Affinità che fissano/scambiano due varietà

Ok, prima un fatto abbastanza di base, ma fondamentale:

Immagine di una varietà tramite una trasformazione affine
Sia dato uno spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione n su un campo C con spazio delle traslazioni $\mathbb{T}$. Si consideri una sottovarietà lineare $\mathbb{L} = L + V_{\mathbb{L}}$ di $\mathbb{A}$ e si consideri una trasformazione affine $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Sia $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ la soggiacente lineare a F. Allora l'immagine di $\mathbb{L}$ tramite F verifica l'uguaglianza

$$F(\mathbb{L}) = F(L) + \phi(V_{\mathbb{L}}).$$

Trasformazione affine che fissa una varietà

Si consideri un esercizio del tipo:

> **Esercizio:** Data una varietà $\mathbb{L} = L + \langle v_1, v_2 \rangle$ in uno spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione 4, determinare tutte le trasformazioni affini F tali che $F(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$.

In questo tipo di esercizio, a meno che non ci siano indicazioni specifiche al riguardo (e se proprio volete essere sicuri chiedere al professore), non è previsto che lavoriate nel sistema di riferimento di partenza (quello in cui vi vengono scritti L, v_1 e v_2. **Potete scegliere voi, e dovete poi descriverlo ovviamente**, un sistema di riferimento in cui parametrizzare tutte le trasformazioni con la proprietà richiesta.

A questo punto l'esercizio si risolve relativamente in fretta dicendo che completate $\{v_1, v_2\}$ a base dello spazio delle traslazioni con due opportuni vettori w_1, w_2 (che nemmeno serve scrivere, anche se boh, potete farlo, non è difficile) e che scegliete come sistema di riferimento

$$\{L;\ v_1, v_2, w_1, w_2\}.$$

In questo s.d.r. avete che $\mathbb{L}$ si parametrizza come

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \hline \alpha \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in C \right\}.$$

A questo punto ci sono tutte le premesse per fare tutte le seguenti doppie implicazioni:

$$F(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L} \iff \begin{array}{l} F(L) \in \mathbb{L} \\ \text{e } \phi(V_{\mathbb{L}}) \leq V_{\mathbb{L}} \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} F(L) = L + \alpha v_1 + \beta v_2 & \exists \alpha, \beta \\ \phi(v_1) = a v_1 + c v_2 & \exists a, c \\ \phi(v_2) = b v_1 + d v_2 & \exists b, d \end{cases}$$

$\iff$ Le prime tre colonne della matrice di F nel riferimento scelto sono

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \alpha & a & b & * & * \\ \beta & c & d & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

Dove gli asterischi vogliono dire che lì ci può essere qualsiasi valore, ovvero che se dovessi parametrizzare tutte le matrici con la proprietà chiesta basterebbe inserire 8 nuovi parametri in quegli spot lì.

Trasformazione affine che fissa due varietà sghembe

Si consideri un esercizio di questo tipo:

> **Esercizio:** Dati un piano $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$ e una retta $r = R + \langle w \rangle$ sghembi in uno spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione 4, determinare tutte le trasformazioni affini F tali che $F(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$ e $F(r) \subset r$.

Scelta del sistema di riferimento:

$$\{P;\ v_1, v_2, w, R - P\}.$$

È un s.d.r. perché le due varietà sono sghembe, e quindi (per dimensione) complementari. Si ha che

- $R = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$.

- La parametrizzazione di r nel nuovo s.d.r è $r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ z \\ 1 \end{pmatrix} : z \in C \right\}$.

- le doppie implicazioni viste per $\mathbb{L}$ nell'esercizio precedente valgono allo stesso modo. quindi posso già parametrizzare le prime 3 colonne della matrice come all'esercizio precedente.

- Trovate, in modo analogo a come fatto per $\mathbb{L}$, che la condizione che r vada in se stessa si traduce in

$$\phi(R-P) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \phi(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hline -\alpha \\ -\beta \\ e \\ 0 \end{pmatrix} \quad \exists z, e.$$

Dall'ultima affermazione si deduce che le matrici (nel s.d.r. scelto) che rispettano la proprietà scelta sono tutte e sole quelle parametrizzare come

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \alpha & a & b & 0 & -\alpha \\ \beta & c & d & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & e & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Trasformazione affine che fissa due varietà non sghembe

Si consideri un esercizio di questo tipo:

> **Esercizio:** Dati due piani $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\sigma = S + \langle w_1, w_2 \rangle$ in uno spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione 5, determinare tutte le trasformazioni affini F tali che $F(\pi) \subset \pi$ e $F(\sigma) \subset \sigma$.

La risposta cambia a seconda che i due piani siano sghembi, incidenti, paralleli... in un esercizio vero e proprio avreste le varietà date esplicitamente, quindi potreste trovarne la posizione reciproca e andare avanti.
Pensateci un po' da soli, perché è simile ai casi sopra. L'unica cosa che cambia è che:

- Se sono incidenti, allora le condizioni richieste si "sommano" sull'intersezione dei due piani, e in particolare vedete che l'intersezione deve andare in se stessa.

- Se gli spazi direttori non sono in somma diretta allora la condizioni di appartenenza richieste si "sommano" sull'intersezione degli spazi direttori.

- Come s.d.r. conviene sceglierne uno che abbia:

  - L'origine in un punto dell'intersezione (se sono incidenti)
  - una base di vettori dell'intersezione degli spazi direttori (se gli spazi direttori hanno intersezione non banale).

Trasformazione che scambia due varietà sghembe

Si consideri un esercizio di questo tipo:

> **Esercizio:** Dati un piano $\pi = P + \langle v_1, v_2 \rangle$ e una retta $r = R + \langle w \rangle$ sghembi in uno spazio affine $\mathbb{A}$ di dimensione 4, determinare tutte le trasformazioni affini F tali che $F(\mathbb{L}) \subset r$ e $F(r) \subset \mathbb{L}$.

Vi mettete nello stesso s.d.r. scelto nel caso in cui dovevamo fissarli e trovate che le matrici con la proprietà richiesta sono tutte e sole quelle che potete scrivere come

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & d & \beta \\ z & a & b & 0 & -z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

per qualche scelta di parametri $\alpha, \beta, a, b, c, d, z$ nel campo.