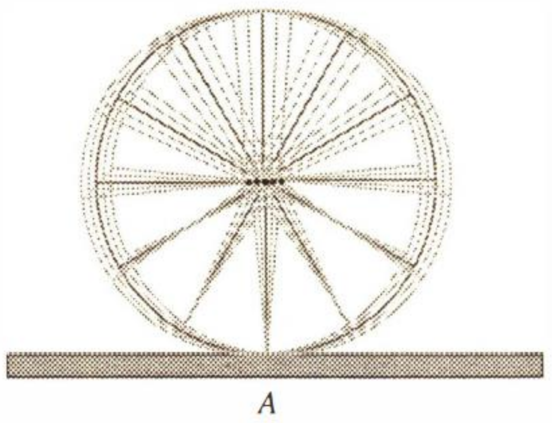
Moto di rotolamento

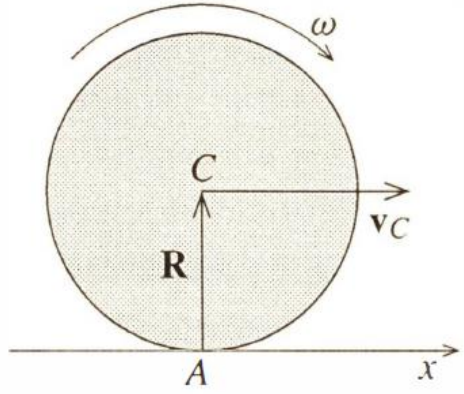
La ruota di una bicicletta o di un'automobile che si muovono sulla strada normalmente rotolano senza scivolare. Se l'attrito tra ruota e strada diminuisce a causa della presenza di pioggia o neve si può avere invece scivolamento, che per la stabilità del veicolo, dev'essere evitato. La ruota ha forma di disco ed è imperniata su di un asse ad essa normale per il suo centro. Si tratta di un asse centrale d'inerzia.

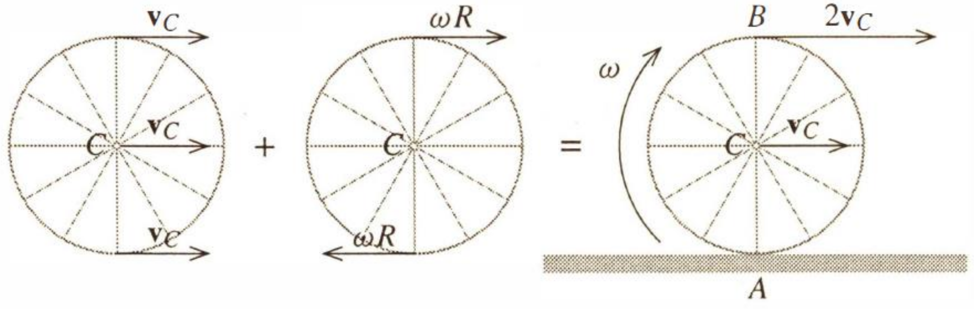
Supponiamo per concretezza si tratti di una bicicletta. Se alziamo una ruota della bicicletta, anche di poco rispetto al terreno, e la mettiamo in rotazione, la ruota gira attorno all'asse. Se appoggiamo la bicicletta al terreno, ci saliamo e cominciamo a pedalare, il moto della ruota (di entrambe) è la somma di una traslazione, con la velocità del centro, e di una rotazione.

Se si tratta di puro rotolamento ci dev'essere una relazione ben definita tra velocità del baricentro della ruota e velocità angolare. Prima di vedere questa relazione conviene considerare il moto da un altro punto di vista: in ogni istante un punto della ruota, quello di contatto con il terreno, è fermo. Questa è in effetti la condizione di non scivolamento (o di rotolamento puro). Il moto della ruota è quindi una pura rotazione attorno ad un asse orizzontale variabile nel tempo, l'asse perpendicolare alla ruota nel punto di contatto, meglio, se si considera la ruota come un cilindro, la generatrice del cilindro a contatto col terreno.

La figura 8.15.1 rappresenta la ruota in un certo istante in colore pieno e in quattro istanti immediatamente vicini, due prima e due dopo, in colore pallido. Come si vede l'estremo del raggio vicino al terreno sta fermo, tutti gli altri punti si muovono, tanto più quanto più sono lontani dal punto di contatto.



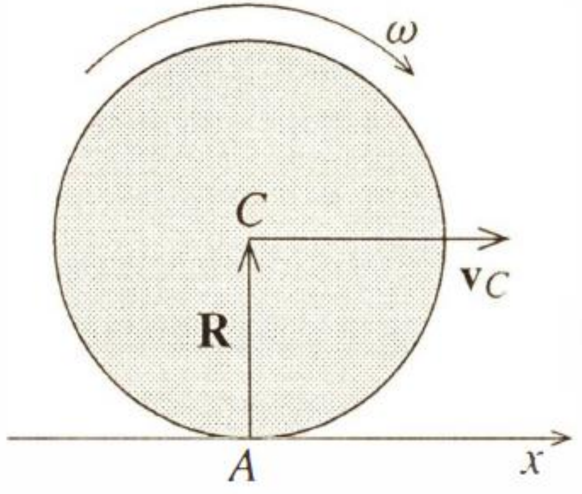




Moto di rotolamento

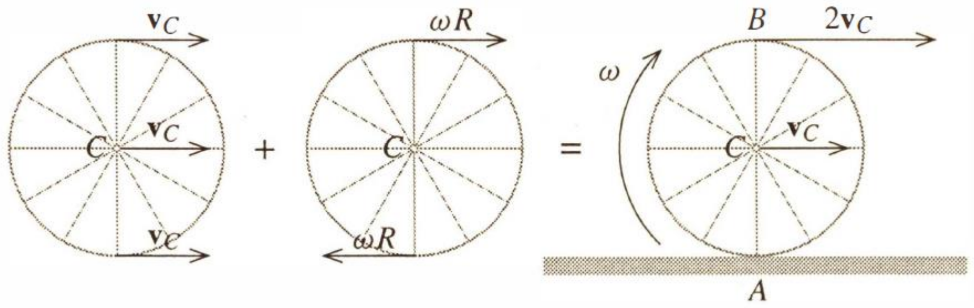
Relazione cinematica

$$\omega R = v_C \qquad - \mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_C$$



Energia cinetica

teorema di Steiner $I_A = mR^2 + I_C$ $\Rightarrow$ $U_k = \frac{1}{2}(mR^2 + I_C)\omega^2$



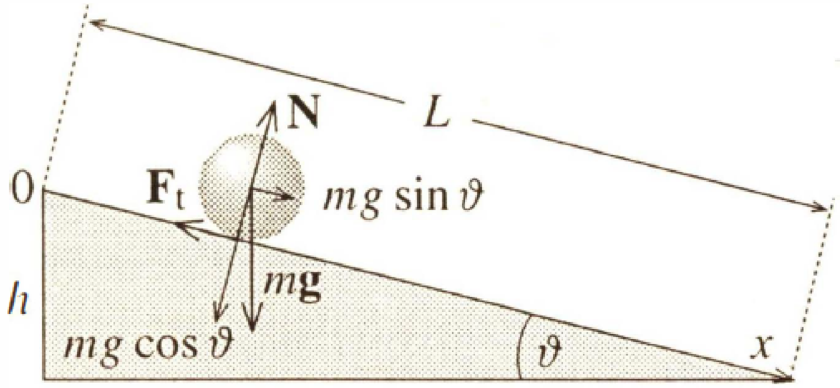
Teorema di König dell'energia cinetica.

L'energia cinetica del sistema nel riferimento inerziale è somma di due termini: uno è l'energia cinetica del baricentro pensato come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema, l'altro è l'energia cinetica nel sistema del baricentro, relativa quindi al moto delle parti del sistema rispetto al baricentro.

$$U_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

Moto di rotolamento su un piano inclinato

Come esempio importante di moto di rotolamento consideriamo quello di un corpo su di un piano inclinato. La figura 8.16.1 rappresenta un piano inclinato che forma l'angolo ϑ con l'orizzontale. Il corpo che rotola può essere una sfera o un cilindro di raggio R. Su di esso agisce la forza peso $m\mathbf{g}$, applicata nel baricentro C, e, nel punto d'appoggio A, la reazione vincolare. Quest'ultima si può pensare scomposta nella componente normale $\mathbf{N}$ e in quella tangente $\mathbf{F}_t$; questa non può superare in modulo il valore $\mu_S N$, dove μ_S è il coefficiente di attrito statico. Se la forza tangente necessaria è maggiore di questo valore, il moto di puro rotolamento è impossibile e il punto d'appoggio scivola. Supponiamo che le condizioni per il puro rotolamento siano soddisfatte.

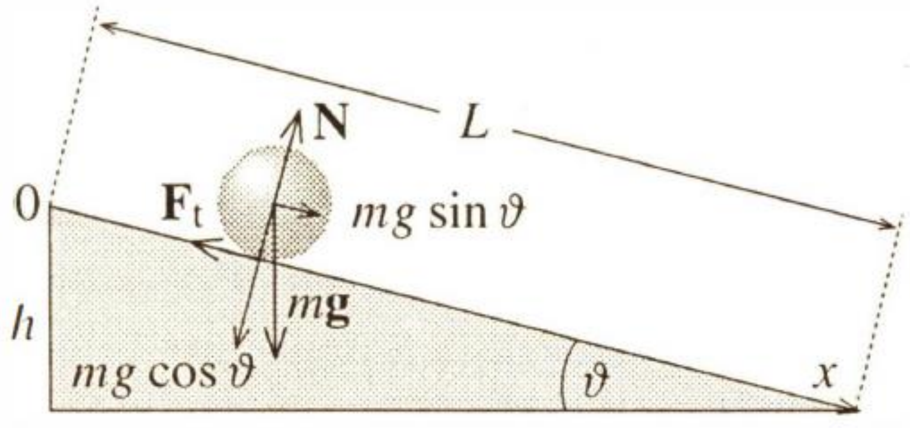


Risolveremo il problema con tre procedimenti diversi.

Moto di rotolamento su un piano inclinato

Procedimento 1. Utilizziamo l'equazione dei momenti rispetto all'asse istantaneo di rotazione. In assenza di scivolamento è l'asse che passa per il punto di contatto A. Se I_A è il momento d'inerzia rispetto a quest'asse e M_A il momento risultante delle forze esterne rispetto al medesimo asse, abbiamo

$$M_A = I_A \frac{d\omega}{dt} . \tag{8.16.1}$$



Il momento delle forze esterne è uguale a quello della forza peso, dato che la reazione vincolare è applicata in A e quindi ha momento nullo. Abbiamo quindi

$$mgR \sin\vartheta = I_A \frac{d\omega}{dt} .$$

Indichiamo con v_C la velocità del baricentro C del corpo; dato che il moto è un rotolamento puro, $v_C = \omega R$. L'accelerazione a_C del baricentro è quindi $a_C = R\, d\omega/dt$ e si può ricavare dall'ultima relazione trovata, ottenendo

$$a_C = \frac{mgR^2 \sin\vartheta}{I_A} \tag{8.16.2}$$

ma, per il teorema di Steiner $I_A = I_C + mR^2$, dove I_C è il momento d'inerzia rispetto all'asse orizzontale per C, cioè l'asse di figura del corpo. Di conseguenza

$$a_C = \frac{g \sin\vartheta}{1 + \dfrac{I_C}{mR^2}} . \tag{8.16.3}$$

Come si vede l'accelerazione è costante, come nel moto di caduta libera, ma è inferiore a $g \sin\vartheta$

Moto di rotolamento su un piano inclinato

Procedimento 2. Utilizziamo l'equazione dei momenti rispetto all'asse orizzontale passante per C. Abbiamo

$$M_C = I_C \frac{d\omega}{dt} \,. \tag{8.16.4}$$

Il momento della forza peso è nullo perché la forza è applicata in C, quello della reazione normale $\mathbf{N}$ del vincolo è nullo perché la forza è parallela al braccio, quindi M_C è uguale al momento della reazione vincolare tangente, momento che vale $F_t R$. Quindi

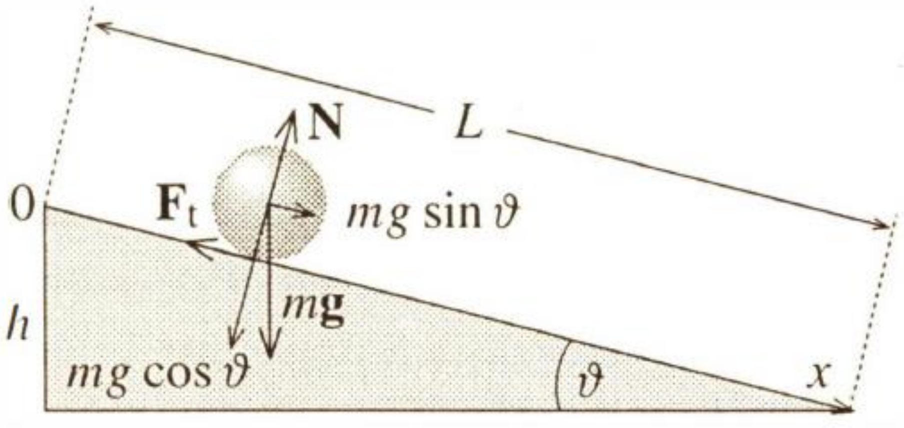
$$R F_t = I_C \frac{d\omega}{dt} \,. \tag{8.16.5}$$

In quest'equazione ci sono due incognite: l'accelerazione angolare e F_t. Il teorema del moto del baricentro ci fornisce un'altra equazione. Per il moto lungo il piano inclinato abbiamo

$$mg \sin\vartheta - F_t = m a_C \,. \tag{8.16.6}$$

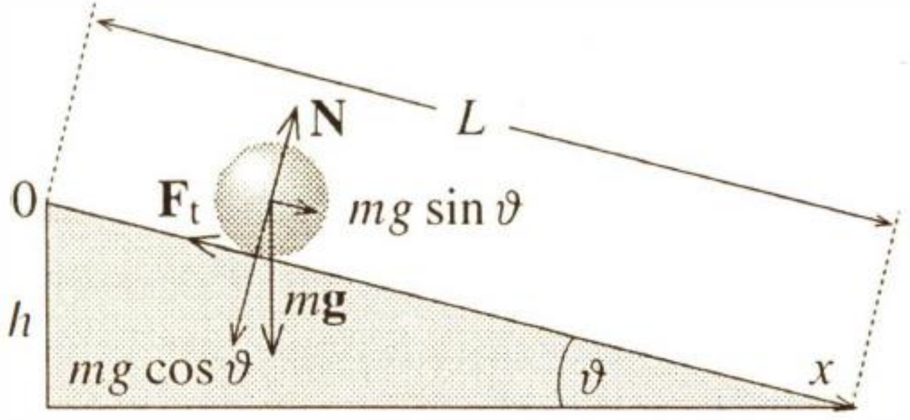
Ricordando ancora che $a_C = R\, d\omega/dt$, ritroviamo per a_C l'espressione (8.16.3) e per F_t

$$F_t = \frac{I_C}{I_C + mR^2}\, mg \sin\vartheta \,. \tag{8.16.7}$$



Moto di rotolamento su un piano inclinato

Procedimento 3. Nel processo considerato l'energia meccanica si conserva. È ben vero infatti che è presente una forza d'attrito, ma questa non fa lavoro, dato che il suo punto d'applicazione, A, è fisso. Supponiamo che il corpo parta da fermo dal punto 0 (vedi figura 8.16.1) del piano inclinato che si trova all'altezza h. Indichiamo con x una coordinata lungo il piano inclinato, con origine in O diretta verso il basso. La velocità del baricentro è $v_C = dx/dt$. Prendiamo nulla l'energia potenziale alla base del piano. Inizialmente l'energia del corpo è solo potenziale e vale mgh. Quando il corpo è alla generica x la sua energia potenziale è divenuta $mg(h - x\sin\vartheta)$; la sua energia cinetica è somma dell'energia cinetica del baricentro $mv_C^2/2$ e di quella di rotazione attorno al baricentro $I_C\omega^2/2$. Il teorema di conservazione dell'energia ci dice quindi che



$$mgh = mg(h - x\sin\vartheta) + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C^2\omega^2$$

cioè

$$mgx\sin\vartheta = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\frac{I_C}{R^2}v_C^2 \tag{8.16.8}$$

da cui otteniamo

$$v_C^2 = \frac{2gx\sin\vartheta}{1 + I_C/mR^2} \tag{8.16.9}$$

$$\Rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{2gx\sin\vartheta}{1 + I_C/mR^2}}$$

$$\varrho^2 = I_C/m$$

L'applicazione della conservazione dell'energia ci ha condotto direttamente alla velocità. Se vogliamo l'accelerazione, basta derivare rispetto al tempo la (8.16.9) e si riottiene la (8.16.3), che, utilizzando il raggio d'inerzia, possiamo scrivere nella forma

$$\boxed{v_{Cf} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_C/mR^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + (\varrho/R)^2}} \qquad \frac{U_{k,rot}}{U_{k,trasl}} = \frac{\frac{1}{2}I_C\omega^2}{\frac{1}{2}mv_C^2} = (\varrho/R)^2}$$

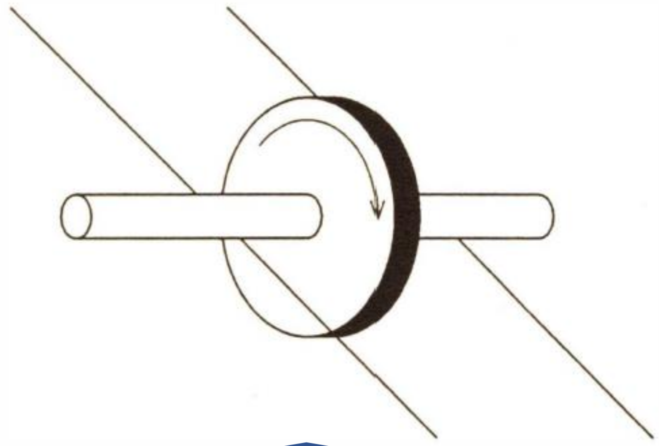
i corpi cavi scendono più lentamente di quelli pieni I_C > per i cavi

Non è vero però che la velocità finale è la stessa della caduta libera

$$\frac{dv_C}{dt} = a_C = \frac{g\sin\vartheta}{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}$$

$$\Uparrow$$

$$2v_C\frac{dv_C}{dt} = \frac{2g\sin\vartheta}{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}\frac{dx}{dt} = \frac{2g\sin\vartheta}{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}v_C$$



Moto di rotolamento su un piano inclinato

cilindro cavo	$\varrho^2 = R^2,$	$a_C = \frac{1}{2} g \sin\vartheta$
cilindro pieno	$\varrho^2 = \frac{R^2}{2},$	$a_C = \frac{2}{3} g \sin\vartheta$
sfera piena	$\varrho^2 = \frac{2R^2}{5},$	$a_C = \frac{5}{7} g \sin\vartheta$.

Esempio di sistema con raggio di inerzia molto maggiore del raggio di rotolamento

$$v_{Cf} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_C/mR^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+(\varrho/R)^2}}$$

Condizione di non scivolamento

$$F_t = mg\sin\vartheta \frac{(\varrho/R)^2}{1+(\varrho/R)^2} \le \mu_s mg\cos\vartheta$$

$$\vartheta \le \arctan\left[\frac{1+(\varrho/R)^2}{(\varrho/R)^2}\mu_s\right]$$

Attenzione $\vec{F}_t$ può essere in avanti o nulla