1 01-GeoEuclidea-T09 - Commenti e soluzioni

Premessa

Questo tutorato è stato totalmente teorico e abbastanza impegnativo. Mi pare quindi sensato riassumere e commentare brevemente le cose chiave da tirarne fuori:

Esercizio 1

1. Date due varietà lineari esiste sempre almeno una coppia di minima distanza.
2. Si ha, a costo di dover invertire una matrice, una formula generale per trovare una coppia (e poi quindi tutte le coppie) di minima distanza. Tale formula è

$$\begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ \vdots \\ -d_m \end{pmatrix} = -(A^T A)^{-1} A^T (L_0 - M_0)$$

   dalla quale si trovano i coefficienti di L e M nella parametrizzazione fatta nel set up.
   [Non è detto che sia il metodo più veloce, a seconda del problema potrebbe esserci qualche idea che taglia un po' sui conti, però intanto è una via possibile e un fatto utile se vi capitasse un esercizio teorico sui punti di minima distanza.]
3. Di conseguenza si trova anche una formula quasi carina per trovare la distanza *[che in realtà se trovate prima i punti di minima distanza non vi serve usare, e che è anche meno bellina della formula dell'esercizio 2, però di nuovo se vi capita un esercizio teorico non si sa mai che non vi torni utile.]*

Esercizio 2

1. Il volume t-dimensionale si può definire in due modi diversi ed equivalenti. Uno è puramente algebrico, l'altro sfrutta un completamento ortonormale.
   [Anche questo fatto non è utile nei conti di un esercizio non teorico, però per un esercizio teorico (come questo esercizio 2, per esempio) può far comodo.]
2. È possibile calcolare la distanza tra due varietà senza doverne trovare una coppia di minima distanza ed è possibile farlo con la formula:

$$\operatorname{dist}(\mathbb{L}, \mathbb{M}) = \frac{\operatorname{Vol}_{k+l+m+1}(L_0 - M_0, v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_l, w_1, ..., w_m)}{\operatorname{Vol}_{k+l+m}(v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_l, w_1, ..., w_m)}.$$

[Questo invece fa comodo proprio nei conti. Se vi serve una distanza ma non è richiesto trovare una coppia di minima distanza, allora con questo trucco vi basta fare un po' di prodotti scalari e due determinanti anziché risolvere sistemi lineari.]

Esercizio 1 (Studio generale dei punti di minima distanza e della distanza tra varietà nello spazio euclideo.)
Nello spazio $\mathbb{R}^n$ con l'usuale prodotto scalare, siano:

- $\mathbb{L} = L_0 + V_{\mathbb{L}}$ e $\mathbb{L} = M_0 + V_{\mathbb{M}}$ due generiche varietà affini
- $\{v_1, ..., v_k\}$ una base di $V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}}$
- $\{v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_l\}$ una base di $V_{\mathbb{L}}$ (ottenuta completando la base dell'intersezione)
- $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_m\}$ una base di $V_{\mathbb{M}}$ (di nuovo ottenuta completando la base dell'intersezione)
- $L = L_0 + a_1v_1 + ... + a_kv_k + b_1u_1 + ... + b_lu_l$
  $M = M_0 + c_1v_1 + ... + c_kv_k + d_1w_1 + ... + d_mw_m$
  le parametrizzazioni di due generici punti uno in $\mathbb{L}$ e l'altro in $\mathbb{M}$
- $A \in M_{n\times(k+l+m)}(\mathbb{R})$ la matrice le cui colonne sono date, nell'ordine, dai vettori $v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_l, w_1, ..$

dove le basi prese sono totalmente generali, ovvero non sono supposte necessariamente ortonormali o anche solo ortogonali.

(a) Dimostrare preliminarmente questo fatto generale sulle matrici:
Se $v_1, v_2, ..., v_t$ sono t vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ e se si chiama A la matrice in $M_{n\times t}(\mathbb{R})$ le cui colonne sono $v_1, ..., v_t$, allora si ha che la matrice A^TA ha rango massimo (ed è quindi invertibile, essendo quadrata).

(b) (Da qui a seguire si fa riferimento al set up fatto all'inizio)
Si dimostri che due punti L ed M parametrizzati come sopra sono di minima distanza se e solo se vale l'uguaglianza

$$A^TA \begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 \\ \vdots \\ a_k - c_k \\ b_1 \\ \vdots \\ b_l \\ -d_1 \\ \vdots \\ -d_m \end{pmatrix} = -A^T(L_0 - M_0).$$

(c) Dedurre dai due punti precedenti l'esistenza di almeno un punto di minima distanza (e dedurre anche, volendo, la già nota caratterizzazione dell'insieme $\{(X,Y) \in \mathbb{L} \times \mathbb{M} : (X,Y) \text{ è una coppia di minima distanza } \}$).

(d) Dedurre (è immediato dai conti svolti ai passaggi precedenti) che ogni coppia di minima distanza (L, M) verifica l'uguaglianza

$$L - M = (L_0 - M_0) \; - \; A(A^T A)^{-1} A^T (L_0 - M_0)$$

e che dunque la distanza tra le due varietà $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ si può esprimere (e calcolare eventualmente) come

$$\mathrm{dist}(\mathbb{L}, \mathbb{M})^2 = ||L_0 - M_0||^2 \; - \; (L_0 - M_0)^T A (A^T A)^{-1} A^T (L_0 - M_0).$$

(e) Come si poteva ricavare la stessa formula per la distanza senza dover scrivere e risolvere il sistema lineare?

Svolgimento:

(a)

Sia $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix}$ e sia $\overline{v} := x_1 v_1 + ... + x_t v_t = Ax$. È ovvio che $\overline{v}$, in quanto combinazione lineare di $v_1, ..., v_t$, appartiene a $\langle v_1, ..., v_t \rangle$.

Ora si ha:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(A^T A) \quad &\Rightarrow \quad A^T A x = 0 \\ &\Rightarrow \quad A^T (Ax) = 0 \\ &\Rightarrow \quad A^T \overline{v} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \overline{v} \in \langle v_1, ..., v_t \rangle^{\perp} \end{aligned}$$

Ma questo vuol dire che se $x \in \ker(A^T A)$, allora $\overline{v}$ appartiene sia a $\langle v_1, ..., v_t \rangle$ che al suo ortogonale, e deve dunque essere nullo. Se $0 = \overline{v} = x_1 v_1 + ... + x_t v_t$, allora segue (dalla lineare indipendenza dei v_j) che $x = 0$.

Riassumendo si è mostrato che se $x \in \ker(A^T A)$ allora $x = 0$, il che equivale a dire che $\ker(A^T A) = \langle 0 \rangle$, ovvero a dire che $A^T A$ è invertibile.

(b)

si nota che

$$L - M = (L_0 - M_0) - A \begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 \\ \vdots \\ a_k - c_k \\ b_1 \\ \vdots \\ b_l \\ -d_1 \\ \vdots \\ -d_m \end{pmatrix} \tag{1}$$

e che il sistema lineare che deriva dall'imporre $L - M \in (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}})^{\perp}$ equivale all'equazione vettoriale

$$A^T(L - M) = 0. \tag{2}$$

La coppia (L, M) è di minima distanza se e solo se vale (2). Sostituendo (1) in (2) e riarrangiando i termini per linearità si ottiene l'equazione cercata.

(c)

Dal punto (a) si deduce l'invertibilità di $A^T A$, e da tale invertibilità si deduce l'esistenza e unicità di una soluzione per il sistema lineare individuato al punto (b). In particolare tale sistema ha soluzione

$$\begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 \\ \vdots \\ a_k - c_k \\ b_1 \\ \vdots \\ b_l \\ -d_1 \\ \vdots \\ -d_m \end{pmatrix} = -(A^T A)^{-1} A^T (L_0 - M_0) =: \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_l \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}.$$

Da questo si può anche vedere che le coppie di minima distanza sono tutte e sole le coppie del tipo (X, Y) con

$$X = L_0 + (\alpha_1 + \lambda_1)v_1 + ... + (\alpha_k + \lambda_k)v_k \; + \; \beta_1 u_1 + ... + \beta_l u_l$$

$$Y = M_0 \; + \; \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \; - \gamma_1 w_1 - ... - \gamma_m w_m$$

dove solo i parametri $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sono liberi di variare in $\mathbb{R}$ (e a ogni k-upla di tali parametri corrisponde una coppia diversa). In questo modo, posta (X_0, Y_0) la coppia ottenuta ponendo tutti i λ_j nulli, si ha che l'isieme di tutte le coppie di minima distanza è

$$\left\{ (X, Y) : \begin{cases} X = X_0 + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \\ Y = Y_0 + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k \\ \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R} \end{cases} \right\}$$

che, per definizione dei v_j (sono una base di $V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}}$), equivale alla già nota caratterizzazione

$$\left\{ (X, Y) : \begin{cases} X = X_0 + v \\ Y = Y_0 + v \\ v \in V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}} \end{cases} \right\}.$$

(d)

Per la discussione precedente ogni coppia di minima distanza (L, M) verifica

$$\begin{aligned} L - M \; &= L_0 - M_0) \; + \; (a_1 - c_1)v_1 + ... - d_m w_m \\ &= (L_0 - M_0) + A \begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ \vdots \\ -d_m \end{pmatrix} \\ &= (L_0 - M_0) \; - \; A(A^T A)^{-1} A^T (L_0 - M_0). \end{aligned}$$

A questo punto si calcola

$$dist(\mathbb{L}, \mathbb{M}) = ||L - M||^2 = (L - M) \cdot (L - M)$$

usando la formula per $(L - M)$ appena trovata.

(e) Un modo più rapido per ricavare la stessa cosa è ragionare in termini di proiezioni ortogonali: vorremmo la componente di $L_0 - M_0$ che è ortogonale a $V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}$, di conseguenza scrivo la proiezione ortogonale su $V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}} = \langle v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_l, w_1, ..., w_m \rangle$ e sottraggo a $L_0 - M_0$ la sua componente parallela a $V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}$.

Esercizio 2 (Formula per la distanza tra varietà usando i volumi)
Si consideri lo stesso set up e le stesse notazioni dell'esercizio 1 ($\mathbb{R}^n$, con due varietà $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$, i punti base, le basi degli spazi direttori, le parametrizzazioni e la matrice A).
Ricordiamo inoltre che, dati t vettori linearmente indipendenti $v_1, ..., v_t$, si definisce il volume $\mathrm{Vol}_t(v_1, ..., v_t)$ come

$$\mathrm{Vol}_t(v_1, ..., v_t) := \sqrt{\det\left((v_i \cdot v_j)_{1 \leq i,j \leq t}\right)}.$$

(a) Si mostri che, in generale, $\mathrm{Vol}_t(v_1, ..., v_t)$ si può definire equivalentemente in questo modo: si considera una qualsiasi base ortonormale $\{v_{t+1}, ..., v_n\}$ di $\langle v_1, ..., v_t \rangle^{\perp}$, si definisce la matrice quadrata B avente per colonne i vettori $v_1, ..., v_n$ e si pone

$$\mathrm{Vol}_t(v_1, ..., v_t) := |\det(B)|\,.$$

(b) Si dimostri la formula sulle distanze

$$\mathrm{dist}(\mathbb{L}, \mathbb{M}) = \frac{\mathrm{Vol}_{k+l+m+1}(L_0 - M_0, v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_l, w_1, ..., w_m)}{\mathrm{Vol}_{k+l+m}(v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_l, w_1, ..., w_m)}.$$

Soluzione:

(a)

Si ha

$$\begin{aligned}
\det(B)^2 &= \det(B)\det(B) \\
&= \det(B^T)\det(B) \\
&= \det(B^T B) \\
&= \det\begin{pmatrix} (v_i \cdot v_j)_{1\leq i,j\leq t} & 0_{t\times(n-t)} \\ 0_{(n-t)\times t} & \mathbb{1}_{n-t} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Vol}_t(V_1, ..., v_t)^2
\end{aligned}.$$

La successione di uguaglianze fatta mostra sia il risultato desiderato sia il fatto che la definizione di volume t-dimensionale tramite il completamento ortogonale descritto non dipende dal completamento che si sceglie (ed è quindi ben posta).

(b)

Richiamo 1 (Gram Schmidt)**.** *Dato un sottospazio vettoriale Y (di dimensione t) di $\mathbb{R}^n$ e data una generica base $\{y_1, ..., y_t\}$ di Y, esiste una base $\{\overline{y}_1, ..., \overline{y}_t\}$ di Y che sia ortonormale e che mantenga anche la bandiera di sottospazi, ovvero tale che*

$$\begin{array}{lcl} \langle y_1 \rangle & = & \langle \overline{y}_1 \rangle \\ \langle y_1, y_2 \rangle & = & \langle \overline{y}_1, \overline{y}_2 \rangle \\ & \vdots & \\ \langle y_1, y_2, ..., y_t \rangle & = & \langle \overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_t \rangle. \end{array}$$

Assumiamo intanto che le due varietà abbiano intersezione vuota, altrimenti la distanza è banalmente 0 (e la formula rimane valida, in quanto il volume al numeratore diventa nullo).

Usiamo dunque Gram-Schmidt sul sottospazio $\langle v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_l, w_1, ..., w_m, L_0 - M_0 \rangle$ per individuarne una base $\{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_k, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_l, \overline{w}_1, ..., \overline{w}_m, \overline{x}\}$ che sia ortonormale e mantenga la bandiera di sottospazi. A questo punto si può scrivere $L_0 - M_0$ nella nuova base e notare che risulta dunque scritto nella forma

$$L_0 - M_0 = \overline{v} + \alpha \overline{x}$$

con $v \in \{\overline{v}_1, ..., \overline{v}_k, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_l, \overline{w}_1, ..., \overline{w}_m \rangle = \langle v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_l, w_1, ..., w_m \rangle$.

Individuiamo una qualsiasi base ortonormale $\{y_1, ..., y_{n-k-l-m-1}\}$ di $\langle v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_l, w_1, ..., w_m, L_0 - M_0 \rangle^\perp$. Notiamo che:

Oss1: $\mathrm{dist}(\mathbb{L}, \mathbb{M}) = |\alpha|$

(perché? Intuitivamente è il modulo della componente ortogonale del vettore $L_0 - M_0$, formalmente va individuata una coppia di minima distanza il cui vettore differenza sia $\alpha \overline{x}$. Per farlo scrivete $\overline{v}$ nella base non ortonormale, poi individuate de punti L ed M opportuni.)

Oss2: $\{\overline{x}, y_1, ..., y_{n-k-l-m-1}\}$ è base ortonormale di $\langle v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_l, w_1, ..., w_m \rangle^\perp$

Oss3: Tramite operazioni di Gauss si trova

$$\det(v_1, ..., w_m, L_0 - M_0, y_1, ..., y_{n-k-l-m-1}) = \alpha \det(v_1, ..., w_m, \overline{x}, y_1, ..., y_{n-k-l-m-1})$$

Mettendo insieme le tre osservazioni precedenti e la definizione di volume dimostrata nel punto (a) si è dimostrata la tesi.