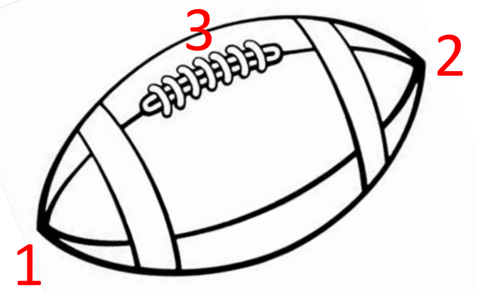
Moto del corpo rigido: gradi di libertà

Un corpo si dice rigido se la distanza tra qualsiasi coppia di suoi punti è fissa.

I corpi solidi hanno, in prima approssimazione, forma propria, se vengono cioè compressi, tirati o soggetti a torsione mantengono inalterata la forma. Naturalmente questo non è rigorosamente vero, perché piccole o grandi deformazioni avvengono sempre. Tuttavia molte proprietà del moto dei corpi si possono studiare approssimandoli come se essi fossero *rigidi*.



- Per descrivere il moto di un corpo rigido dobbiamo conoscere i raggi vettori di tutti i suoi punti materiali in funzione del tempo.
- Ad un tempo t, noti i raggi vettori di soli tre punti $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ possiamo ricavare tutti gli altri (la forma del corpo non cambia nel tempo).
- 3 raggi vettori corrispondono a 9 coordinate cartesiane $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$, in funzione del tempo e quindi 9 incognite.
- La distanza tra i 3 punti non dipende dal moto del corpo (vedi equazioni sotto). Questo riduce le incognite in funzione del tempo a 6. Si dice che il corpo ha 6 gradi di libertà.
- Servono 6 coordinate di 3 punti materiali diversi!!! Non bastano le 6 di due soli punti materiali.

$$\sqrt{\left(x_1(t) - x_2(t)\right)^2 + \left(y_1(t) - y_2(t)\right)^2 + \left(z_1(t) - z_2(t)\right)^2} = costante$$ E così anche per i punti 1, 3 e 2, 3

Moto del corpo rigido: rotazione più traslazione

Consideriamo ora due posizioni qualunque del corpo. Il trasporto da una posizione all'altra si può sempre effettuare con una *traslazione* seguita da una *rotazione* attorno ad un asse (geometrico, non necessariamente fisico). In figura 8.1.1 la traslazione porta il punto A da A_1 a A_2. Il corpo assume la posizione tratteggiata. Per portare gli altri punti nelle posizioni finali rispettive bisogna, in generale, ruotare il corpo attorno ad un asse passante per A_2 e di determinata direzione, di un determinato angolo. Direzione dell'asse e angolo di rotazione si determinano con considerazioni geometriche, dimostrando così quanto affermato.

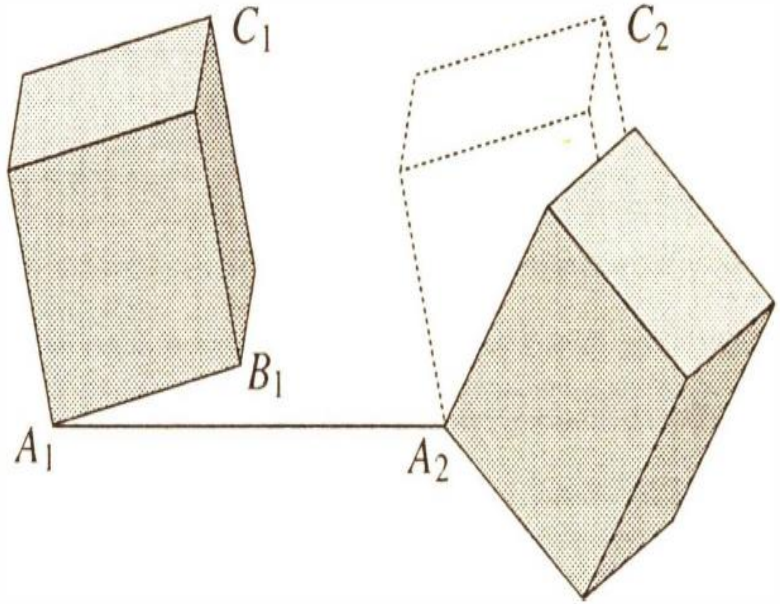


FIGURA 8.1.1

La scelta del punto A è ovviamente arbitraria. Essa però determina la traslazione (se si fosse scelto B, la traslazione sarebbe stata diversa). Ci sono quindi infiniti modi diversi di effettuare la sequenza traslazione-rotazione, che realizza lo spostamento assegnato. Si può dimostrare, ma non lo faremo, che assegnate le posizioni iniziale e finale del corpo, la direzione dell'asse e l'angolo di rotazione sono fissi.

Ovviamente si può anche procedere prima ruotando e poi traslando, o anche con una successione di coppie di traslazione e rotazione. Il moto continuo di un corpo rigido si può pensare come una successione continua di coppie di traslazione-rotazione infinitesime, si dice anche di *rototraslazioni* infinitesime. L'asse di rotazione varia in genere continuamente e si parla di *asse istantaneo di rotazione*.

La scelta del punto che trasla è, come s'è visto, arbitraria. Tuttavia conviene spesso scegliere il baricentro, data la sua situazione privilegiata nella dinamica.

Moto del corpo rigido: rotazione più traslazione

We may distinguish two types of motion of a rigid body. The motion is a *translation* when all the particles describe parallel paths so that the lines joining any two points in the body always remain parallel to its initial position (Fig. 10–1a). The motion is a *rotation* around an axis when all the particles describe circular paths around a line called the axis of rotation (Fig. 10–1b). The axis may be fixed or it may be changing its direction relative to the body during the motion.

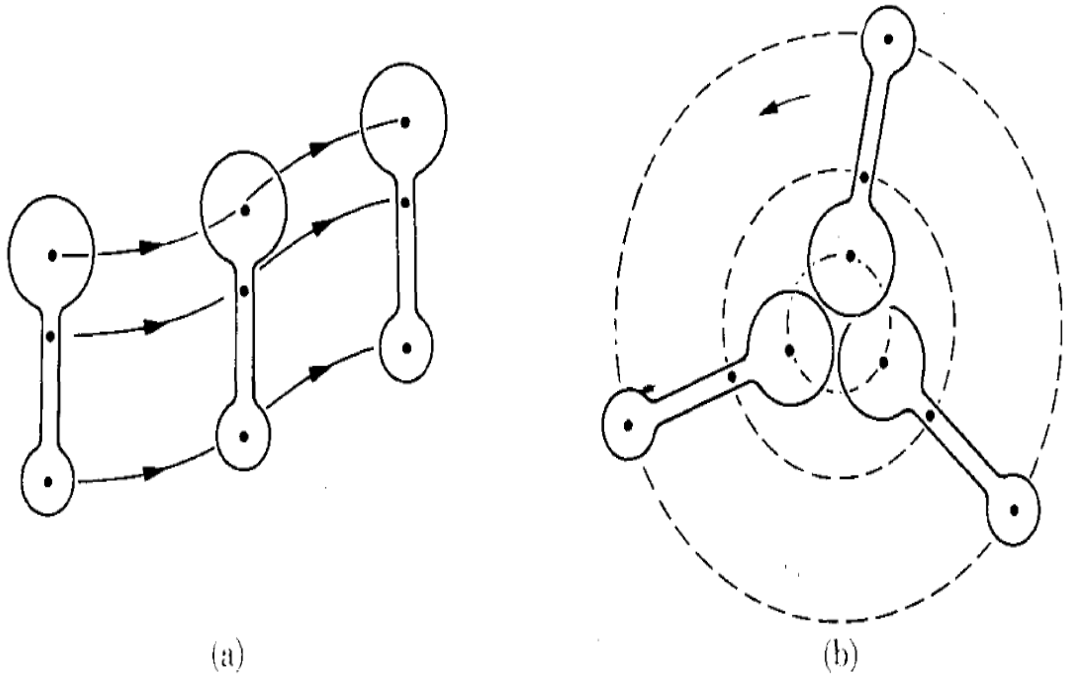
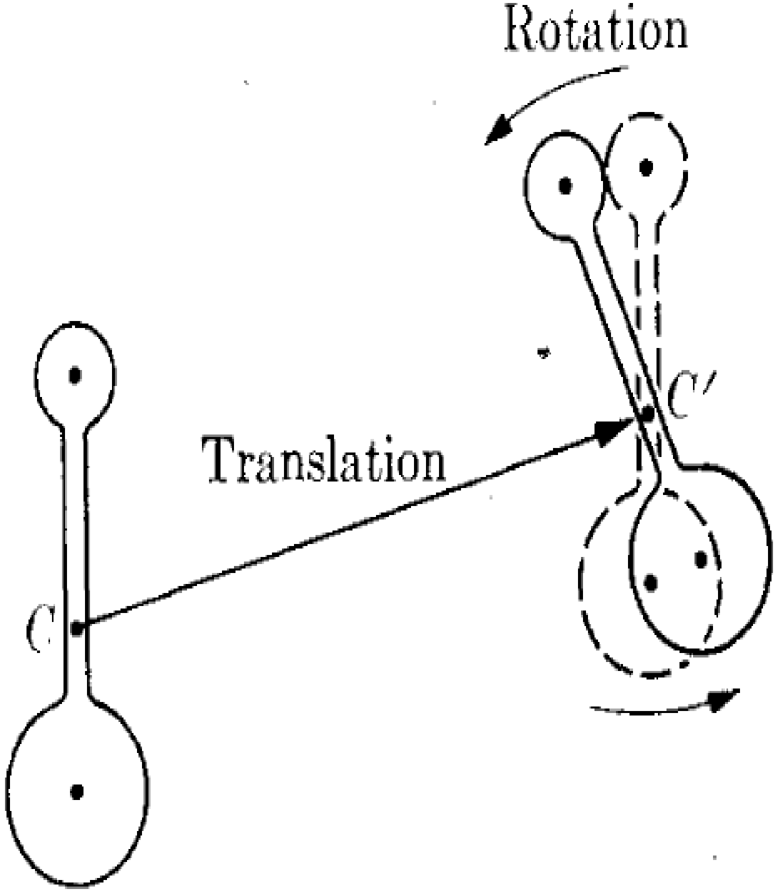


Fig. 10–1. (a) Motion of translation of a rigid body. (b) Motion of rotation of a rigid body.

Moto del corpo rigido: rotazione più traslazione

The most general motion of a rigid body can always be considered as a combination of a rotation and a translation. That is, it is always possible to find a translating, nonrotating frame of reference in which the body's motion appears to be rotation only. For example, the motion of the body in Fig. 10–2 which passes from position 1 to position 2 can be considered as a translation represented by the displacement CC', joining the two positions of the center of mass, and a rotation around an axis through the center of mass C'.



Moto del corpo rigido: equazioni del moto

Come abbiamo visto al capitolo 6 due fondamentali equazioni valgono per il moto di un qualunque sistema materiale in un riferimento inerziale, le equazioni cardinali della meccanica. Riscriviamole: indichiamo con Ω un punto fisso rispetto al sistema inerziale che abbiamo scelto per descrivere il moto del sistema, con $\mathbf{M}_\Omega$ il momento risultante delle forze *esterne* rispetto al polo Ω, e con $\mathbf{L}_\Omega$ il momento angolare totale del sistema rispetto allo stesso polo. Siano ancora $\mathbf{F}$ la risultante delle forze *esterne* agenti sul sistema e $\mathbf{P}$ la quantità di moto totale del sistema. Le due equazioni cardinali sono allora

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

$$\mathbf{M}_\Omega = \frac{d\mathbf{L}_\Omega}{dt}$$

Sistema di riferimento del laboratorio

Queste due equazioni vettoriali corrispondono a 6 equazioni scalari.
Avendo 6 equazioni e 6 incognite il problema è risolvibile.
Un conto è che il problema sia risolvibile un altro è trovare le sue soluzioni!

we shall therefore first consider the simplest aspects of such motion, in which an extended body rotates about a *fixed axis*. A given point on such a body then moves in a plane perpendicular to this axis. Such rotation of a body about a fixed axis is called *plane rotation* or rotation in two dimensions. We shall later generalize the results to three dimensions, but in doing so we shall find that, unlike the case of ordinary particle mechanics, rotations are subtle and hard to understand unless we first get a solid grounding in two dimensions.

Moto del corpo rigido: equazioni del moto

Osserviamo che l'equazione (8.1.1) determina il moto del baricentro C del corpo. Ricordando che la quantità di moto totale del sistema è pari alla sua massa m moltiplicata per la velocità $\mathbf{v}_C$ del baricentro, $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_C$, la (8.1.1) si può scrivere nella forma

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C \tag{8.1.4}$$

dove $\mathbf{a}_C$ è l'accelerazione del baricentro. Il problema del moto del baricentro di un corpo rigido (e non) si risolve quindi esattamente come il problema del moto di un punto materiale.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \tag{8.1.1}$$

Sistema del laboratorio

Ricordiamo ancora che la seconda equazione cardinale vale anche, nella stessa forma, quando si calcolino i momenti, rispetto ad un polo particolare, il baricentro C del sistema, anche se quest'ultimo non è in genere fermo rispetto ad un sistema inerziale. In formule

$$\mathbf{M}_C = \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} \tag{8.1.3}$$

La (8.1.3) permette poi di conoscere il moto di rotazione del corpo attorno al baricentro. Dove con l'ultima frase intendiamo attorno ad un asse, in generale variabile da istante a istante, passante per il baricentro. In pratica i moti dei corpi rigidi possono essere molto complicati e noi procederemo al loro studio partendo dalle situazioni più semplici.

Sistema del baricentro

Moto del corpo rigido: equazioni del moto

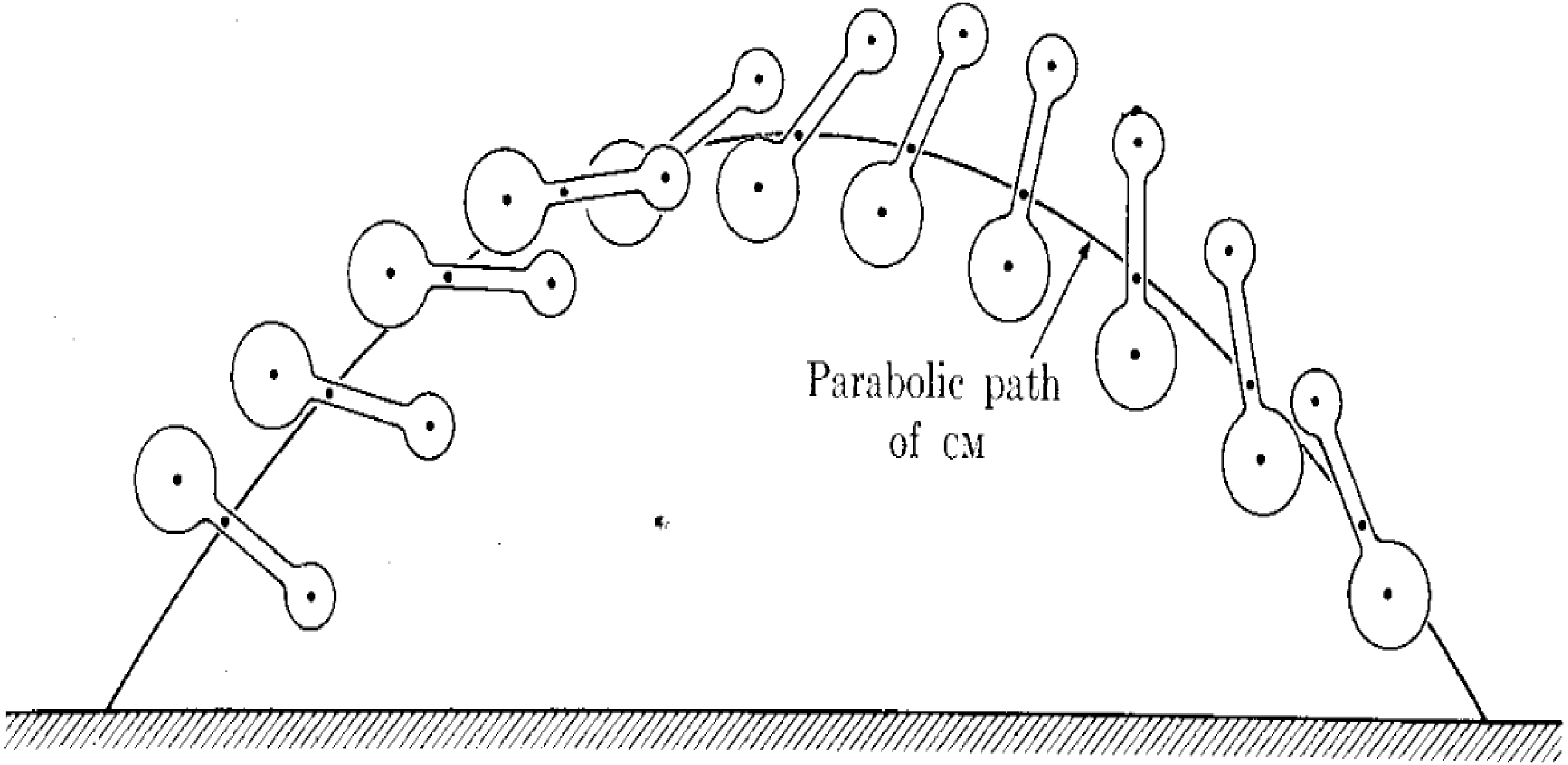


Fig. 10–3. Motion of a rigid body under the action of gravity. The CM describes the parabolic path corresponding to a particle of mass M under a force $M\mathbf{g}$, while the body rotates around the CM. Since the weight is applied at the CM, its torque around that point is zero and the angular momentum of the body relative to the CM remains constant during the motion.

$$\mathrm{F} = \frac{d\mathrm{P}}{dt} \qquad (8.1.1)$$

Sistema del laboratorio

$$\mathrm{M}_C = \frac{d\mathrm{L}_C}{dt} \qquad (8.1.3)$$

Sistema del baricentro

Moto del corpo rigido: lavoro delle forze interne = 0

Stabiliamo ancora un'importante proprietà dei moti rigidi: il lavoro delle forze interne in ogni moto rigido è nullo. Le forze interne si esercitano tra coppie di punti del corpo. Consideriamo una di queste coppie di punti. Le forze interne scambiate tra di essi sono uguali e contrarie tra loro e dirette come la congiungente dei due punti. Il lavoro fatto da ciascuna per un dato spostamento del corpo è uguale al modulo della forza per la proiezione dello spostamento del punto lungo la direzione della forza, cioè della congiungente i due punti. Dato che le forze sono uguali e contrarie, il lavoro complessivo fatto dalle due è uguale al loro modulo moltiplicato per la differenza degli spostamenti nella direzione della congiungente. Ma questa differenza non è altro che la variazione della distanza tra i due punti, che è nulla se il corpo è rigido.

Il lavoro delle forze interne in un sistema di punti materiali è responsabile del moto di un punto materiale rispetto all'altro. Per definizione di corpo rigido tale spostamento è nullo per cui risulta nullo anche il lavoro delle forze interne.

Moto del corpo rigido: sistemi di forze applicate

Si definiscono quindi come *equivalenti* due sistemi di forze applicate che abbiano la stessa risultante e lo stesso momento risultante.

Due sistemi di forze equivalenti non hanno invece in genere gli stessi effetti se applicati a corpi non rigidi. Consideriamo un esempio semplicissimo. Una coppia di forze di braccio nullo è un sistema di forze di risultante e momento risultante nulli, è quindi equivalente a nessuna forza. Se applichiamo le forze di una coppia di braccio nullo a due punti di un corpo rigido, esse tendono semplicemente ad allontanarli o avvicinarli a seconda del verso delle forze, a far variare cioè la loro distanza, che, per ipotesi, è invariabile. Il loro effetto sul moto o sulla quiete del corpo è quindi nullo. Se invece il corpo non è rigido, i due punti si avvicinano o si allontanano a seconda del caso. Si pensi ad esempio che il corpo sia una molla e i due punti ne siano gli estremi.

Moto del corpo rigido: sistemi di forze equivalenti

Si definiscono quindi come *equivalenti* due sistemi di forze applicate che abbiano la stessa risultante e lo stesso momento risultante.

se due sistemi di forze sono equivalenti rispetto ad un dato polo, lo sono rispetto ad ogni altro.

Consideriamo un generico sistema di forze di risultante $\mathbf{F}$ e momento risultante, rispetto al polo Ω, $\mathbf{M}_\Omega$. Esso è equivalente al sistema costituito da una forza pari ad $\mathbf{F}$ applicata nel polo Ω e da una coppia di forze di momento $\mathbf{M}_\Omega$.

Moto del corpo rigido: sistemi di forze equivalenti

(3) Un sistema di forze $\mathbf{F}_i$ tra loro parallele ed equiverse applicate nei punti P_i di raggio vettore $\mathbf{r}_i$ è equivalente ad una sola forza, pari alla loro risultante $\mathbf{F}$, applicata nel punto C, che ha come vettore di posizione

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} F_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} F_i} . \tag{8.2.2}$$

Il punto C è chiamato il *centro del sistema di forze*. Il teorema si dimostra facilmente.

Esempio particolare: Forza peso

$m_i\mathbf{g}$ applicate nei P_i e tra loro parallele. Il centro delle forze è definito dal raggio vettore

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} g m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} g m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} . \tag{8.2.3}$$

il centro di gravità di un corpo coincide col suo baricentro.

Il centro delle forze peso si chiama *centro di gravità* del corpo. Il peso totale del corpo,