Problema 30

Dopo l'urto il corpo composto viaggia con la velocità del centro di massa. La velocità del centro di massa è la media pesata delle velocità dei 2 corpi

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \quad v_{CMx} = \frac{2\times 3 + 3\times(-2)}{5} = 0\ m/s$$

$$v_{CMy} = \frac{2\times 2 + 3\times 2}{5} = 2\ m/s$$

$$v_{CMz} = \frac{2\times(-1) + 3\times 4}{5} = 2\ m/s$$

$$\vec{V} = \vec{v}_{CM} = (0, 2, 2)\ m/s$$

Energia cinetica totale prima dell'urto $\frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 =$

$$= \frac{1}{2} 2 \left(3^2 + 2^2 + 1^2\right) + \frac{1}{2} 3 \left(2^2 + 2^2 + 4^2\right) = 14 + 36 = 50\ J$$

La velocità del primo corpo rispetto al baricentro è $\vec{V}_1^* = \vec{V}_1 - \vec{V}_{CM} =$

$$= (3, 2, -1) - (0, 2, 2) = (3, 0, -3)$$

" " " secondo " " " " " $\vec{V}_2^* = \vec{V}_2 - \vec{V}_{CM} =$

$$(-2, 2, 4) - (0, 2, 2) = (-2, 0, 2)$$

L'energia cinetica relativa al baricentro è:

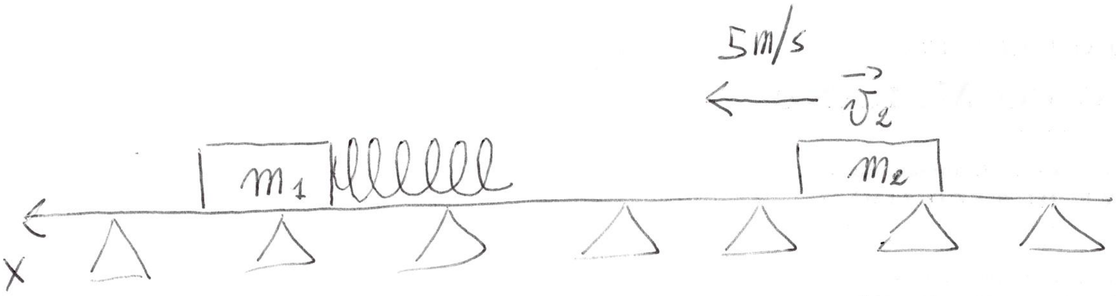
$$\frac{1}{2} m_1 |\vec{V}_1^*|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{V}_2^*|^2 = \frac{1}{2} 2 \left(3^2 + 3^2\right) + \frac{1}{2} 3 \left(2^2 + 2^2\right) = 18 + 12 = 30\ J$$

L'energia cinetica dopo l'urto è

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) |\vec{V}^2| = \frac{1}{2} 5 \left(0 + 2^2 + 2^2\right) = 20\ J.$$

Trattandosi di un urto totalmente anelastico l'energia cinetica dopo l'urto è anche l'energia cinetica del baricentro prima dell'urto.

Problema 31




La massa $m_2$ colpendo la molla rallenta e mette in moto la massa $m_1$. Arriva un istante in cui entrambe le masse hanno la velocità del baricentro. In quell'istante l'energia cinetica relativa al baricentro è nulla. L'energia cinetica del baricentro invece si conserva. La massima deformazione della molla si verifica quando ad essa viene trasferita tutta l'energia cinetica relativa al baricentro

La velocità del baricentro è $V_{CM} = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{0 + 3 \cdot 5}{3+2} = 3\ m/s$

Energia cinetica totale $= \dfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = 37{,}5\ J$

" " del baricentro $= \dfrac{1}{2}(m_1+m_2) V_{CM}^2 = \dfrac{1}{2} 5 \cdot 9 = 22{,}5$

Per il teorema di König l'energia cinetica relativa al baricentro è

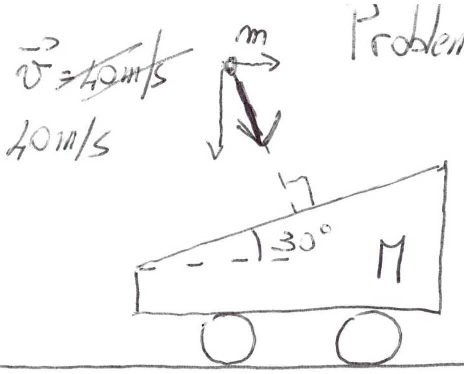
Energia cinetica totale − Energia cinetica del baricentro $= 37{,}5 - 22{,}5 = 15\ J$

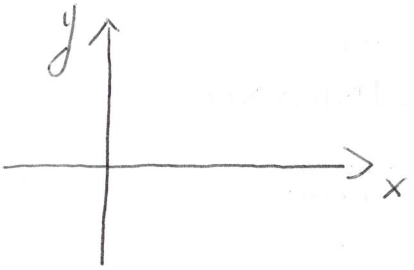
Energia cinetica relativa al baricentro $= 15\ J$

$\dfrac{1}{2} K \Delta x^2 =$ Energia cinetica relativa al baricentro

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2 \cdot 15}{K}} = \sqrt{\frac{30}{300}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = 0{,}33\ m.$$

# Problema 32




$m = 5 \cdot 10^{-2}\,kg$

$M = 1kg$

$v_x = v \sin 30° = 20\,m/s$

$v_y = -v \cos 30° = -34{,}64\,m/s$

La parete del carrello è liscia, le sole forze in gioco sono perpendicolari al piano.

Possiamo scomporre l'urto nella direzione x e in quella y

Nella direzione y interviene nell'urto anche la Terra. $\boxed{\text{Nel caso di urto elastico}}$ si tratta il problema come un urto centrale fra una massa m piccola e una massa grande $(M + M_{TERRA})$. In direzione y la sferetta inverte la sua velocità.

In direzione x si ha urto fra sferetta e carrello. Si conserva sia quantità di moto che energia cinetica

$$\begin{cases} m v_x = m v_{xf} + M V_{xf} \\ \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} m v_{xf}^2 + \frac{1}{2} M V_{xf}^2 \end{cases}$$

Dove $v_{xf}$ : velocità dopo urto della sferetta

$V_{xf}$ velocità dopo urto del carrello

$$\Downarrow$$

$$V_{xf} = \frac{m}{M}(v_x - v_{xf}), \quad m v_x^2 = m v_{xf}^2 + M \frac{m^2}{M^2}(v_x - v_{xf})^2$$

Dobbiamo risolvere la seguente equazione del secondo ordine

$$v_{xf}^2 + \frac{m}{M} v_{xf}^2 + \frac{m}{M} v_x^2 - v_x^2 - 2\frac{m}{M} v_x v_{xf} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{xf}^2 (m+M) - 2m\, v_x v_{xf} + (m-M) v_x^2 = 0$$

$$v_{xf} = \frac{m v_x \pm \sqrt{m^2 v_x^2 - (m^2 - M^2) v_x^2}}{m+M} = \cancel{\frac{m v_x}{m+M}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(1 - \frac{M^2}{m^2}\right)}\right]}$$

$$= \frac{m v_x \pm M v_x}{m+M}$$ ha senso fisico la soluzione con il $-$ $\quad v_{xf} = v_x \frac{m-M}{m+M}$

$$V_{xf} = \frac{m}{M}\left(v_x - v_x \frac{m-M}{m+M}\right) = \frac{m}{M}\,\frac{\cancel{m v_x} + M v_x - \cancel{m v_x} + M v_x}{m+M} = \frac{2 m v_x}{m+M} \simeq \frac{2 m v_x}{M} \simeq 2\,m/s$$

# Problema 32

Urto completamente anelastico.
L'energia cinetica relativa al baricentro si annulla. Si conserva l'energia cinetica del baricentro. La sferetta e il carrello formano un corpo unico che si muove con il moto del baricentro.

In direzione y il sistema ha velocità nulla.

In direzione x la velocità del baricentro prima dell'urto è

$$v_{CM_x} = \frac{m v_x + 0}{m + M} \simeq \frac{m}{M} v_x = 1\,m/s$$