitata una forza pari alla differenza di T_1e T_3, e conseguentemente un momento uguale a questa differenza per il braccio, che equivale al raggio r. Questo momento indurrà un'accelerazione angolare α_1 proporzionale al momento d'inerzia del disco:

$$T_3 r - T_1 r = I\alpha_1 = \frac{1}{2} M r^2 \alpha_1 \rightarrow T_3 - T_1 = \frac{1}{2} M r \alpha_1$$

Lo stesso ragionamento si può applicare al secondo cilindro:

$$T_2 r - T_3 r = I\alpha_2 = \frac{1}{2}Mr^2\alpha_2 \rightarrow T_2 - T_3 = \frac{1}{2}Mr\alpha_2$$

Ora, nell'ipotesi che il filo sia in tensione, tutte le sue parti si devono muovere alla stessa velocità, e conseguentemente con identica accelerazione a. Ordiniamo tutte le forze in gioco rispeto alla direzione dell'accelerazione in ogni ramo del sistema, di modo che a sia sempre positiva:

$$a = a_1 = a_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{a}{r}$$

Possiamo dunque riscrivere le equazioni del moto per le due masse sospese come (attenzione, ora le tensioni e la forza di gravità hanno il segno orientato rispetto al verso dell'accelerazione a):

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T_1 = m_1 g + m_1 a \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \end{cases}$$

Ed egualmente per i cilindri (sempre prestando attenzione ad orientare correttamente le forze):

$$\begin{cases} T_3 - T_1 = \frac{1}{2}Ma \\ T_2 - T_3 = \frac{1}{2}Ma \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni per le masse, e sommando membro a membro le due equazioni per i cilindri, otteniamo infine:

$$\begin{cases} T_1 - T_2 = g(m_1 - m_2) + a(m_1 + m_2) \\ T_2 - T_1 = Ma \end{cases}$$

Risolvendo in a si ottiene quindi:

$$a = g\frac{(m_2 - m_1)}{M + m_1 + m_2}$$

Numericamente si trova che:

$$a = g\frac{(4-2)}{10+2+4} = \frac{1}{8}g \cong 1.2 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Si nota che nel caso di $m_1 = m_2$ il sistema rimane in equilibrio, mentre per $M = 0$ si ha di nuovo il caso in cui l'accelerazione è pari alla differenza delle masse sulla loro somma per l'accelerazione di gravità. Riguardo la forza sperimentata dalla barra congiungente i cilindri, essa sarà pari alla tensione orizzontale esercitata sui cilindri dal filo, ovvero T_3. Risolvendo per sottrazione rispetto a T_3 il sistema delle tensioni:

$$\begin{cases} T_3 - T_1 = \frac{1}{2}Ma \\ T_2 - T_3 = \frac{1}{2}Ma \end{cases} \rightarrow 2T_3 = T_1 + T_2$$

Si ottiene quindi:

$$F = T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{g}{2}(m_1 + m_2) + \frac{a}{2}(m_1 - m_2) = \frac{g}{2}(6) - \frac{g}{16}(2) =$$

$$= \frac{6}{2}g - \frac{2}{16}g = \frac{48 - 2}{16}g \cong 28.2\ [N]$$

9 Esercizio 3

La capacità del condensatore piano è $C = \frac{A}{d}\varepsilon_0$, e possiamo quindi scrivere l'energia in funzione dell'area delle armature A:

$$E_0 = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{A}{d}\varepsilon_0 V^2 \rightarrow A = \frac{2\,E_0\,d}{\varepsilon_0 V^2}$$

Sostituendo numericamente:

$$A = \frac{2\ \cdot 4.5 \times 10^{-9}\,J \cdot\ 1 \times 10^{-3} m}{8.85 \times 10^{-12}\,Fm^{-1} \cdot 225^2\,V^2} \cong \frac{9 \times 10^{-12}}{4.5 \times 7} = 2 \times 10^{-5} m^2 = 20\ mm^2$$

L'area di un'armatura risulta quindi essere circa 20 mm^2. Possiamo ricavare la capacità del condensatore:

$$C_0 = \frac{A}{d}\varepsilon_0 = t = \frac{2 \times 10^{-5}\,m^2}{1 \times 10^{-3}\,m} 8.85 \times 10^{-12}\frac{F}{m} \cong 1.77 \times 10^{-13}\,F \cong 0.18\,pF$$

Inserendo il conduttore, nell'approssimazione di un condensatore ideale, otteniamo due condensatori in parallelo, chiamiamoli a, e b, di cui a è identico all'originale, solo avente area pari a 2/3, mentre b ha una capacità da calcolare. La capacità di a sarà semplicemente:

$$C_a = \frac{2}{3}\frac{A}{d}\varepsilon_0$$

La capacità del condensatore b risulterà invece dalla serie di due capacitori aventi area delle armature pari a $A/3$, e distanza tra le stesse pari a $d/4$. Chiamiamo C_i la capacità di uno di questi due condensatori in serie:

$$C_i = \frac{A}{3}\frac{4}{d}\varepsilon_0$$

La capacità del condensatore C_b sarà dunque (serie di due capacitori identici):

$$C_b = \frac{C_i}{2} = \frac{2}{3}\frac{A}{d}\varepsilon_0$$

La capacità totale C_1 è data dal parallelo di C_a e C_b, e quindi:

$$C_1 = C_a + C_b = \frac{2}{3}\frac{A}{d}\varepsilon_0 + \frac{2}{3}\frac{A}{d}\varepsilon_0 = \frac{4}{3}\frac{A}{d}\varepsilon_0 = \frac{4}{3}C_0$$

Numericamente si ottiene:

$$C_1 = \frac{4}{3}C_0 \cong \frac{4}{3} \cdot 0.18\, pF \cong 0.24\, pF \equiv 2.4 \times 10^{-13} F$$

La differenza di energia tra le due configurazioni risulta (la carica rimane invariata)

$$\Delta U = \frac{1}{2}V^2(C_1 - C_0) \approx \frac{1}{2}225^2 \cdot (2.36 - 1.77) \times 10^{-13} \cong 1.5 \times 10^{-9} J \equiv 1.5\, nJ$$