Soluzione esercizio 2

Testo dell'esercizio:
In un generico spazio affine di dimensione 5 sono dati due piani complementari π e σ. Mostrare che per ogni punto P non appartenente a nessuno dei due piani esiste una unica retta r_P passante per P e incidente o parallela con π e σ, specificando per quali punti P la retta r_P è incidente entrambi, e per quali risulta parallela a π o a σ o a entrambi. Discutere le posizioni reciproche di tali rette al variare del punto P.

Svolgimento:
Commento 1: le osservazioni e i passaggi qui sotto ve li presento già pronti, in un certo senso. In esame uno si mette a fare considerazioni, a smanettare, così poi (sperabilmente) trova un po' di cose e prova a metterle insieme.

Commento 2: Per farsi venire delle idee può tornare utile rifarsi a casi più semplici e visualizzabili. Per questo esercizio ad esempio si può ragionare sul caso di due rette complementari in $\mathbb{A}^3$ (in modo che ci siano proprietà in comune con l'esercizio, ma che possiate disegnarle). Poi cercate di generalizzare le idee del caso semplice al caso dell'esercizio.

Siano $\pi = A + V_\pi$ e $\sigma = B + V_\sigma$.
Per prima cosa mostriamo l'esistenza delle rette r_P con le proprietà richieste.

Oss1: Per un qualsiasi generico punto $P \notin \pi$ vale la seguente doppia implicazione:

$$\begin{array}{l} r \text{ è una retta per } P \\ \text{parallela o incidente a } \pi \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} r \text{ è una retta per } P \\ \text{e } r \subset \pi \vee P \end{array}$$

e una analoga implicazione vale per ogni punto $P \notin \sigma$.

Tale osservazione implica che una qualsiasi retta con le proprietà richieste deve appartenere alla varietà affine $\big(\pi \vee P\big) \wedge \big(\sigma \vee P\big)$.

Oss2: Dato un generico punto P che non appartenga né a π né a σ, la varietà lineare $\big(\pi \vee P\big) \wedge \big(\sigma \vee P\big)$ ha esattamente dimensione uguale a 1 per le formule di Grassmann.

Oss3: La varietà $\big(\pi \vee P\big) \wedge \big(\sigma \vee P\big)$, nelle stesse ipotesi della Oss2, è chiaramente passante per P.

Prima conclusione: Dalle Osservazioni 1, 2 e 3, si deduce facilmente l'esistenza e unicità delle rette r_P cercate, e si deduce anche che esse sono date dalla varietà affine

$$r_P = \big(\pi \vee P\big) \wedge \big(\sigma \vee P\big).$$

Ora ci concentriamo nello studio della posizione reciproca di tali rette con π e σ.

Oss4: Una qualsiasi retta r non può essere parallela a entrambi π e σ, perché i due piani hanno spazi direttori con intersezione banale.

Oss5: Se P appartiene alla varietà lineare $\pi + V_\sigma = A + \big(V_\pi + V_\sigma\big)$ ma non appartiene a π, allora c'è almeno una retta che verifica le proprietà richieste. Infatti, siccome P è del tipo $P = A' + v$, per qualche$A' \in \pi$ e qualche $v \in V_\sigma$ necessariamente non nullo (perché $P \notin \pi$), allora la retta $r_P := A' + \langle v \rangle$ è incidente a π e parallela a σ.

Oss6: Similmente, se P appartiene a $\sigma + V_\pi$ e non appartiene a σ, allora esiste una retta per P che sia incidente a σ e parallela a π.

Oss5*: Se la retta r_P individuata nella "Prima conclusione" è parallela a σ e incidente a π, allora $P \in \pi + V_\sigma$ (facile da mostrare, vedetelo per esercizio).

Oss6*: Se la retta r_P individuata nella "Prima conclusione" è parallela a π e incidente a σ, allora $P \in \sigma + V_\pi$ (analogo alla cosa precedente).

Seconda conclusione: Dalle osservazioni 4, 5, 6, 5* e 6* si deduce che, dato un punto P che non appartiene né a π né a σ:

- r_P è parallela a σ e incidente a π se e solo se $P \in \pi + V_\sigma$
- r_P è parallela a π e incidente a σ se e solo se $P \in \sigma + V_\pi$
- r_P è incidente a entrambi i piani π e σ nel caso di tutti e soli i punti rimanenti, cioè per tutti e soli i punti nell'insieme

$$\mathbb{A}^5 \setminus \Big(\big(\pi + V_\sigma\big) \cup \big(\sigma + V_\pi\big) \Big).$$

Come ultima cosa rimangono da studiare le posizioni reciproche delle rette.Si considerino due punti P e P' che al solito non appartengano a π o a σ.

Oss7: Se r_P e $r_{P'}$ sono incidenti in un qualche punto Q, allora o sono coincidenti, oppure l'unico punto Q di incidenza deve stare su uno dei due piani π o σ (altrimenti si avrebbero due rette distinte passanti per Q e che siano incidenti o paralle a π e σ, ma questo contraddirebbe la "Prima conclusione").

Oss8: Se $P' \in r_P$, allora $r'_P \equiv r_P$ (sempre per via dell'unicità dedotta nella "Prima conclusione").

Oss9: Dato un generico punto $R \in \pi$, si ha che la retta r_P passa per R se e solo se $P \in \sigma \vee R$ (questo include sia i casi in cui r_P è parallela a σ sia quelli in cui vi è incidente).
Una affermazione analoga vale se si considera un generico punto $S \in \sigma$ e si considera la varietà $\pi \vee S$.

Oss10: Se la retta r_P interseca π in un punto R, allora $\sigma \vee R = \sigma \vee P$ (si può mostrare velocemente sfruttando la Oss9 e facendo considerazioni dimensionali).

Terza conclusione: Due rette r_P e $r_{P'}$ sono incidenti se e solo se si verifica *almeno una* delle seguenti due:

- r_P è incidente con π e $P' \in \sigma \vee P$.
- r_P è incidente con σ e $P' \in \pi \vee P$.

In particolare r_P e $r_{P'}$ sono coincidenti se e solo se $P' \in r_P$.

Oss11: Se r_P non è parallela a nessuno dei due piani (e quindi è incidente ad entrambi in due punti $R \in \pi$ e $S \in \sigma$), allora r'_P deve essere o coincidente con r_P (se $P' \in r_P$) oppure non parallela con r_P.

Dimostrazione della Oss11.
Se $r_{P'}$ fosse parallela e non coincidente con r_P, allora troverei che:

- $r_{P'}$ non è parallela a nessuno dei due piani (perché ho assunto che r_P non lo sia); quindi li interseca in due punti $R' \in \pi$ e $S' \in \sigma$.
- Le rette $R \vee R'$ e $S \vee S'$ sono contenute rispettivamente in π e σ e si intersecano (si dimostra usando Grassmann, dimostrando che $\dim\big((A \vee A') \wedge (B \vee B')\big) = 0$).

Questo però è assurdo! Perché vorrebbe dire che in particolare anche i piani π e σ si intersecano, il che sappiamo essere falso perché i due piani sono sghembi. □

Questa osservazione ci dice che se due rette sono parallele, allora devono essere parallele ad uno dei due piani (e ovviamente deve essere lo stesso piano, altrimenti non possono essere parallele).

Oss12: Se r_P e $r_{P'}$ sono entrambe parallele a π (e quindi entrambe incidenti a σ), allora sono parallele tra loro se e solo se $P' \in \sigma \vee P$.

Dimostrazione della Oss12.
Per la "Seconda conclusione" sappiamo che $P, P' \in \sigma + V_\pi$.
Quindi $P = S + v$ e $P' = S' + v'$ con $S, S' \in \sigma$ e $v, v' \in V_\pi \setminus \{0\}$.
Prima implicazione
Se $P' \in \sigma \vee P$, allora $P - P' \in V_\sigma + \langle v \rangle$, ovvero

$$(S - S') + v - v' \in V_\sigma + \langle v \rangle,$$

ma allora

$$v - v' = (S' - S) + \overline{v} + \alpha v \qquad \exists \overline{v} \in V_\sigma, \exists \alpha \in K.$$

Si conclude che

$$v' = (S - S') - \overline{v} + (1 - \alpha) v$$

e che quindi

$$\begin{aligned} P' &= S' + \big((S - S') - \overline{v} + (1 - \alpha)v\big) \\ &= \Bigg(S' + (S - S') - \overline{v}\Bigg) + (1 - \alpha)v. \end{aligned}$$

Il punto nella parentesi grande appartiene a σ e il vettore $(1 - \alpha)v$ è in V_π. Segue che necessariamente l'espressione nella parentesi grande è uguale a S' e che

$$(1 - \alpha)v = v'.$$

Quindi v e v' sono uno multiplo dell'altro e le due rette r_P e $r_{P'}$ sono parallele (perché r_P e $r_{P'}$ sono come si è visto nelle Oss5 e Oss6).
Seconda implicazione:
Se le due rette sono parallele, allora si deduce dalle due uguaglianze

$$\begin{aligned} r_P &= S + \langle v \rangle, \\ r_{P'} &= S' + \langle v \rangle \end{aligned}$$

che v e v' sono uno multiplo dell'altro. Allora la conclusione è raggiunta, perché

$$\begin{aligned} \sigma \vee P &= S + \big(V_\sigma + \langle v \rangle\big) \\ &= S' + \big(V_\sigma + \langle v' \rangle\big) \\ &= \sigma \vee P', \end{aligned}$$

e in particolare quindi $P' \in \sigma \vee P$. $\square$

Quarta e ultima conclusione: Le rette r_P e $r_{P'}$ sono parallele se e solo se si verifica una delle seguenti due condizioni:

- $P, P' \in \pi + V_\sigma$ e $P' \in \pi \vee P$.
- $P, P' \in \sigma + V_\pi$ e $P' \in \sigma \vee P$.