Rotazione attorno ad un asse fisso: energia cinetica

6.14. L'energia di un sistema materiale

Consideriamo ancora un sistema di N punti materiali riferito ad un riferimento inerziale. Indichiamo con $\mathbf{r}_i$ il raggio vettore del generico punto P_i, con m_i la sua massa, con $\mathbf{v}_i$ la sua velocità, eccetera. Il punto P_i ha l'energia cinetica $U_{ki} = \frac{1}{2}m_i v_i^2$, il sistema l'energia cinetica totale

$$U_k = \sum_{i=1}^{N} U_{ki} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \, . \tag{6.14.1}$$

$$U_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i'^2 = \frac{1}{2} I_a \omega^2$$

espressione identica a quella dell'energia cinetica del punto materiale, con velocità angolare al posto della velocità e momento d'inerzia al posto della massa.

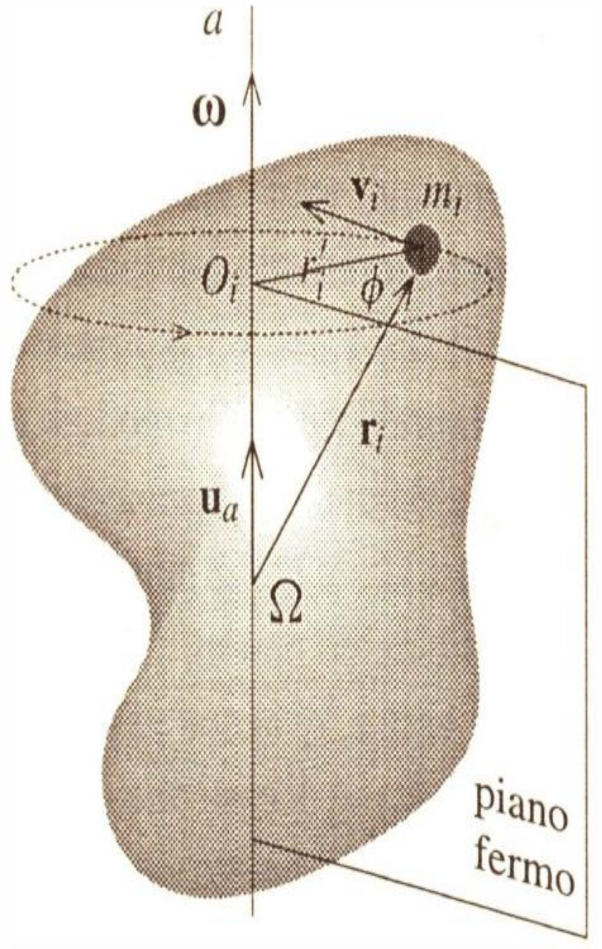
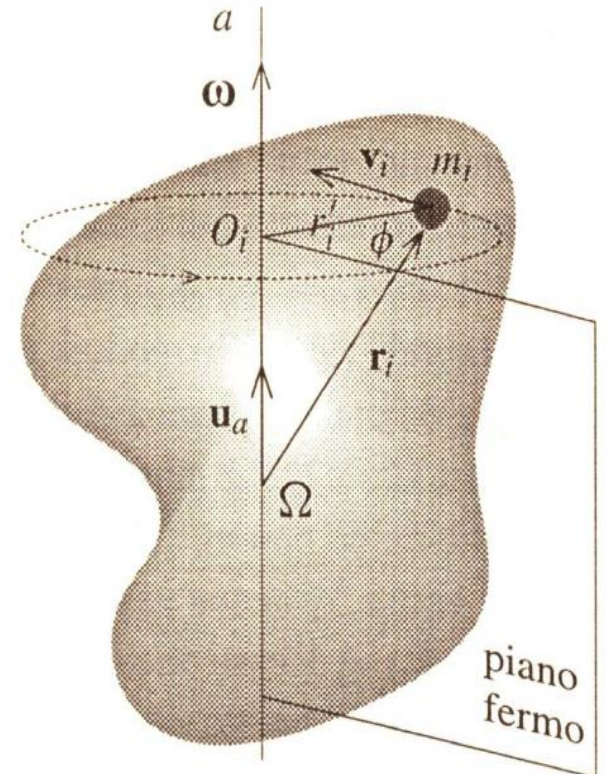


FIGURA 8.4.1

Rotazione attorno ad un asse fisso: lavoro

$$dU_k = I_a \omega \, d\omega = I_a \frac{d\phi}{dt} \, d\omega = \frac{d\phi}{dt} \, d\omega \sum_i m_i r_i'^2 = \sum_i m_i r_i' \frac{d\omega}{dt} r_i' d\phi =$$

$$\sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} ds_i = \sum_i F_{ti} \, ds_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = dW_e$$



$\frac{dv_i}{dt}$ derivata del modulo della velocità rispetto al tempo. E' la componente tangenziale dell'accelerazione.

F_{ti} Forza esterna agente sul punto materiale parallela alla traiettoria.

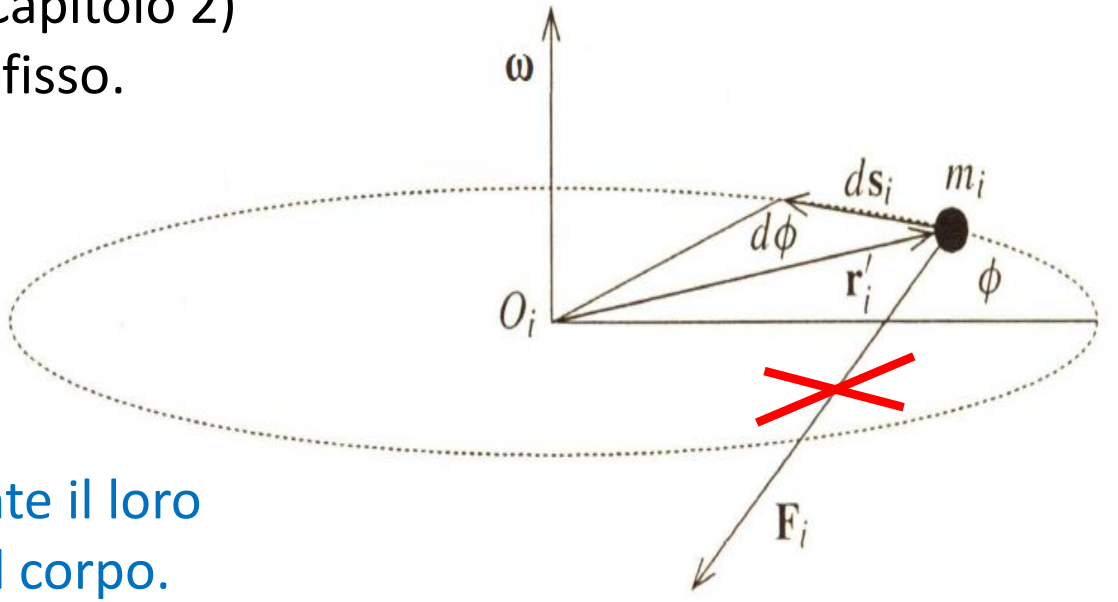
In un corpo rigido le forze interne fanno lavoro nullo.

Abbiamo così dimostrato il teorema dell'energia cinetica (Capitolo 2) nel caso di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso.

$$dU_k = I_a \omega \, d\omega = I_a \frac{d\phi}{dt} \, d\omega = I_a \frac{d\omega}{dt} \, d\phi = M_a \, d\phi = dW_e$$

Il lavoro delle forze esterne per una rotazione elementare attorno ad un asse è pari al momento assiale delle forze per lo spostamento angolare.

Se il momento delle forze esterne rispetto all'asse è costante il loro lavoro è pari a tale momento per l'angolo di cui è ruotato il corpo.



Rotazione attorno ad un asse fisso: conservazione dell'energia meccanica

Se le forze che causano la rotazione del corpo sono di tipo conservativo l'energia meccanica è una costante del moto (si conserva).

Esempio: In figura un disco è vincolato a ruotare attorno ad un asse ZZ'. Si supponga che si possano trascurare gli attriti. Si faccia l'ipotesi che il filo non scivoli. Se tutto il sistema parte da fermo e si lascia che la massa m cada di un'altezza h, la perdita di energia potenziale si trasforma in energia cinetica di rotazione del disco e di traslazione del cubo in caduta.

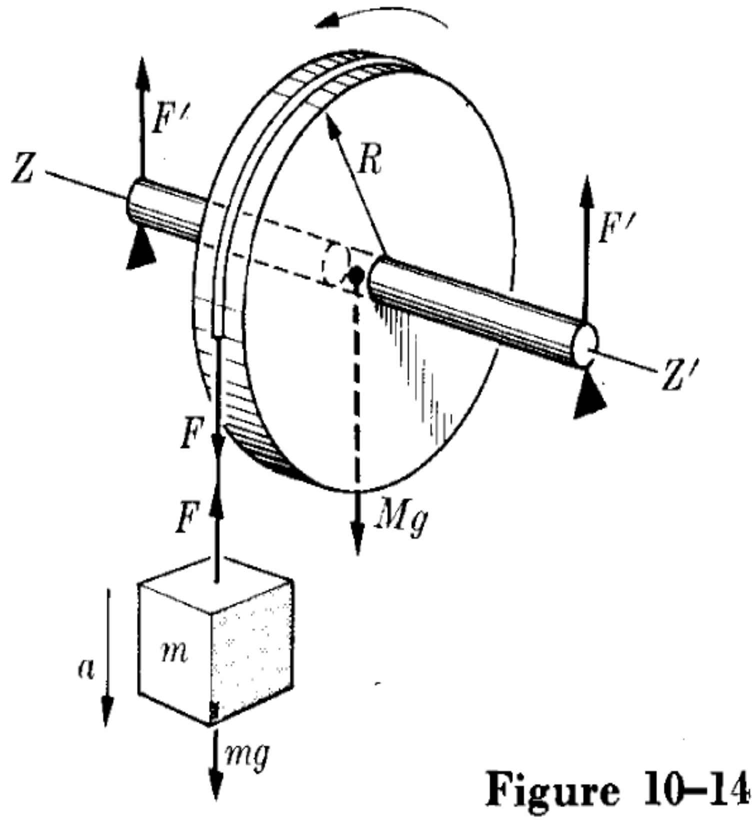


Figure 10–14

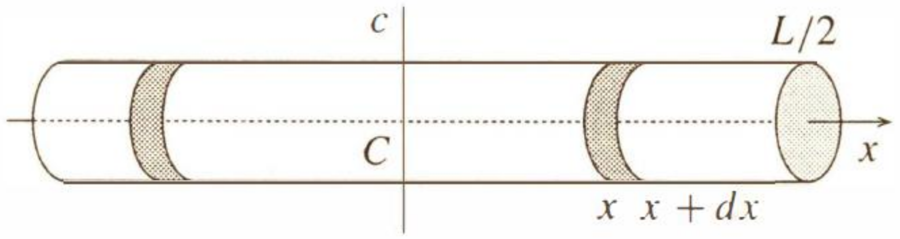
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_a\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2$$

Dove per l'ultima uguaglianza si è utilizzata la relazione $v = \omega R$ (filo che non scivola).

Calcolo del momento di inerzia rispetto ad un asse: esempio disco rigido omogeneo.

$$I_a = \int_V r'^2 \varrho(\mathbf{r})\, dV$$

Qui **r** denota la posizione di un volumetto elementare *dV* del corpo rigido e r' la distanza di *dV* dall'asse che stiamo considerando.
Se il corpo è omogeneo ρ non dipende da **r** e: $\rho\, dV = dm$



(a)

Filo rigido con massa, di densità omogenea
Oppure sbarra di cui trascuriamo le dimensioni trasversali

La massa dm della fettina sta alla sua lunghezza dx come la massa m della sbarra sta alla sua lunghezza L. Cioè $dm = (m/L)\, dx$. Ci sono di fatto due fettine alla stessa distanza $|x|$ dall'asse, una a destra e una a sinistra del centro. Il loro contributo al momento d'inerzia è

$$dI_c = 2x^2\, dm = \frac{2m}{L} x^2\, dx \qquad I_c = \frac{2m}{L}\int_0^{L/2} x^2\, dx = \frac{mL^2}{12}$$

Calcolo del momento di inerzia rispetto ad un asse: esempio disco rigido omogeneo.

$$I_a = \int_V r'^2 \varrho(\mathbf{r})\, dV$$

Qui **r** denota la posizione di un volumetto elementare *dV* del corpo rigido e r' la distanza di *dV* dall'asse che stiamo considerando.
Se il corpo è omogeneo ρ non dipende da **r** e: $\rho\, dV = dm$

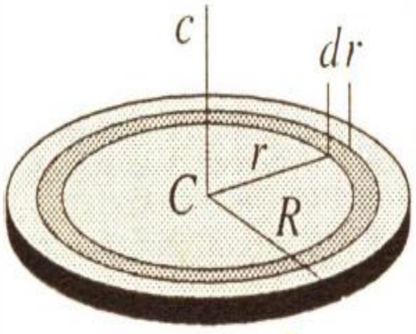


FIGURA 8.7.3

DISCO OMOGENEO. In figura 8.7.3 è rappresentato un disco omogeneo di raggio R e massa m. Ne vogliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse c di figura (cioè quello di simmetria).

Possiamo pensare il disco composto di anelli infinitesimi compresi tra r e $r+dr$. L'area dell'anello infinitesimo è $2\pi r\, dr$, da confrontare con l'area πR^2 di tutto il disco. La massa dell'anellino è quindi

$$dm = m\frac{2\pi r\, dr}{\pi R^2} = \frac{2m}{R^2} r\, dr$$

Il contributo al momento d'inerzia dell'anellino infinitesimo è quindi $dI_c = r^2\, dm = \frac{2m}{R^2} r^3\, dr$.

E, integrando su tutto il disco $I_c = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\, dr = \frac{mR^2}{2}$ (disco)

Calcolo del momento di inerzia rispetto ad un asse: teorema di Steiner.

In figura 8.8.1 è rappresentato un corpo di forma arbitraria. L'asse c passa per il suo baricentro C. Dato il momento d'inerzia I_c rispetto all'asse c, vogliamo quello I_a rispetto all'asse a parallelo a c. Sia h la distanza tra i due assi e $\mathbf{h}$ il vettore che porta, in un piano qualunque normale agli assi, dall'asse a all'asse c.

abbiamo

$$I_a = mh^2 + I_c$$

$$dI_a = r_a'^2\,dm = (\mathbf{h} + \mathbf{r}_c') \cdot (\mathbf{h} + \mathbf{r}_c')\,dm = h^2\,dm + 2\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}_c'\,dm + r_c'^2\,dm$$

ma l'ultimo addendo all'ultimo membro è dI_c.

$$\mathbf{r}_a' = \mathbf{h} + \mathbf{r}_c'$$

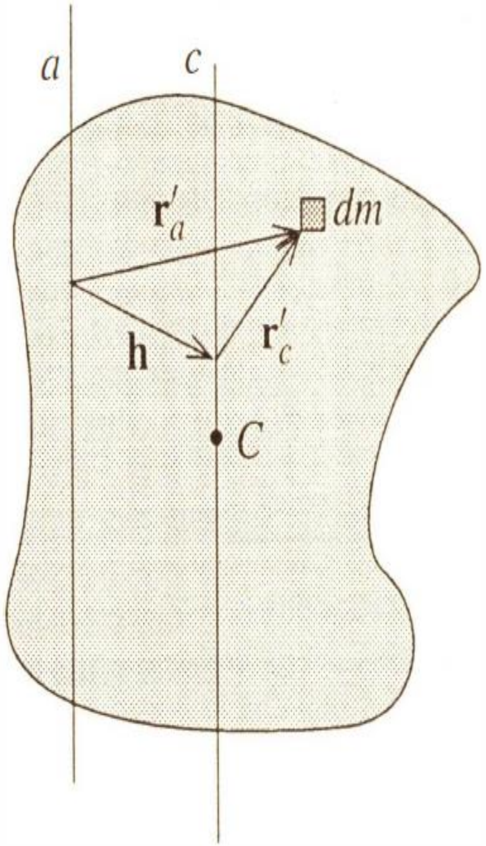
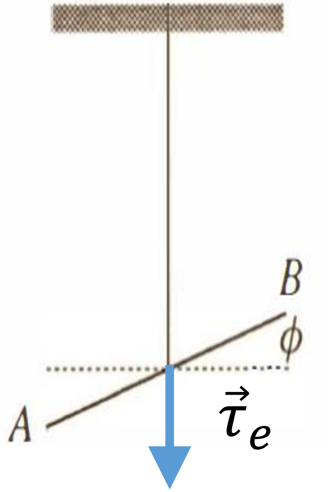


FIGURA 8.8.1

Rotazione attorno ad un asse fisso: bilancia di torsione per la misura di momenti fino a 10 fN m



Un'asta rigida AB è sospesa per il suo centro ad un filo, mantenuto verticale dal peso dell'asta (ed eventualmente da oggetti che essa porti). L'elasticità del filo mantiene la sbarra in una posizione definita in assenza di forze esterne (in questa posizione non c'è torsione del filo).

La costante elastica k dipende dal materiale di cui è fatto il filo, dalla sua lunghezza e dalla sua sezione. La si può scegliere, progettando la bilancia, a seconda della sensibilità che si vuole ottenere. Si capisce subito che la bilancia è di nuovo in equilibrio quando l'angolo di rotazione ϕ è tale che il momento elastico uguaglia il momento applicato τ. Misurando ϕ si può quindi determinare τ, pur di conoscere la costante k. In pratica ci sono due modi per determinare k (il processo si chiama *taratura*). Il primo metodo è statico e fa uso di forze note, il secondo è dinamico e permette maggiore precisione. Lo descriveremo ora.

Le rotazioni positive sono prese in senso antiorario, la torsione tende a riportare ϕ a zero

$$\tau_e = -k\phi$$

$$\tau_e = -k\phi = I\,\frac{d^2\phi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2\phi = 0$$

Per la sola sbarra (senza le masse)

$$I = \frac{m\,L^2}{12} \qquad \omega_0^2 = k/I = \frac{12\,k}{m\,L^2}$$

Attenzione k ha un'unità di misura diversa rispetto alla molla

$$T = 2\pi/\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} L\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Rotazione attorno ad un asse fisso: pendolo composto

Verso positivo uscente dalla diapositiva

Si chiama pendolo composto un corpo rigido di massa m girevole attorno ad un asse orizzontale non passante per il baricentro. La figura 8.10.1 rappresenta la situazione: O è la traccia dell'asse, C il baricentro e ϕ l'angolo di scostamento dalla verticale, preso positivo in verso antiorario (come nella figura). Sia h la distanza tra l'asse e il baricentro.

Per analizzare il moto, prendiamo il punto fisso O come polo dei momenti. Sul pendolo agiscono due forze: il peso che possiamo pensare applicato al baricentro e la reazione del vincolo che è applicata sull'asse attorno a cui il pendolo ruota. Più precisamente, come mostrato nell'inserto della figura, l'asse è un cilindro di raggio, diciamo, r e la reazione del vincolo è applicata in un punto P della sua superficie laterale. Se c'è attrito, la direzione di questa forza non è quella del segmento OP e la forza ha quindi momento non nullo rispetto ad O. Se però, come faremo, si può trascurare l'attrito, le due direzioni sono uguali e il momento della reazione vincolare è nullo. Il momento delle forze esterne rispetto all'asse è quindi solo quello del peso. Esso vale, per un generico angolo ϕ, $-mgh \sin\phi$. L'equazione del moto (8.4.9) è quindi

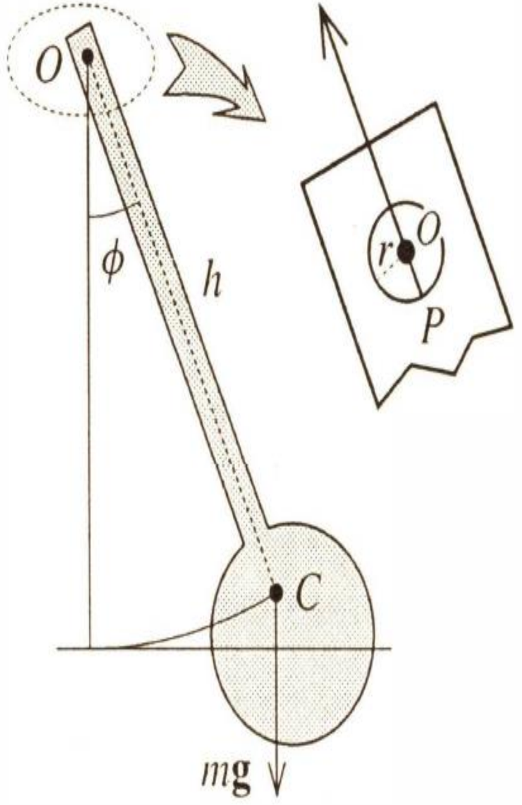


FIGURA 8.10.1

$$-mgh\sin\phi = I\,\frac{d^2\phi}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{mgh}{I} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/mgh}$$