Esercizi sulla formula di Hopf-Lax.

1. Consideriamo $u_t + \frac{(u_x)^2}{2} = 0$ in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$

a) Calcolare la formula di H-L per

$$u(x,0) = g(x) = -x^- = \begin{cases} x, & \text{per } x < 0 \\ 0, & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

e dire se è soluzione generalizzata semiconcava (nel senso del Teor. di Kružkov-Douglis)

b) Idem per $g(x) = x^+ = \begin{cases} x, & \text{per } x > 0 \\ 0, & \text{per } x \leq 0. \end{cases}$

c) Per entrambi i casi a) e b) calcolare $v(x,t) = u_x(x,t)$, disegnarne il profilo in x per $t > 0$ fissato, e riflettere sul significato per la legge di conservazione $v_t + \left(\frac{v^2}{2}\right)_x = 0$.

2. Consideriamo $u_t + \frac{|Du|^2}{2} = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

a) Sia $u(x,0) = g(x) = |x|$. Calcolare la formula di H-L e dire se è soluz. generalizz. semiconcava del problema di Cauchy.

b) Idem per $g(x) = -|x|$.

c) Idem per $g(x) = a|x|^2$, e discutere l'intervallo di esistenza di $u(x,t)$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

---

3. Per $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e superlineare provare che

$$\inf_{t>0} t H^*\left(\frac{v}{t}\right) = \max_{\{p : H(p) = 0\}} p \cdot v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

4. Consideriamo (CP) $\begin{cases} u_t + H(D_x u) = 0 & , \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & , \end{cases}$

con H conv. e superl., g Lip. e limitata.

a) Se $H(p) \geq H(0) = 0$ $\forall p \in \mathbb{R}^n$, provare che la soluz. (H-L) di (CP) converge per $t \to +\infty$ loc. unif. a

$$u_\infty(x) := \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(y) + \max_{\{p : H(p) = 0\}} (x-y) \cdot p \right\}.$$

(Sugg.: usare l'Es. 3).

b) Se $H(p) \geq H(0) = \alpha$ $\forall p$ e $H(p) > \alpha$ per $p \neq 0$, e detta $u(x,t)$ la form. di H-L per (CP), provare che

$$\lim_{t \to +\infty} (u(x,t) + t\alpha) = \inf_{\mathbb{R}^n} g$$

localmente uniformemente.