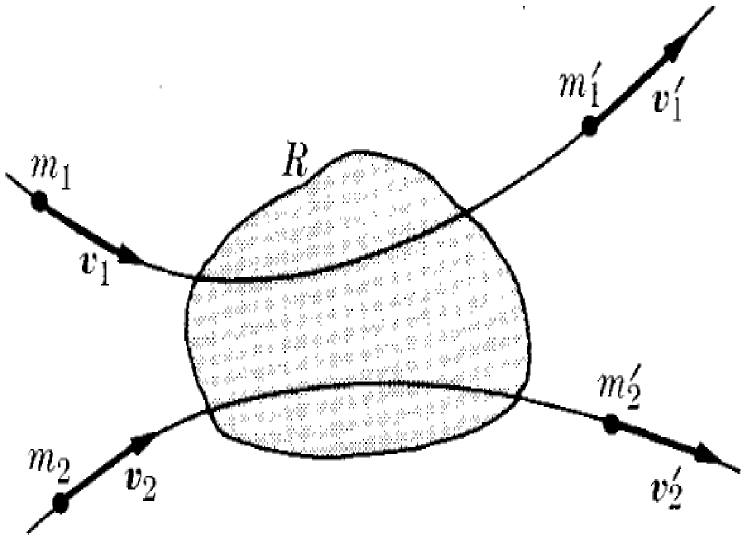
Gli urti

In un qualsiasi processo di urto si possono distinguere tre fasi: nella prima fase (stato iniziale) i due corpi sono distanti e non interagiscono tra loro (la forza di interazione è trascurabile), la seconda fase è quella dell'urto vero e proprio; essa dura un intervallo di tempo limitato, diciamolo Δt, durante il quale i due corpi agiscono l'uno sull'altro con forze interne (cioè *inter*agiscono); le forze interne sono così intense che le forze esterne, qualora presenti, possono essere trascurate durante Δt (è questa sostanzialmente la definizione di urto); nella terza fase (stato finale) i corpi non interagiscono più e si allontanano.

Cominciamo con lo specificare che quando si parla di urto tra due corpi non si intende necessariamente che i due corpi vengano a contatto.
esempio è quello dell'urto tra due ioni della stessa carica: quando questi sono abbastanza lontani tra loro non interagiscono e si muovono, ciascuno, con velocità costante; quando sono abbastanza vicini si respingono l'un l'altro; le loro traiettorie si incurvano, descrivono ciascuna un arco per poi allontanarsi e diventare di nuovo rettilinee.

Si noti che durante l'urto i due corpi possono modificarsi: la loro energia interna può aumentare o diminuire, uno o entrambi possono spezzarsi in frammenti oppure i due possono attaccarsi insieme. Non è quindi detto che dopo l'urto ci siano due corpi, ce ne può essere un numero qualunque.

Dato che durante l'urto agiscono solo forze interne, possiamo affermare in tutta generalità che le quantità di moto totali prima e dopo l'urto sono uguali.



$$\boxed{p_{i1} + p_{i2} = p_{f1} + p_{f2}}$$

Gli urti

Molto spesso si opera con una delle due particelle inizialmente ferma; se non lo fosse, si potrebbe comunque sempre porsi in queste condizioni con un cambio di riferimento. Il sistema di riferimento in cui una delle particelle è ferma si chiama *riferimento del laboratorio*. La particella ferma si chiama *bersaglio*.

In figura 6.17.2 è rappresentato lo stato iniziale dell'urto tra due corpi, che pensiamo sferici. Uno dei due corpi è fermo. La distanza tra la retta su cui si muove il centro del corpo in moto ed il centro del bersaglio si chiama *parametro d'urto*, e lo indicheremo con b. Lo stato finale dipende ovviamente da b. Se i due corpi sono due sfere rigide, quando esse si toccano si scambiano una forza diretta come la normale alla superficie di contatto e in quella direzione, che dipende da b, avviene la variazione di quantità di moto.

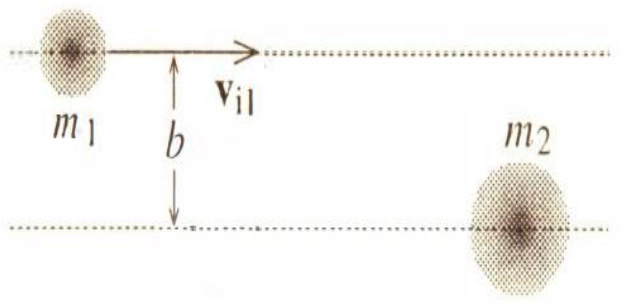


FIGURA 6.17.2

supporremo che né prima né dopo l'urto ci siano rotazioni, ma solo moti traslatori.

Il caso più semplice è quello in cui il parametro d'urto è nullo, quello degli esperimenti di Newton con i pendoli. L'urto si dice allora *centrale*. In questo caso la particella in moto si avvicina lungo la retta che passa per il centro del bersaglio. Dopo l'urto entrambe le particelle si muovono su questa stessa retta.

Gli urti elastici

Se ciascuno dei due corpi dopo l'urto è lo stesso di prima, inclusa la sua energia interna, e se l'energia totale è uguale dopo e prima dell'urto, si parla di *urto elastico*. Dato che possiamo trascurare le forze esterne e dato che le forze interne di interazione sono nulle nello stato iniziale e in quello finale, se le energie totali prima e dopo l'urto sono uguali tra loro, lo sono anche le energie cinetiche totali. Indicando con m_1 e m_2 le masse dei due corpi, abbiamo

$$\frac{1}{2}m_1 v_{i1}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{i2}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{f2}^2$$

$$m_1 \mathbf{v}_{i1} + m_2 \mathbf{v}_{i2} = m_1 \mathbf{v}_{f1} + m_2 \mathbf{v}_{f2}$$

6 incognite, le 3 componenti della velocità finale del primo punto materiale e le 3 componenti della velocità finale del secondo punto materiale e solo 4 equazioni

Gli urti elastici fra punti materiali che vengono a contatto: urto centrale

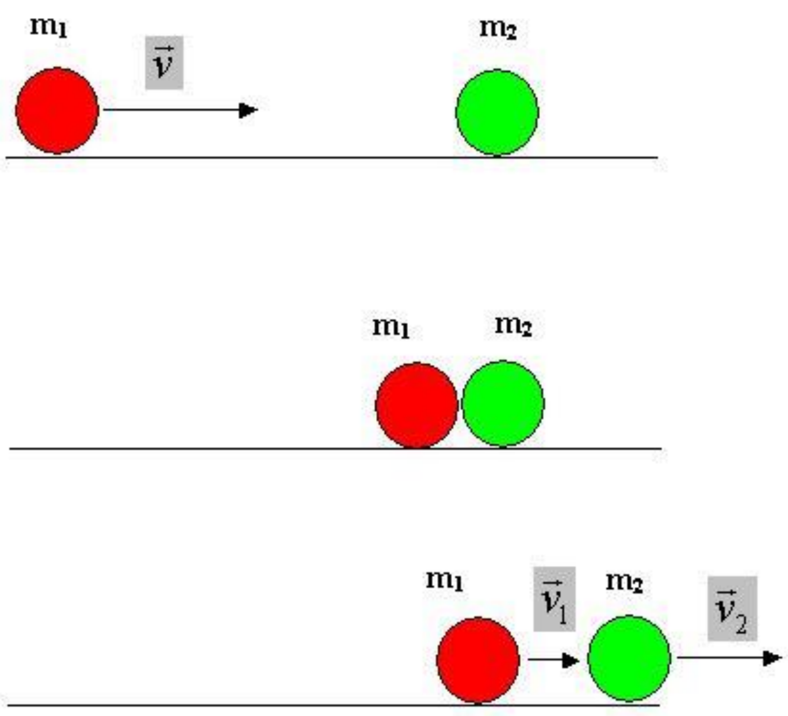
Nella legge di conservazione della quantità di moto possiamo allora considerare i moduli delle velocità, ottenendo

$$m_2 v_{f2} = m_1 (v_{i1} - v_{f1})$$

$$m_2 v_{f2}^2 = m_1 (v_{i1}^2 - v_{f1}^2)$$

2 equazioni e 2 incognite

$$v_{f1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{i1}, \qquad v_{f2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{i1}$$



Vediamo cosa ci dice la prima di questa relazioni, che dà la velocità della prima particella dopo l'urto. Se la massa della prima particella, quella che prima dell'urto si muove, è minore di quella del bersaglio, $v_{f1} < 0$, cioè dopo l'urto essa torna indietro (rimbalza), se la sua massa è maggiore di quella del bersaglio, continua a muoversi nello stesso verso, ma con velocità ridotta. È interessante il caso in cui le due masse sono uguali. Allora le velocità dopo l'urto sono $v_{f1} = 0$ e $v_{f2} = v_{i1}$, cioè è come se le due particelle si scambiassero le velocità. Lo si può vedere facilmente con due pendoli di massa uguale.

Se infine $m_2 \gg m_1$, allora $v_{f1} = -v_{i1}$ e $v_{f2} = 0$ c

Sistema di riferimento del laboratorio

Urti elastico di un punto materiale contro una parete

Un esempio è quello dell'urto elastico di una biglia contro una parete. Spesso l'urto si può pensare elastico. La situazione è rappresentata in figura 6.17.3.

Se la parete, come supporremo, è liscia, la forza che essa esercita sulla biglia è normale alla parete. Possiamo allora scomporre il moto della biglia nelle sue componenti, una normale, una parallela alla parete. Quest'ultima non viene alterata dall'urto, le componenti della velocità parallele alla parete prima e dopo l'urto sono cioè uguali. Alla componente normale del moto si possono applicare i risultati trovati per l'urto centrale: la particella 1 è la biglia, la particella 2 è la parete. Quindi è $m_2 \gg m_1$. Dopo l'urto la parete è ancora ferma e la velocità (la componente normale) della biglia ha cambiato segno.

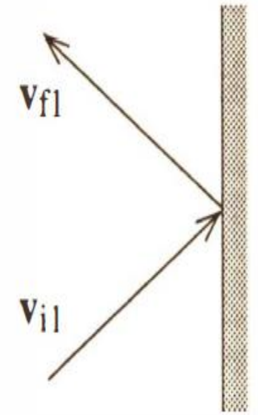


FIGURA 6.17.3

Urto elastico contro un bersaglio con parametro d'urto *b* non nullo $m_2 >> m_1$

$$m_1 v_{i1}^2 = m_1 v_{f1}^2 + m_2 v_{f2}^2$$

$$m_1 \mathbf{v}_{i1} = m_1 \mathbf{v}_{f1} + m_2 \mathbf{v}_{f2}$$

Equazioni di conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto

Consideriamo il caso in cui la massa della particella bersaglio è molto grande rispetto a quella della particella in moto cioè $m_2 \gg m_1$. La velocità dopo l'urto della particella bersaglio è

$$\mathbf{v}_{f2} = \frac{m_1}{m_2}(\mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_{f1})$$

che è piccolissima se $m_1/m_2 \ll 1$. La particella urtata acquista quindi una velocità piccolissima e piccolissima sarà anche la sua energia cinetica. Al limite in cui la massa della particella urtata diviene infinita, la sua velocità e la sua energia dopo l'urto sono nulle. Un vagone ferroviario urtato da una palla non si mette in moto, né lo fa il tavolo da bigliardo quando una palla urta una sponda. Di conseguenza l'energia della particella leggera dopo l'urto è uguale a quella prima. Nell'urto di una particella leggera contro una pesante può variare solo la velocità della prima, e può farlo solo in direzione mentre il modulo rimane costante.

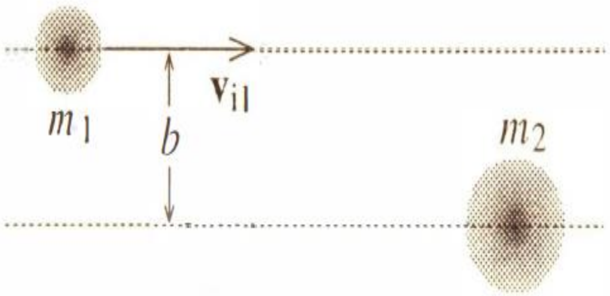


FIGURA 6.17.2

Urto elastico contro un bersaglio con parametro d'urto *b* non nullo $m_2 = m_1$

$$\mathbf{v}_{i1} = \mathbf{v}_{f1} + \mathbf{v}_{f2},$$
$$v_{i1}^2 = v_{f1}^2 + v_{f2}^2$$

Equazioni di conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto

La prima equazione dice che i tre vettori $\mathbf{v}_{i1}$, $\mathbf{v}_{f1}$ e $\mathbf{v}_{f2}$ formano un triangolo, la seconda che il triangolo è rettangolo ed ha per ipotenusa $\mathbf{v}_{i1}$ (figura 6.17.1). In particolare l'angolo formato tra le direzioni finali di due particelle di massa uguale è sempre un angolo retto. Lo si osserva sperimentalmente ad esempio nel gioco del bigliardo e nell'urto tra due protoni (se le velocità non sono troppo grandi, vedi capitolo 7).

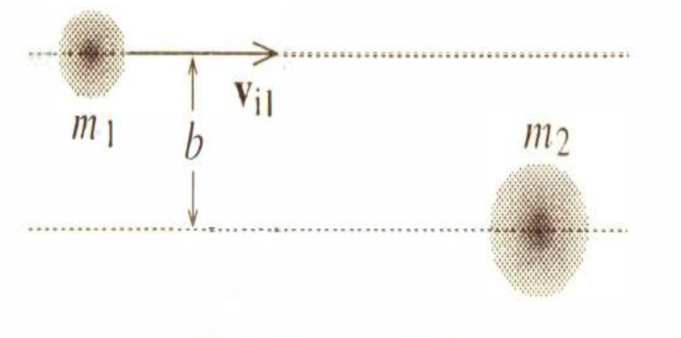


FIGURA 6.17.2

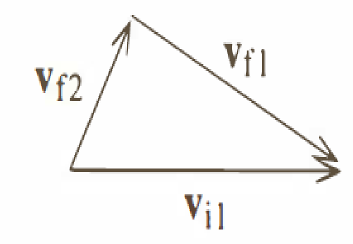
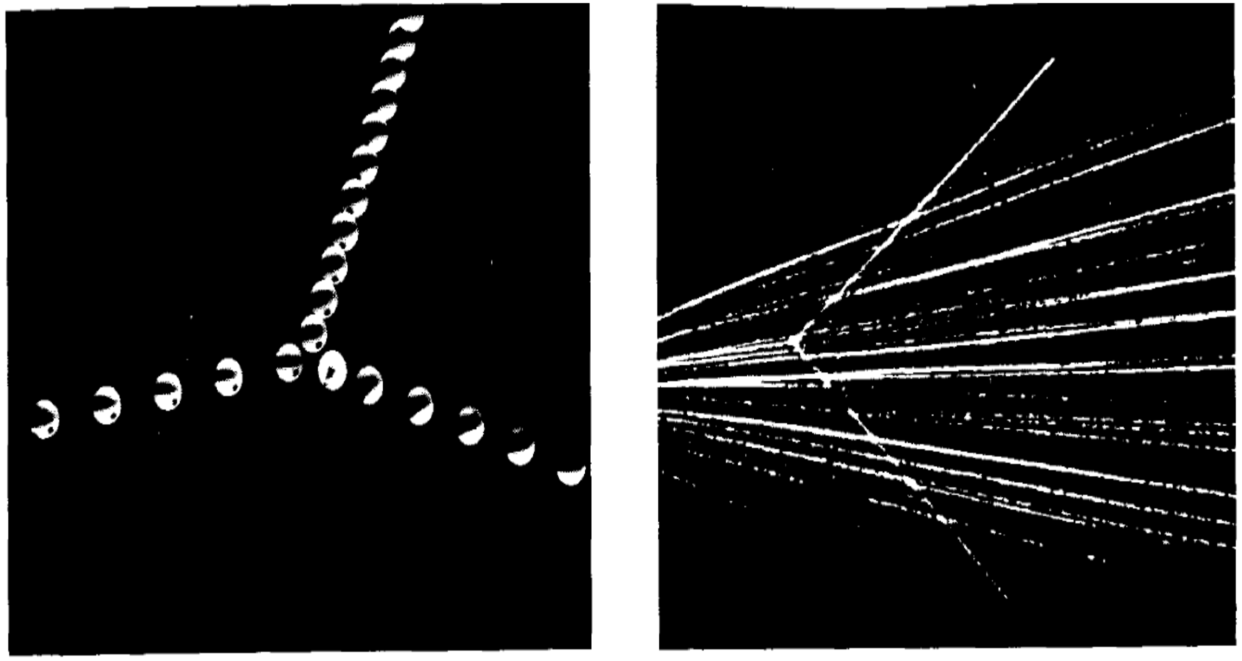


FIGURA 6.17.1



(a) (b)

Fig. 9–13. (a) Collision of two equal billiard balls. (b) Collision between two α-particles (helium nuclei). In both cases, one of the particles was initially at rest in the *L*-frame and their momenta make angles of 90° in the *L*-frame after the collision. [Part (a) courtesy of Educational Services, Inc.]

Sistema di riferimento del laboratorio

Urto elastico caso generale

Consideriamo ora il caso generale dell'urto elastico tra due particelle. La discussione è più semplice se si passa dal riferimento del laboratorio a quello del baricentro. Dato che, almeno durante l'urto, il sistema è isolato, la velocità del baricentro è costante e il riferimento del baricentro è inerziale. La velocità del baricentro, nel riferimento del laboratorio, ricordando che $v_{i2} = 0$, è

$$\mathbf{v}_C = \frac{m_1 \mathbf{v}_{i1} + m_2 \mathbf{v}_{i2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \mathbf{v}_{i1}}{m_1 + m_2}$$

Le velocità delle particelle nel riferimento del baricentro, che indicheremo con un asterisco, si ottengono da quelle nel laboratorio sottraendo $\mathbf{v}_C$

$$\mathbf{v}^*_{i1} = \mathbf{v}_{i1} - \mathbf{v}_C, \qquad \mathbf{v}^*_{i2} = 0 - \mathbf{v}_C,$$
$$\mathbf{v}^*_{f1} = \mathbf{v}_{f1} - \mathbf{v}_C, \qquad \mathbf{v}^*_{f2} = \mathbf{v}_{f2} - \mathbf{v}_C$$

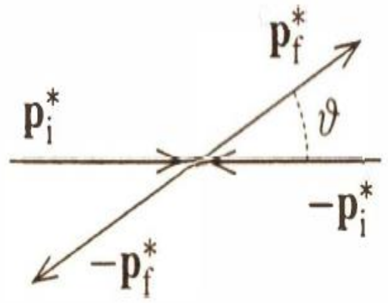
Nel riferimento del baricentro la quantità di moto totale, sia prima sia dopo l'urto ovviamente, è nulla. Ciò significa che le quantità di moto delle due particelle prima dell'urto sono tra loro uguali ed opposte e altrettanto per quelle dopo l'urto. Indicando con $\mathbf{p}^*_i$ la quantità di moto della particella 1 prima dell'urto, quella della particella 2 è $-\mathbf{p}^*_i$. Analogamente dopo l'urto le quantità di moto saranno $\mathbf{p}^*_f$ e $-\mathbf{p}^*_f$. La conservazione dell'energia cinetica si può scrivere nella forma

$$\frac{p_f^{*2}}{2m_1} + \frac{p_f^{*2}}{2m_2} = \frac{p_i^{*2}}{2m_1} + \frac{p_i^{*2}}{2m_2}$$

$$\Downarrow$$

$$p_f^{*2} = p_i^{*2}$$

In altre parole il modulo della quantità di moto di ciascuna particella dopo l'urto è uguale a prima dell'urto. Tutto quello che può avvenire durante l'urto quindi è una rotazione dei vettori quantità di moto di un certo angolo ϑ, come rappresentato in figura



Sistema di riferimento del baricentro

Urti anelastici

Mentre, come abbiamo detto, in tutti gli urti si conserva la quantità di moto totale, non in tutti si conserva l'energia. Quando l'energia cinetica finale è diversa da quella iniziale l'urto si dice *anelastico*. In pratica negli urti tra oggetti macroscopici si riscontra sempre una diminuzione di energia durante l'urto. Le forze (interne) che agiscono durante l'urto sono quindi dissipative. Una palla d'acciaio lasciata cadere sul pavimento rimbalza, ma non risale all'altezza da cui era caduta; durante l'urto una piccola parte dell'energia meccanica è andata perduta. Se si fa la stessa prova con una palla di cera si vede che essa non rimbalza ma rimane ferma dopo l'urto. Gli urti reali non sono mai perfettamente elastici, ma hanno sempre un grado più o meno grande di anelasticità.

Urti completamente anelastici

Sistema di riferimento del laboratorio

Consideriamo due corpi sferici di massa m_1 e m_2 rispettivamente che, nello stato iniziale, immediatamente prima dell'urto cioè, abbiano velocità v_{i1} e v_{i2} rispettivamente. Se dopo l'urto i due corpi rimangono assieme, hanno cioè la medesima velocità $\mathrm{v}_{f1} = \mathrm{v}_{f2}$, si dice che l'urto è stato completamente anelastico.

Durante l'urto la quantità di moto totale P si conserva. Indicando semplicemente con v_f la comune velocità finale abbiamo

$$\mathrm{P} = m_1\mathrm{v}_{i1} + m_2\mathrm{v}_{i2} = (m_1 + m_2)\mathrm{v}_f$$

La velocità finale è quindi

$$\mathrm{v}_f = \frac{m_1\mathrm{v}_{i1} + m_2\mathrm{v}_{i2}}{m_1 + m_2} = \mathrm{v}_C$$

che, non è altro che la velocità del baricentro (che non varia durante l'urto) dato che nello stato finale c'è sostanzialmente un unico corpo.

Consideriamo le energie cinetiche. Esprimiamo l'energia cinetica iniziale utilizzando il teorema di König

$$U_{\mathrm{k,in}} = \frac{1}{2}m_1 v_{i1}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{i2}^2 = U^*_{\mathrm{k,in}} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_C^2$$

dove con U^*_{k} indichiamo l'energia cinetica nel riferimento del baricentro. Esprimiamo anche l'energia cinetica finale

$$U_{\mathrm{k,fin}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_C^2$$

vediamo così che durante l'urto completamente anelastico si perde tutta l'energia cinetica relativa al baricentro $U^*_{\mathrm{k,in}}$.

Urti completamente anelastici

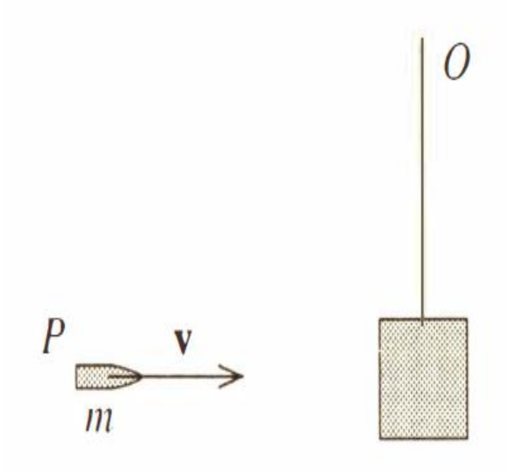
Sistema di riferimento del laboratorio

Un'applicazione dell'urto completamente anelastico si ha nel *pendolo balistico*, usato per misurare la velocità dei proiettili. La figura 6.18.2 mostra il dispositivo costituito da una cassetta di sabbia sospesa ad un'asta verticale, che può ruotare attorno all'asse di sospensione di traccia O. Il proiettile P di massa m di velocità v da determinarsi colpisce il pendolo e vi rimane conficcato, mettendolo in oscillazione. Dall'ampiezza dell'oscillazione si determina la velocità dopo l'urto e quindi, note le masse, si calcola con la v.

$$\mathrm{P} = m_1 \mathrm{v}_{i1} + m_2 \mathrm{v}_{i2} = (m_1 + m_2)\mathrm{v}_f$$

La velocità finale è quindi

$$\mathrm{v}_f = \frac{m_1 \mathrm{v}_{i1} + m_2 \mathrm{v}_{i2}}{m_1 + m_2} = \mathrm{v}_C$$



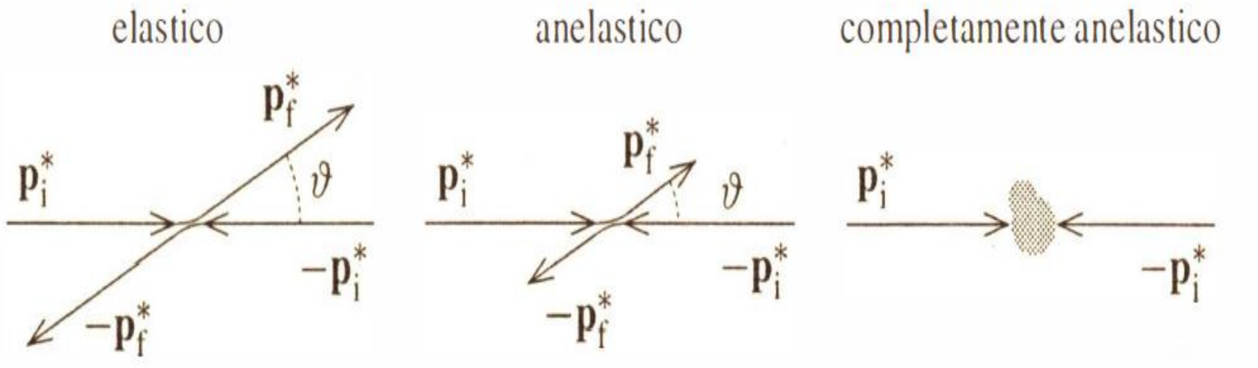
Urti anelastici

Sistema di riferimento del baricentro

Se si pensa all'urto nel riferimento del baricentro, si possono utilizzare le conclusioni tratte al precedente paragrafo, tranne quella che i moduli delle quantità di moto finali sono uguali a quelli iniziali. Se l'urto è anelastico, con diminuzione di energia cinetica, le quantità di moto finali devono essere più piccole di quelle iniziali. Se l'urto è completamente anelastico le quantità di moto finali sono nulle.

$$\vec{p}^*_{i1} = -\vec{p}^*_{i2}; \qquad \vec{p}^*_{f1} = -\vec{p}^*_{f2}$$

Tutto quello che può avvenire durante l'urto quindi è una rotazione dei vettori quantità di moto di un certo angolo ϑ



Nel caso considerato all'inizio dell'urto di una palla di cera col pavimento, la palla perde tutta la sua energia. Ma in questo caso la massa del bersaglio è enorme, quindi la velocità del baricentro è, a tutti gli effetti pratici, nulla.

$$v_f = \frac{m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2}}{m_1 + m_2} = v_C$$

Urti anelastici

Sistema di riferimento del baricentro

Veniamo adesso all'urto anelastico. Si capisce dalla figura 6.18.1 che ci possono essere tutti i casi intermedi tra l'urto elastico e quello completamente anelastico a seconda di quanto diminuisce la quantità di moto di ciascuno dei due corpi. Il parametro che caratterizza il grado di elasticità si chiama *coefficiente di restituzione* e si definisce come rapporto tra il modulo della quantità di moto di ciascuno dei due corpi nel riferimento del baricentro dopo l'urto e dell'analogo prima dell'urto

$$e = \frac{p_f^*}{p_i^*}$$

Il coefficiente è, per definizione, non negativo. In teoria potrebbe essere maggiore di uno, si pensi ad esempio ad un corpo bersaglio che contenga una molla bloccata in posizione compressa; se l'urto rompe il chiodo che tiene bloccata la molla, allora le quantità di moto finali possono essere maggiori di quelle iniziali. In pratica però negli urti tra corpi macroscopici c'è sempre perdita di energia cinetica ed e è sempre minore di uno. Vale uno nel caso dell'urto elastico. Situazioni di urti esotermici, con guadagno di energia, si verificano però a livello microscopico, ad esempio negli urti tra due molecole, nelle reazioni chimiche, appunto, esotermiche.

$$U_{k.in}^* = \frac{p_i^{*2}}{2m_1} + \frac{p_i^{*2}}{2m_2} = \frac{1}{2}\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}p_i^{*2} = \frac{1}{2}\frac{p_i^{*2}}{\mu}$$

$$U_{k.fin}^* = \frac{1}{2}\frac{p_f^{*2}}{\mu}$$

Il rapporto tra energia cinetica finale ed iniziale è quindi pari al quadrato del coefficiente di restituzione.

$$U_{k.fin}^* = e^2 U_{k.in}^*$$

e = 0 per urto totalmente anelastico