

Equilibrio dei corpi rigidi

condizione necessaria e ~~sufficiente~~ per l'equilibrio di un corpo rigido
è che risultante e momento risultante delle forze esterne siano nulli.

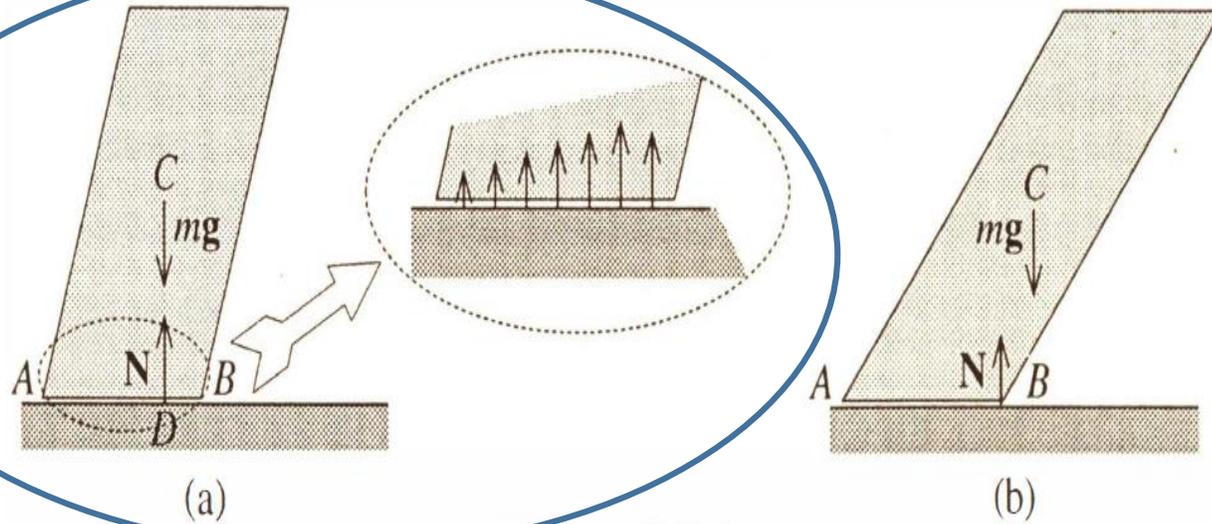


FIGURA 8.3.1

Se c'è equilibrio, come in figura 8.3.1 (a), il vincolo automaticamente aggiusta le reazioni in modo che il modulo di N e la posizione di D siano tali da realizzare l'equilibrio, cioè tali che mg e N siano una coppia di braccio nullo, quindi deve essere $N = -mg$ e D deve stare sulla perpendicolare di C . Ciò è possibile solo se il piede della perpendicolare è compreso nella base cioè tra A e B .



Equilibrio dei corpi rigidi

~~condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido~~
è che risultante e momento risultante delle forze esterne siano nulli.

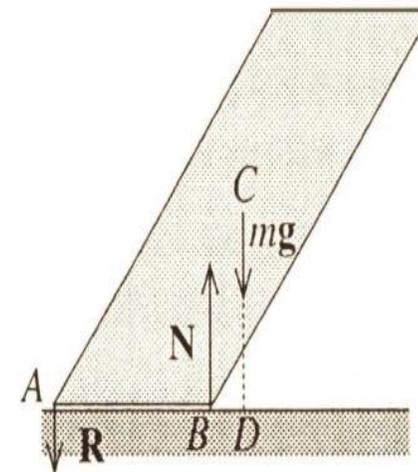
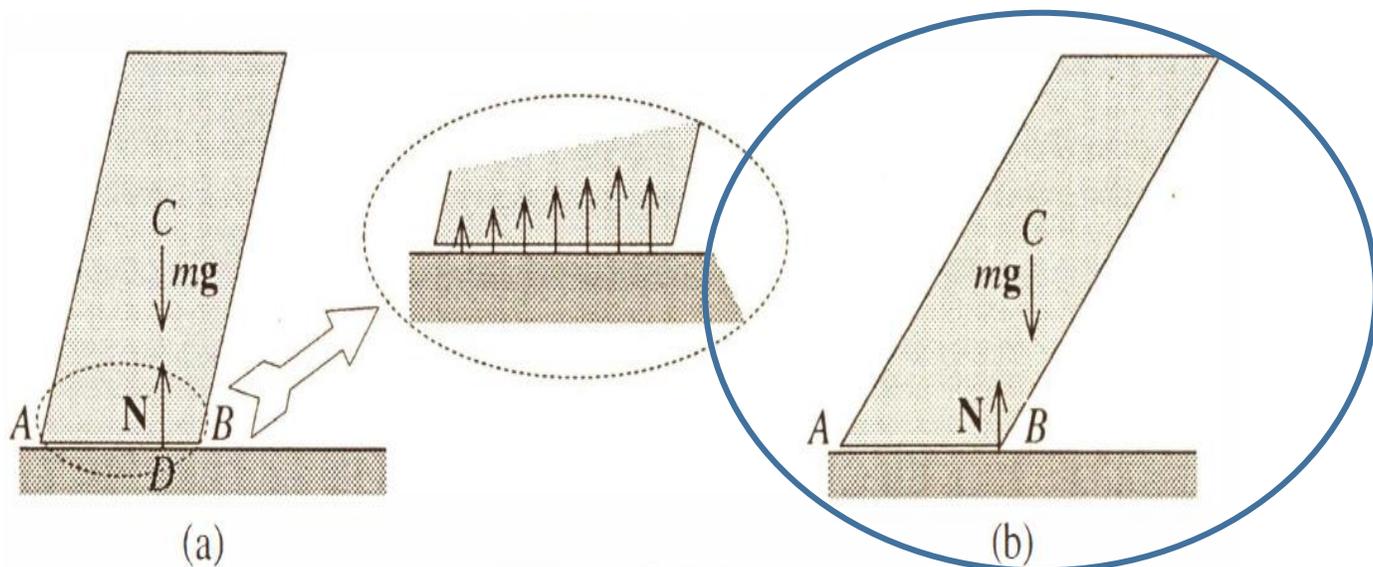


FIGURA 8.3.2

La reazione normale N del vincolo si trova tutta nell'estremo destro B della base, ma ciò non è sufficiente a mantenere l'equilibrio e il corpo cade (si rovescia). Nel momento in cui comincia la caduta il modulo della reazione normale N deve essere minore del peso mg , infatti il baricentro accelera verso il basso; $mg - N$ è cioè pari alla massa del corpo per l'accelerazione del baricentro (la reazione vincolare potrebbe avere anche una componente tangente, cioè d'attrito, nel caso che non ci sia scivolamento).

Se le reazioni vincolari potessero essere anche verso il basso, si potrebbe far sì che il loro centro cadesse fuori dell'intervallo AB , e quindi realizzare l'equilibrio anche nelle condizioni di figura 8.3.1 (b). Basta a tal fine piantare un chiodo in A o metterci un gancio.

$$N + R + mg = 0, \quad R\overline{AB} = mg\overline{BD}$$

Equilibrio dei corpi rigidi

~~condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido~~

è che risultante e momento risultante delle forze esterne siano nulli.

ESEMPIO 8.3.2. La scala, mostrata in figura 8.3.3, di lunghezza ℓ , è appoggiata ad una parete verticale, con cui forma un angolo α . Supponiamo che il piano verticale sia privo d'attrito, mentre il coefficiente d'attrito statico tra scala e piano orizzontale sia μ_s . Discutiamo le condizioni d'equilibrio.

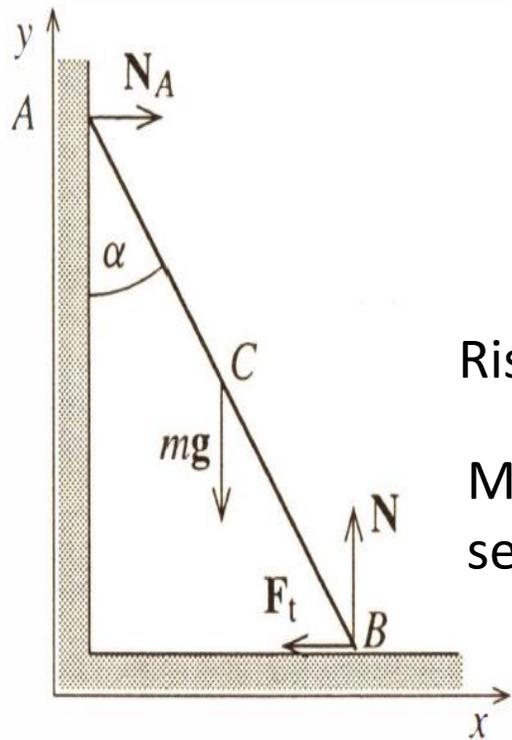


FIGURA 8.3.3

Risultante nulla $\mathbf{N} + \mathbf{F}_t + \mathbf{N}_A + m\mathbf{g} = 0 \Rightarrow N = -mg, \quad F_t = -N_A$

Momento nullo: il momento è nullo rispetto a qualsiasi polo io scelga. Per semplificare i conti è conveniente scegliere come polo il punto B

$$M_z = mg \frac{\ell}{2} \sin \alpha - N_A \ell \cos \alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \tan \alpha \leq \mu_s$$

$$\left(F_t = -N_A = -\frac{mg}{2} \tan \alpha < \mu_s N \right)$$

Rotazione attorno ad un asse fisso

Cominceremo in questo paragrafo a discutere i moti più semplici dei corpi rigidi, quelli attorno ad un asse fisso. Consideriamo quindi un corpo rigido, di forma arbitraria, come quello rappresentato in figura 8.4.1, che abbia, in un riferimento inerziale, un asse a fisso. Orientiamo (arbitrariamente) l'asse e indichiamone con \mathbf{u}_a il versore. La posizione del corpo è individuata fissando l'angolo, che indicheremo con ϕ , di rotazione attorno all'asse, rispetto ad un piano fermo, scelto arbitrariamente come origine degli angoli. Il verso positivo di questa rotazione, e quindi quello positivo di ϕ , è quello che è visto come antiorario da un osservatore che sia disteso lungo l'asse con \mathbf{u}_a che gli entra dai piedi.

L'asse fisso è un vincolo! La sua reazione vincolare si traduce in un due forze esterne che agiscono su ogni punto materiale di massa m_i . Si pensi ad esempio ad una porta che si apre. Tali forze sono quella tangente alla traiettoria e quella centripeta.

Il problema ha solo un grado di libertà, l'angolo ϕ per cui basta un'equazione per renderlo risolvibile.

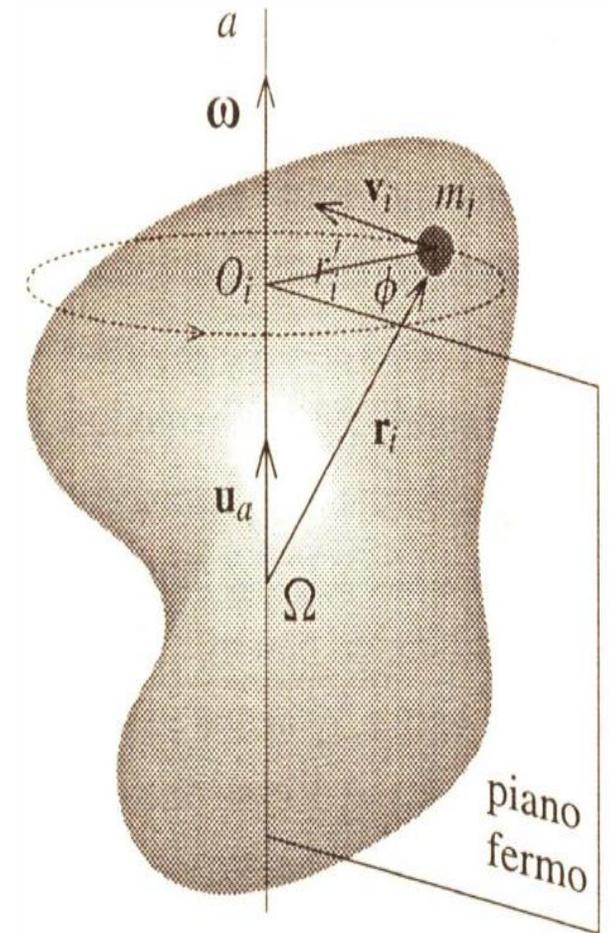


FIGURA 8.4.1

Rotazione attorno ad un asse fisso

Sia Ω un punto (qualunque) dell'asse. Indichiamo con \mathbf{M}_Ω il momento delle forze esterne rispetto ad Ω e \mathbf{L}_Ω il momento della quantità di moto del corpo. La seconda equazione cardinale della meccanica è

$$\mathbf{M}_\Omega = \frac{d\mathbf{L}_\Omega}{dt}$$

Prendiamo, membro a membro, il prodotto interno con il versore \mathbf{u}_a . Otteniamo

$$\mathbf{M}_\Omega \cdot \mathbf{u}_a = \frac{d(\mathbf{L}_\Omega \cdot \mathbf{u}_a)}{dt}$$

Ho moltiplicato scalarmente entrambi i vettori di una uguaglianza, facendo la stessa operazione a destra e a sinistra l'uguaglianza rimane!

Le quantità che compaiono a primo membro e, tra parentesi, a secondo membro, sono le proiezioni sull'asse a del momento delle forze esterne e del momento della quantità di moto rispettivamente. Le indicheremo con

$$M_a = \mathbf{M}_\Omega \cdot \mathbf{u}_a, \quad L_a = \mathbf{L}_\Omega \cdot \mathbf{u}_a$$

La proiezione della seconda equazione cardinale della meccanica sull'asse è:

$$M_a = \frac{dL_a}{dt}$$

Equazione scalare che risolve il moto di un corpo rigido attorno ad un asse fisso.

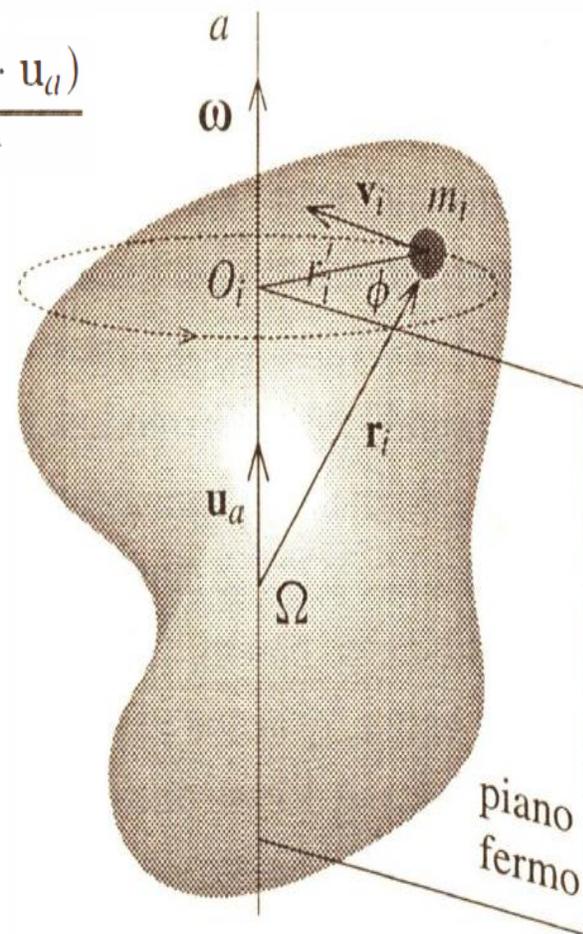


FIGURA 8.4.1

Rotazione attorno ad un asse fisso

Attenzione è sparito il polo!

Si può facilmente dimostrare, ma non lo faremo, che i momenti rispetto all'asse sono indipendenti dalla scelta del polo Ω (purché esso sia un punto dell'asse), il che giustifica i nomi.

$$M_a = \frac{dL_a}{dt}$$

Per il momento angolare si dimostra così (E' sufficiente farlo per un punto materiale e poi vale per tutti)

$$\vec{L}_{\Omega i} = \vec{r}_i \times m\vec{v}_i = (\overrightarrow{\Omega O_i} + \vec{r}'_i) \times m\vec{v}_i$$

$$\vec{L}_{\Omega i} \cdot \hat{u}_a = \vec{r}_i \times m\vec{v}_i \cdot \hat{u}_a = (\overrightarrow{\Omega O_i} + \vec{r}'_i) \times m\vec{v}_i \cdot \hat{u}_a = \vec{r}'_i \times m\vec{v}_i$$

Per il momento delle forze esterne

- Per quella diretta come \vec{v}_i la dimostrazione è la stessa di sopra.
- Quella centripeta essendo diretta come \vec{r}'_i non ha componente lungo asse $\vec{\omega}$

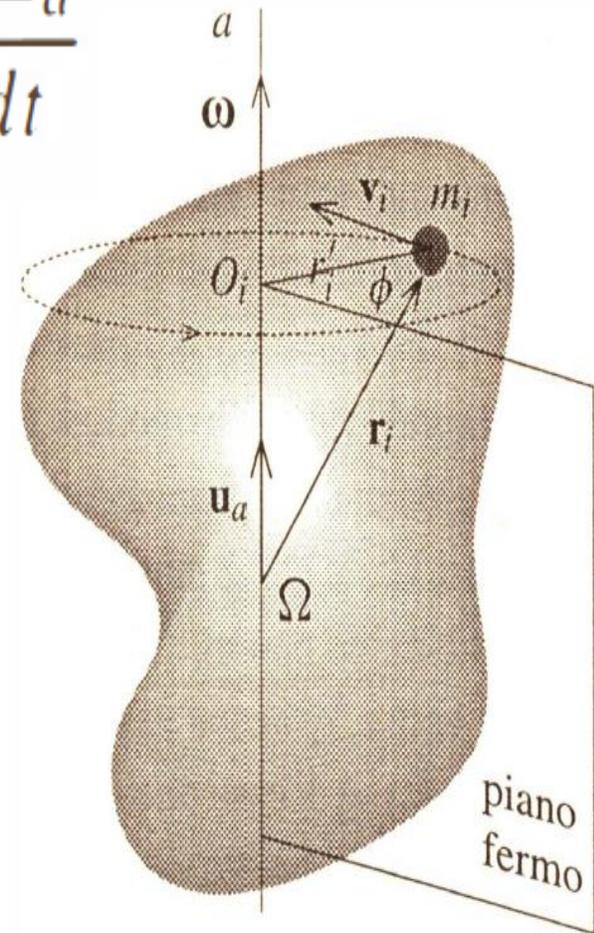


FIGURA 8.4.1

Rotazione attorno ad un asse fisso

teorema del momento della quantità di moto rispetto ad un asse. In parole: la derivata rispetto al tempo del momento angolare rispetto ad un asse fisso è uguale al momento delle forze esterne rispetto allo stesso asse.

Calcoliamo L_a per il corpo rigido nel suo insieme. Partiamo dal punto materiale m_i e poi sommiamo su tutti i punti.

$$L_{ai} = \vec{L}_{\Omega i} \cdot \hat{u}_a = \vec{r}'_i \times m \vec{v}_i = \vec{r}'_i \times (m \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = m r_i'^2 \omega$$

$$L_a = \sum_i L_{ai} = \omega \sum_i m r_i'^2 = \omega \int_V r'^2 \rho(r') dV = \omega I_a$$

dove la quantità $I_a = \sum_i m_i r_i'^2 = \int_V r'^2 \rho(r) dV$ è chiamato *momento d'inerzia* del corpo rispetto all'asse a .

ed è una quantità che non dipende dal moto del corpo.

$$M_a = \frac{dL_a}{dt}$$

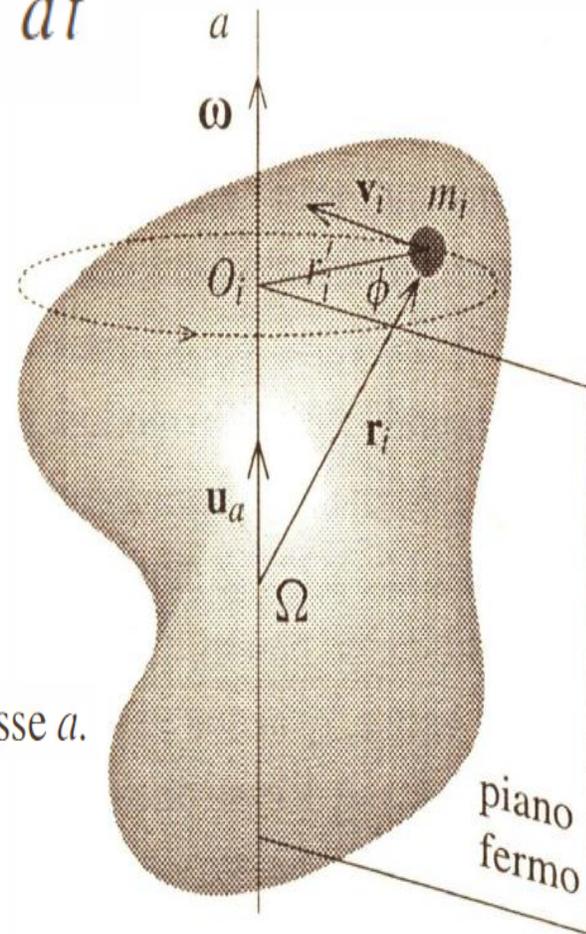


FIGURA 8.4.1

Rotazione attorno ad un asse fisso

Si ha:
$$M_a = \frac{dL_a}{dt} = I_a \frac{d\omega_a}{dt} = I_a \frac{d^2\phi}{dt^2} \Rightarrow M_a = I_a \alpha \quad (8.4.10)$$

dove
$$\alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$
 è l'accelerazione angolare

Queste espressioni sono formalmente simili all'equazione del moto di un punto che si muova su di una retta (un grado di libertà come per la rotazione attorno ad un asse). Se x è la coordinata del punto, m la sua massa e F_x la componente sulla retta della forza agente, l'equazione del moto è

$$F_x = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

L'equazione delle rotazioni è la stessa, pur di sostituire la coordinata angolare ϕ al posto della x (e quindi velocità e accelerazione angolari al posto di velocità e accelerazione rispettivamente), il momento assiale delle forze esterne al posto della componente della forza e il momento d'inerzia al posto della massa. Quest'ultima osservazione rende conto del nome momento d'inerzia. L'equazione (8.4.10) (o l'equivalente (8.4.9)) è l'equazione del moto di rotazione. Per trovarlo dobbiamo conoscere il momento assiale delle forze esterne, in generale una funzione del tempo, e le condizioni iniziali. Si integra la (8.4.10) e si trova la soluzione.

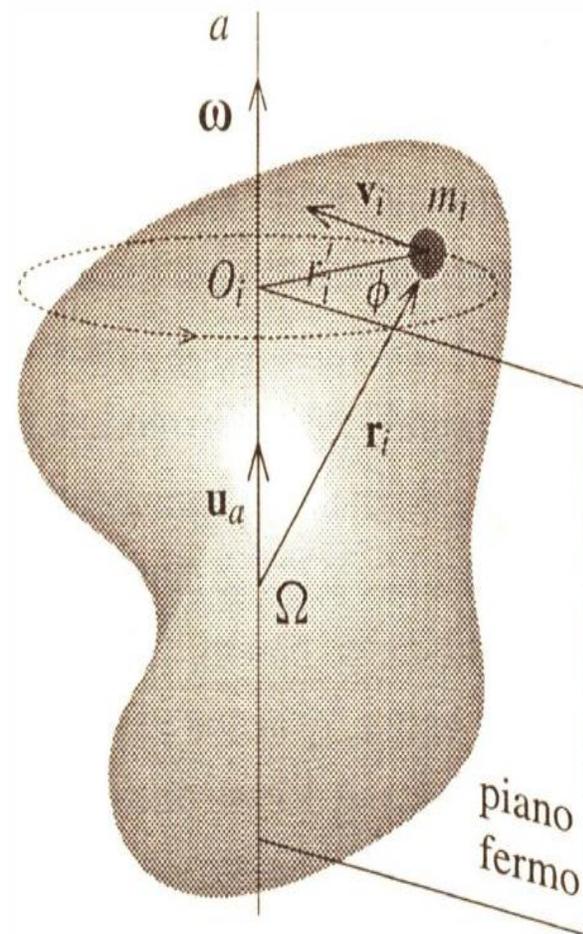


FIGURA 8.4.1

Rotazione attorno ad un asse fisso: esempio

Il caso più semplice è quello in cui M_a è costante. Allora l'accelerazione angolare $\alpha = M_a/I_a$ è pure costante e, in analogia al moto rettilineo uniformemente accelerato, si trova

$$(8.4.12) \quad \phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

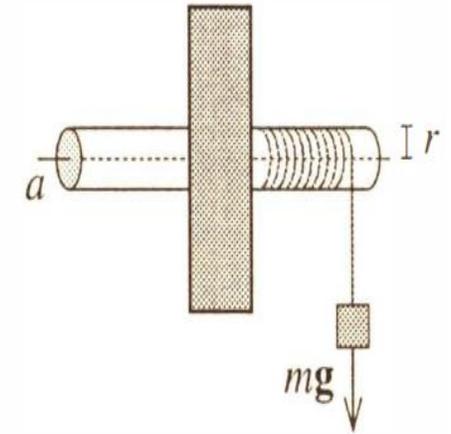
dove ϕ_0 e ω_0 sono rispettivamente l'angolo e la velocità angolare a $t = 0$.

ESEMPIO 8.4.1. In figura 8.4.2 è rappresentato un disco rigido in un piano verticale che può ruotare attorno ad un perno orizzontale, che coincide con l'asse di simmetria a del disco.

Attorno al perno è avvolto un filo cui è appesa un corpo di massa m . Su di questo agisce la forza peso mg diretta verticalmente verso il basso. Il momento assiale del peso è $M_a = mgr$, se r è il raggio del perno. Se possiamo, come supporremo, trascurare gli attriti, questo è anche il momento assiale delle forze esterne ed è costante. Supponiamo che il disco sia inizialmente fermo e scegliamo l'origine degli angoli in modo che sia $\phi_0 = 0$. Il moto è allora

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \frac{mgr}{I_a} t^2 .$$

L'angolo di cui è ruotato il sistema al tempo t è proporzionale al quadrato del tempo. \square



Attenzione c'è un errore!

Rotazione attorno ad un asse fisso: esempio

EXAMPLE 10.4. A disk of radius 0.5 m and mass 20 kg can rotate freely around a fixed horizontal axis passing through its center. A force of 9.8 N is applied by pulling a string wound around the edge of the disk. Find the angular acceleration of the disk and its angular velocity after 2 s.

Solution: From Fig. 10–13 we see that the only external forces on the disk are its weight Mg , the downward pull F , and the forces F' at the pivots. The axis ZZ' is a principal axis. Taking torques with respect to the center of mass C , we find that the torque of the weight is zero. The combined torque of the F' forces is also zero. Thus $\tau = FR$. Applying Eq. (10.14) with $I = \frac{1}{2}MR^2$, we have $FR = (\frac{1}{2}MR^2)\alpha$ or $F = \frac{1}{2}MR\alpha$, giving an angular acceleration of

$$\alpha = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9.8 \text{ N})}{(20 \text{ kg})(0.5 \text{ m})} = 1.96 \text{ rad s}^{-2}.$$

According to Eq. (5.54), the angular velocity after 2 s if the disk started from rest is

$$\omega = \alpha t = (1.96 \text{ rad s}^{-2})(2 \text{ s}) = 3.92 \text{ rad s}^{-1}.$$

Since the center of mass C is fixed, its acceleration is zero and we must have

$$2F' - Mg - F = 0 \quad \text{or} \quad F' = 205.8 \text{ N}.$$

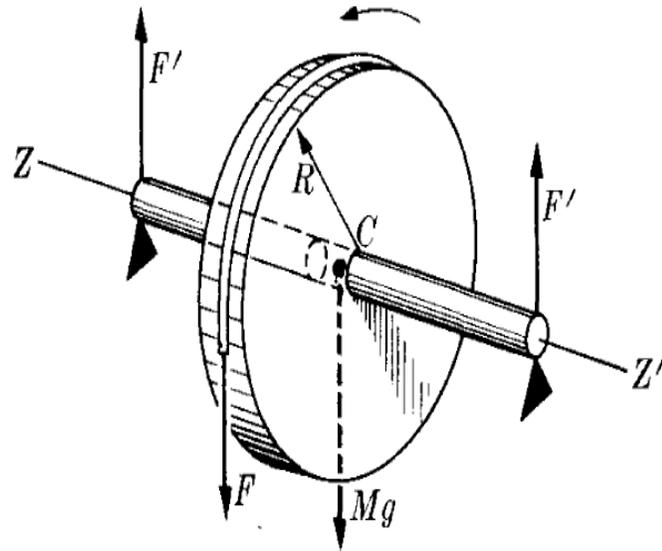


Figure 10–13

Rotazione attorno ad un asse fisso: esempio

Solution: Since the mass of the body is 1 kg, its weight is $mg = 9.8$ N, which has the same value as the force F of Fig. 10-13. Therefore one would be tempted to consider this case as identical to the previous one and assume the results are the same. This is not, however, the case! The mass m , when falling, exerts a downward pull F on the disk, and by the law of action and reaction the disk exerts an equal but upward pull F on the mass m . Since the mass m is falling with accelerated motion, the net force on it cannot be zero. Thus F is not the same as mg , but smaller. Therefore the disk is subject also to a smaller torque.

The equation of motion of the mass m is

$$mg - F = ma = mR\alpha,$$

where the relation $a = R\alpha$ has been used. The equation of motion of the disk is $I\alpha = FR$ or (since $I = \frac{1}{2}MR^2$) $F = \frac{1}{2}MR\alpha$. Eliminating F between these two equations, we find that the angular acceleration is

$$\alpha = \frac{mg}{(m + \frac{1}{2}M)R} = 1.80 \text{ rad s}^{-2},$$

which is smaller than our previous result. The

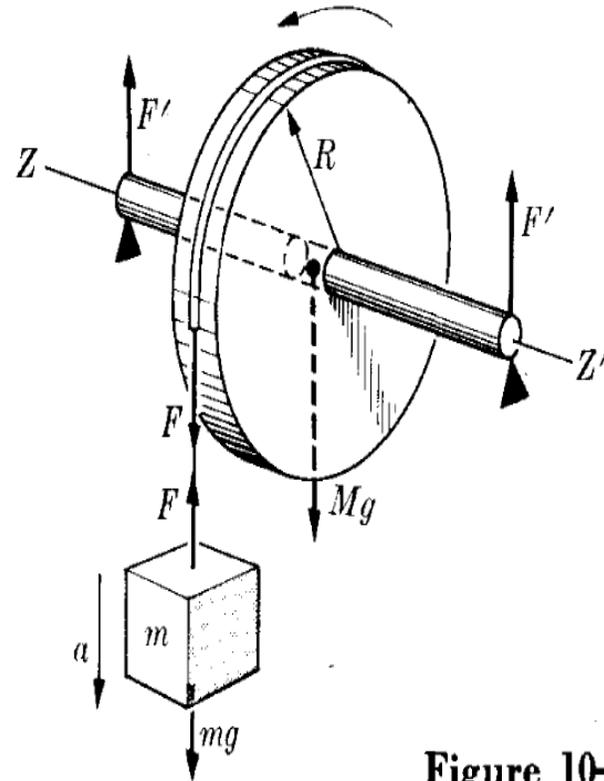


Figure 10-14

Stesso esercizio della diapositiva precedente con appesa una massa invece che un forza applicata. Deve valere il principio di azione e reazione.

L'accelerazione di caduta della massa m è:

$$a = R\alpha = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M} = 0.90 \text{ m s}^{-2}$$

Molto più piccola di \vec{g}