Soluzione esercizio 1

Testo dell'esercizio:
Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine e F una trasformazione affine dello spazio in se stesso.

1. Mostrare che la trasformazione è idempotente (ovvero $F \circ F = F$) se e solo se è una proiezione affine (su una qualche sottovarietà rispetto ad una qualche direzione).

2. Mostrare che la trasformazione è autoinversa (ovvero $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$) se e solo se è una simmetria affine.

Richiami e fatti utili

Lo stesso fatto negli spazi vettoriali: Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Allora:

- Una applicazione lineare ϕ è una proiezione (sulla sua immagine di direzione il suo kernel) se e solo se è idempotente (ovvero $\phi^2 = \phi$).
- Una applicazione lineare ϕ è una simmetria (con spazio fisso e direzione dati rispettivamente dall'autospazio di autovalore 1 e da quello di autovalore -1) se e solo se è autoinversa (ovvero $\phi^2 = \mathrm{id}_V$).

Svolgimento
Sia

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ \cdots \ 0 \\ \hline v & A \end{array}\right)$$

La matrice associata alla applicazione lineare in questione nel sistema di riferimento affine scelto. Chiaramente v è un vettore colonna e A è una matrice $n \times n$.

- Se $F \circ F = F$, allora $\overline{A}^2 = \overline{A}$. Esplicitando i conti (fatti a blocchi) con la notazione sopra, questo vuol dire che

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline v + Av & A^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline v & A \end{array}\right).$$

  Da ciò si deduce che l'applicazione lineare soggiacente è una proiezione sulla sua immagine $U := \mathrm{Im}(A)$ di direzione il suo kernel $W := \mathrm{Ker}(A)$.
  Essendo F idempotente il punto in cui F manda l'origine è un punto fisso (perché $F(F(O)) = F(O)$). Ma allora la conclusione è raggiunta: F è la proiezione sulla varietà $\mathbb{L} = (O + v) + U$ di direzione W.

- Se F è autoinversa, allora si trova, sempre facendo i conti a blocchi, che

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline v + Av & A^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbb{1}_n \end{array}\right).$$

  Ma allora A è la matrice di una simmetria avente spazio fisso il suo autospazio V_1 di autovalore 1 e di direzione il suo autospazio V_{-1} di autovalore -1.
  Osservando che il punto

$$P = O + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}Av$$

  è un punto fisso, si conclude che F la simmetria di spazio fisso $\mathbb{L} = P + V_1$ (dove con P si intende quello appena definito) e di direzione V_{-1}.