I sistemi continui come sistemi di punti materiali: la densità

I sistemi materiali che abbiamo considerato sinora sono, come si dice, discreti, sono composti cioè da un certo numero di particelle o punti materiali. Ci occuperemo ora dei sistemi continui, come può essere un corpo solido di cui non si possono trascurare le dimensioni o una quantità di liquido contenuta in un bacino. La figura 6.11.1 rappresenta un corpo continuo, di volume V e massa M.

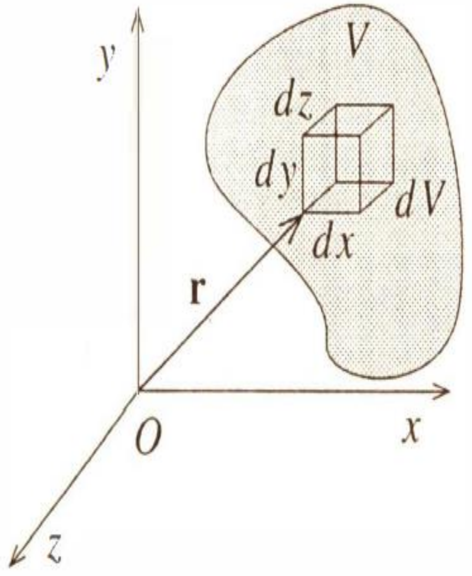


FIGURA 6.11.1

Possiamo pensare di suddividere il corpo in piccole parti, indichiamo con ΔV il volume di una generica parte, che si troverà nella posizione individuata dal raggio vettore **r** e con Δm la sua massa. Si definisce come *densità* del corpo, nella posizione **r** considerata, il rapporto tra la massa e il volume che la contiene al limite in cui questo diventa molto piccolo, cioè in formule

Sostanza	Densità (kg/m^3)
Alluminio	2700
Ambra	1050–1100
Argento	10490
Argilla	1800–2600
Avorio	1830–1920
Basalto	2400–3000
Burro	860–870
Calcare	2680–2760
Dolomite	2840
Ghiaccio (0 °C)	$\boxed{917}$

$$\varrho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

Se la densità non dipende dalla posizione (è costante) allora il sistema è detto omogeneo

I sistemi continui come sistemi di punti materiali: il baricentro

La definizione del baricentro di un sistema continuo è del tutto analoga a quella che abbiamo data al §6.9 per un sistema discreto. Per poter partire da questa, supponiamo di dividere il corpo in N parti, N piccoli volumi ΔV_i, esprimiamo il raggio vettore del baricentro tramite la (6.9.1) e facciamo tendere (fisicamente) a zero i volumetti. Otteniamo

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \lim_{\Delta m \to 0} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{M} \lim_{\Delta V \to 0} \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i \varrho(\mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r}\varrho(\mathbf{r})\, dV \, .$$

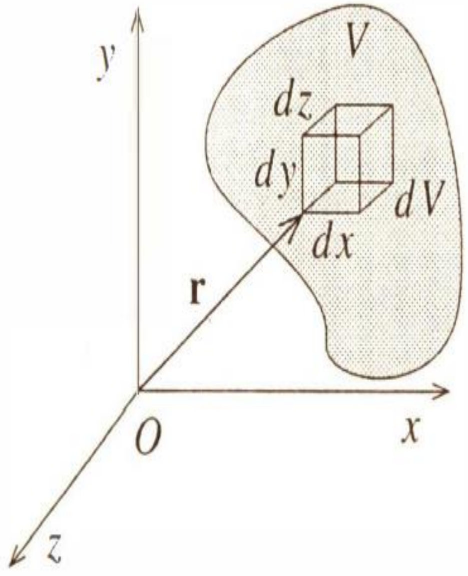


FIGURA 6.11.1

Il raggio vettore del baricentro è quindi

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r}\varrho(\mathbf{r})\, dV$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{M} \int_V x\varrho(\mathbf{r})\, dV \\ y_C &= \frac{1}{M} \int_V y\varrho(\mathbf{r})\, dV \\ z_C &= \frac{1}{M} \int_V z\varrho(\mathbf{r})\, dV \end{aligned}}$$

I sistemi continui come sistemi di punti materiali: il baricentro di un foglio omogeneo

Se il sistema è omogeneo ed ha un centro di simmetria il baricentro coincide con il centro di simmetria del sistema. Per questo non calcoliamo il baricentro di un quadrato, un rettangolo, un cerchio, un rombo…. che conosciamo già.

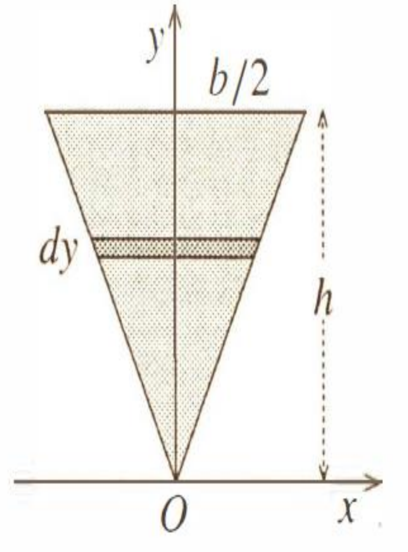


FIGURA 6.11.2

Lamierino omogeneo triangolare

ESEMPIO 6.11.1. Il corpo rappresentato in figura 6.11.2 è un lamierino a forma di triangolo isoscele di altezza h e lunghezza di base b. È quindi un corpo piano e l'integrale di volume diviene un integrale di superficie.

È anzitutto evidente che il baricentro deve cadere sull'altezza per ragioni di simmetria (ci dev'essere tanta massa a destra quanta a sinistra). Basta trovare la coordinata y del baricentro. Ci conviene prendere come elementi di volume delle striscioline di altezza dy larghe come il triangolo. Tutti gli elementi di una strisciolina hanno difatti la stessa y e contribuiscono in ugual misura all'integrale. La lunghezza $\ell(y)$ della strisciolina all'altezza y si trova tenendo conto della proporzione $\ell(y) : b = y : h$. È quindi $\ell(y) = (b/h)y$. L'area della strisciolina è $dS(y) = (b/h)y\,dy$ e la sua massa, se σ è la massa per unità d'area (l'equivalente della densità di un solido), è $dm(y) = \sigma(b/h)y\,dy$. Calcoliamo dunque l'integrale

$$\int_0^h y\,dm = \sigma\frac{b}{h}\int_0^h y^2\,dy = \sigma\frac{bh^2}{3}$$

$$M = \sigma\frac{b \times h}{2}$$

$$y_C = \frac{1}{M}\int_0^h y\,dm = \frac{2}{3}h$$

I sistemi continui come sistemi di punti materiali: il baricentro di un solido omogeneo

Se il sistema è omogeneo ed ha un centro di simmetria il baricentro coincide con il centro di simmetria del sistema. Per questo non calcoliamo il baricentro di un cubo, un parallelepipedo, una sfera…. che conosciamo già.

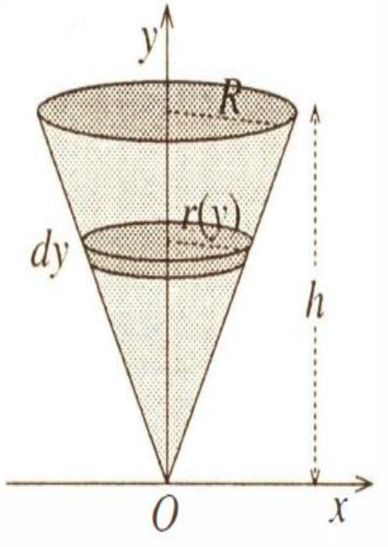


FIGURA 6.11.3

Cono omogeneo

ESEMPIO 6.11.2. Calcoliamo la posizione del baricentro di un cono omogeneo (vedi figura 6.11.3) di altezza h e raggio della base R.

Anche in questo caso è evidente che il baricentro deve stare sull'asse. Per calcolarne l'altezza ci conviene prendere come elementi di volume delle fettine perpendicolari all'altezza, i cui punti hanno tutti la stessa y. Il volume della fettina all'altezza y è $dV = \pi r^2(y)\,dy$. Ma $r(y) = Ry/h$ e quindi, se ϱ è la densità

$$\int_V y\varrho(\mathbf{r})\,dV = \frac{\pi R^2}{h^2}\varrho\int_0^h y^3\,dy = \frac{1}{4}\,\varrho\pi R^2h^2\,.$$

$$M = \rho\,\frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$$

$$y_C = \frac{1}{M}\int_0^h y\,dm = \frac{3}{4}h$$

Sistemi con un numero generico di punti materiali: moto del baricentro

La prima equazione cardinale descrive come varia nel tempo la quantità di moto totale di un sistema materiale e come si muove il suo baricentro. Vogliamo ora vedere come varia nel tempo il momento angolare totale del sistema, definito al §6.8. In figura 6.12.1 è rappresentato un sistema di punti materiali in un riferimento che sceglieremo inerziale. Scegliamo un qualsiasi punto geometrico Ω come polo per i momenti. Non assumiamo che questo punto stia fermo nel nostro riferimento ed indichiamone con $\mathbf{v}_\Omega$ la velocità.

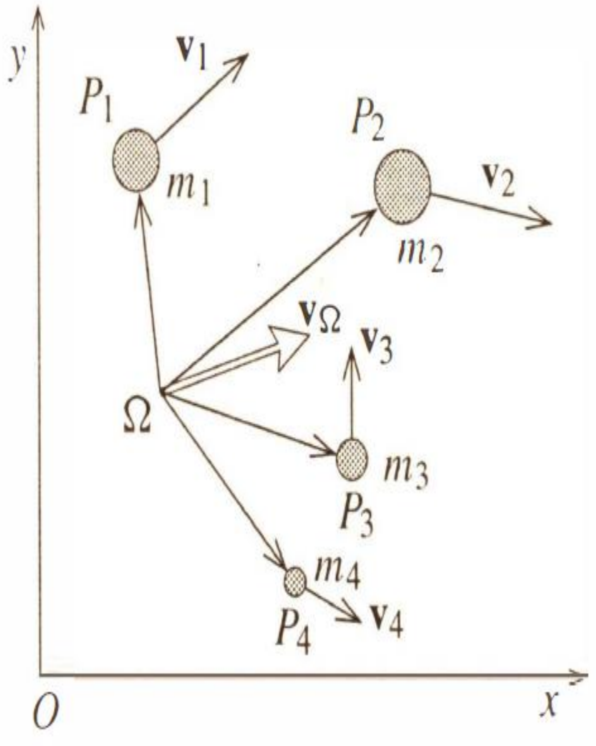


FIGURA 6.12.1

Il momento angolare totale rispetto al polo scelto è

$$\mathbf{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_{\Omega i} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}_i \times \mathbf{p}_i$$

Derivandola rispetto al tempo, otteniamo

$$\frac{d\mathbf{L}_\Omega}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}$$

Dobbiamo calcolare la derivata dei vettori $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}_i$, che congiungono ciascuno due punti che si muovono entrambi. Sappiamo che $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\Omega$ da cui derivando

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}\mathbf{P}_i}{dt} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_\Omega$$

Sistemi con un numero generico di punti materiali: moto del baricentro

Quindi in un riferimento inerziale

$$\frac{d\mathbf{L}_\Omega}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i \times \mathbf{p}_i - \mathbf{v}_\Omega \times \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^{N} \Omega\mathbf{P}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{N} \Omega\mathbf{P}_i \times \mathbf{F}_i^{(i)}$$

Nell'espressione a secondo membro il primo addendo è nullo perché somma di prodotti esterni di coppie di vettori tra loro paralleli, la somma che compare nel secondo addendo è la quantità di moto totale del sistema, il terzo addendo è il momento risultante delle forze esterne $\mathbf{M}^{(e)}$, l'ultimo addendo è il momento risultante delle forze interne ed è, come sappiamo, nullo. L'espressione diventa quindi

$$\frac{d\mathbf{L}_\Omega}{dt} = \mathbf{M}_\Omega^{(e)} - \mathbf{v}_\Omega \times \mathbf{P}$$

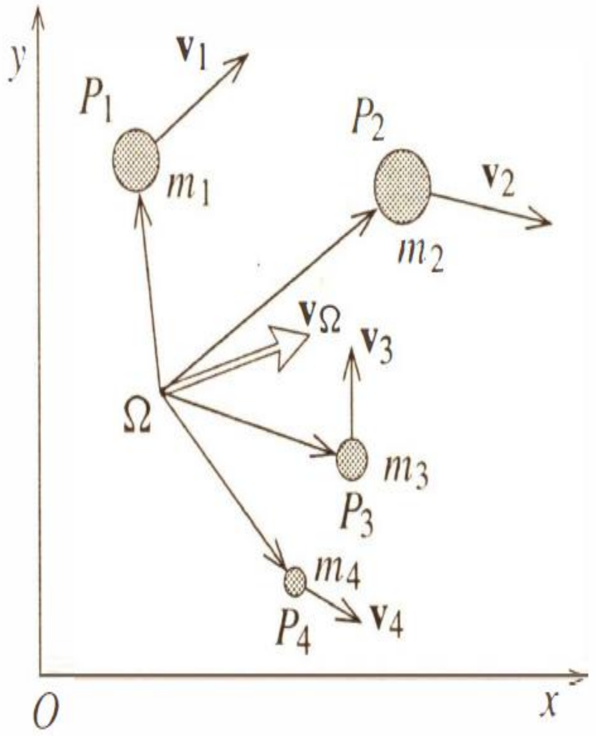


FIGURA 6.12.1

Quest'espressione si semplifica ulteriormente con due diverse scelte del polo. Se il polo Ω è fisso, $\mathbf{v}_\Omega = 0$ e

$$\frac{d\mathbf{L}_\Omega}{dt} = \mathbf{M}_\Omega^{(e)}$$

che è la *seconda equazione cardinale della meccanica*. Essa ci dice che *la derivata rispetto al tempo del momento angolare di un sistema meccanico rispetto ad un polo fisso in un sistema inerziale è uguale al momento delle forze esterne (rispetto al medesimo polo).*

Sistemi con un numero generico di punti materiali: moto del baricentro

Quindi in un riferimento inerziale

$$\frac{d\mathbf{L}_\Omega}{dt} = \mathbf{M}_\Omega^{(e)} - \mathbf{v}_\Omega \times \mathbf{P}$$

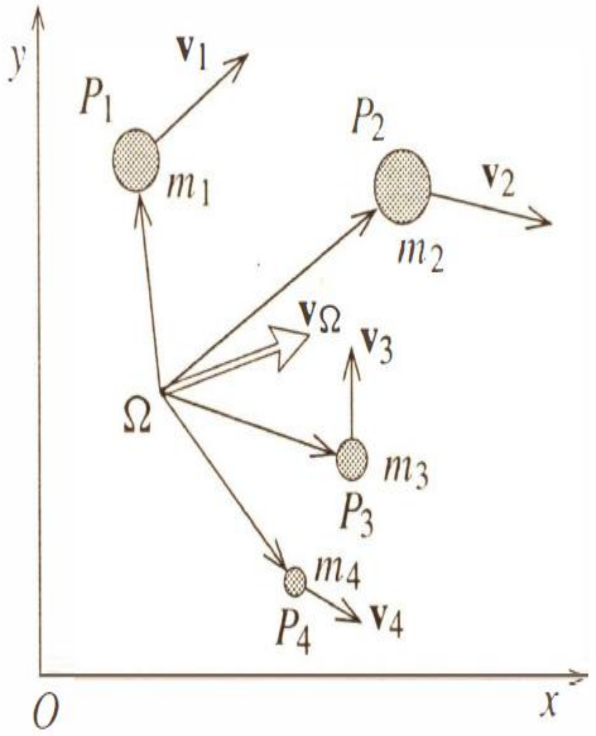


FIGURA 6.12.1

Se il polo coincide con il baricentro, che si muove in generale di moto vario, anche accelerato quindi, il secondo addendo a secondo membro della (6.12.3) si annulla di nuovo, questa volta perché la velocità del polo, il baricentro, è parallela alla quantità di moto totale per la (6.9.5). Quindi abbiamo

La derivata rispetto al tempo del momento angolare di un sistema meccanico rispetto al baricentro preso come polo è uguale al momento delle forze esterne (rispetto al medesimo polo).

$$\frac{d\mathbf{L}_C}{dt} = \mathbf{M}_C^{(e)}$$

Sistemi con un numero generico di punti materiali: conservazione del momento angolare

in un sistema isolato il momento angolare totale, rispetto a qualsiasi polo fisso rispetto ad un riferimento inerziale, si conserva.

in un sistema isolato il momento angolare totale rispetto al suo baricentro si conserva.

Se il sistema non è isolato, cioè se su di esso agiscono forze esterne, può succedere che, scegliendo opportunamente il polo, fisso in un riferimento inerziale, il momento delle forze esterne sia nullo. Allora il momento angolare del sistema rispetto a quel particolare polo si conserva. Ne vedremo alcuni esempi nel seguito.

Si noti che il fatto che il momento risultante delle forze esterne agenti sul sistema sia o meno nullo è indipendente dal fatto che la risultante di queste forze sia o meno nulla. In generale quindi la conservazione o meno della quantità di moto è indipendente dalla conservazione o meno del momento angolare. Ovviamente se il sistema è isolato, non ci sono forze esterne e sia la quantità di moto totale sia il momento angolare totale si conservano.

Facciamo un'ultima osservazione. La conservazione della quantità di moto totale è una conseguenza, come abbiamo visto, di un aspetto del principio di azione e reazione: l'azione e la reazione sono uguali e contrarie. La verifica sperimentale del principio ci permette, nei limiti discussi ai §6.6 e 6.7, di verificare quest'aspetto della terza legge della dinamica. La conservazione del momento angolare totale è conseguenza di un altro aspetto della terza legge: azione e reazione hanno la stessa retta di applicazione. Tutta l'evidenza sperimentale è in favore del principio di conservazione del momento angolare; non si conoscono eccezioni. Di conseguenza anche questo secondo aspetto del principio di azione e reazione si deve ritener valido, pur entro limiti analoghi a quelli discussi al §6.7.

Sistemi con un numero generico di punti materiali: energia del sistema

La variazione dell'energia cinetica di tutto il sistema è quindi uguale al lavoro totale delle forze sia quelle interne sia quelle esterne. A differenza del caso della quantità di moto e di quello del momento angolare, il contributo delle forze interne alla variazione dell'energia non è nullo.

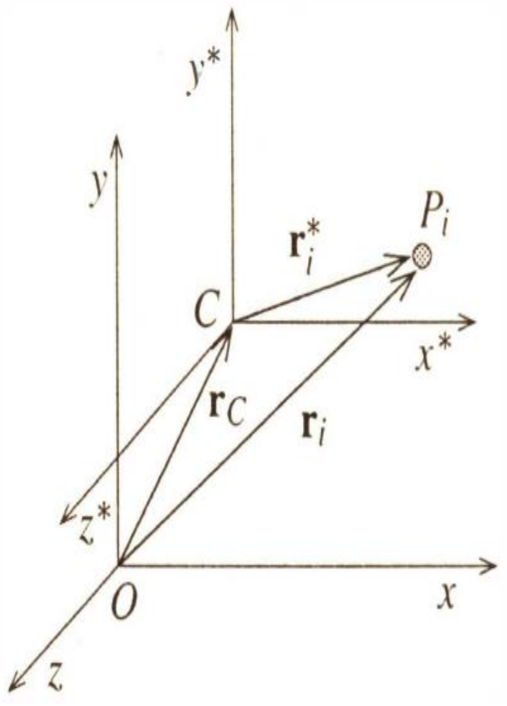
Se tutte le forze agenti sul sistema sono conservative, il loro lavoro si può esprimere come differenza di energia potenziale.

L'energia totale del sistema, somma della sua energia cinetica totale e della sua energia potenziale totale si conserva.

Se il sistema è isolato, non ci sono forze esterne, e solo quelle interne fanno lavoro. Questo non significa che la sua energia totale si conservi. Ciò è vero solo se le forze interne sono tutte conservative.

Sistemi con un numero generico di punti materiali: sistema di riferimento del baricentro

È spesso utile considerare il moto rispetto al *riferimento del baricentro*. Si parte scegliendo un riferimento inerziale e si definisce Il riferimento del baricentro quindi, non ruota rispetto al sistema inerziale, ma trasla con la velocità del baricentro. Quest'ultima non è necessariamente costante nel tempo, quindi in generale il riferimento del baricentro non è inerziale.



Il riferimento del baricentro è quello in cui la quantità di moto totale è nulla.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i^* = 0$$

Il momento angolare rispetto al baricentro ha un importante ruolo nella meccanica dei sistemi. A priori, potrebbe essere diverso, se calcolato nel riferimento inerziale e se calcolato nel riferimento del baricentro. In realtà i due sono uguali. Infatti il momento angolare rispetto al baricentro nel riferimento inerziale è

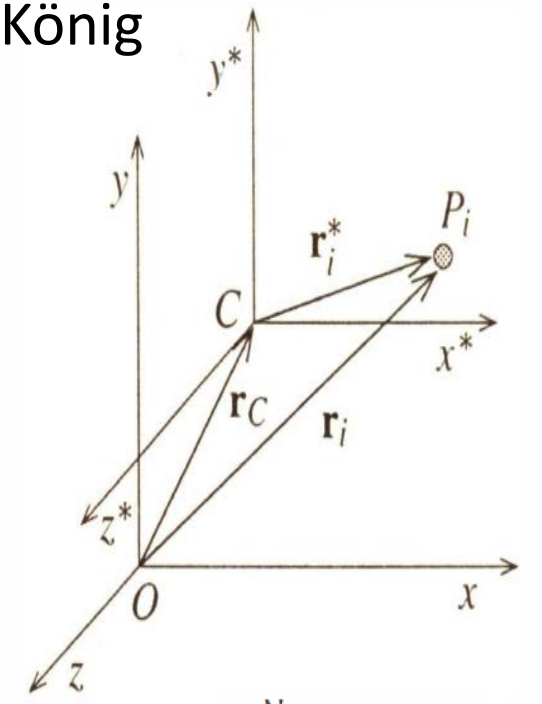
$$\mathbf{L}_C = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i^* \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i^* \times m_i (\mathbf{v}_i^* + \mathbf{v}_C) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i^* \times m_i \mathbf{v}_i^* + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i^*\right) \times \mathbf{v}_C$$

$$\mathbf{L}_C^* = \mathbf{L}_C$$

Sistemi con un numero generico di punti materiali: teoremi di König

TEOREMA DI KÖNIG DELL'ENERGIA CINETICA. L'energia cinetica nel riferimento inerziale è

$$U_k = \sum_{i=1}^{N} U_{ki} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 .$$



$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i^* = 0$$

Usando la (6.15.2), essa diviene

$$U_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i^* + \mathbf{v}_C)^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^{*2} + \frac{1}{2} M v_C^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i^*\right) \cdot \mathbf{v}_C .$$

La somma tra parentesi all'ultimo membro è la quantità di moto totale nel riferimento del baricentro ed è quindi nulla. In definitiva quindi

$$U_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, v_i^{*2} + \frac{1}{2} M v_C^2 = U_k^* + \frac{1}{2} M v_C^2 . \quad (6.16.1)$$

L'energia cinetica del sistema nel riferimento inerziale è somma di due termini: uno è l'energia cinetica del baricentro pensato come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema, l'altro è l'energia cinetica nel sistema del baricentro, relativa quindi al moto delle parti del sistema rispetto al baricentro.

Sistemi con un numero generico di punti materiali: teoremi di König

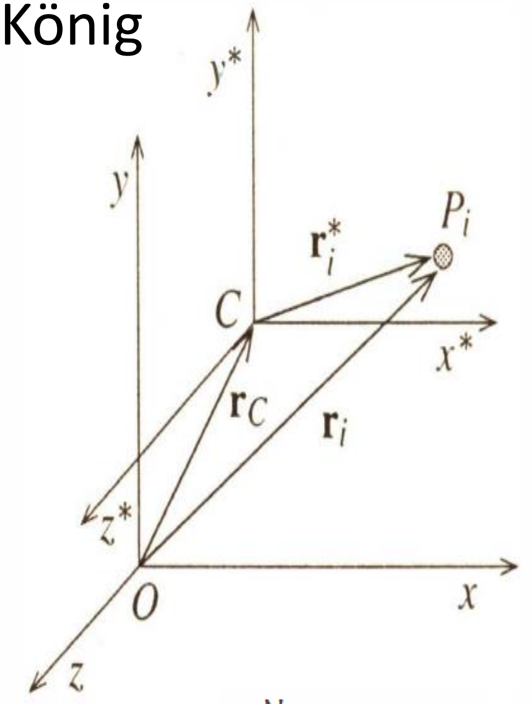
TEOREMA DI KÖNIG PER IL MOMENTO ANGOLARE. Il momento angolare nel riferimento inerziale, prendendo, per semplicità come polo l'origine O, è

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

che, usando (6.15.1) e (6.15.2) diviene

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_i^* + \mathbf{r}_C) \times m_i (\mathbf{v}_i^* + \mathbf{v}_C)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i^* \times m_i \mathbf{v}_i^* + \mathbf{r}_C \times \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i^* + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i^*\right) \times \mathbf{v}_C + \mathbf{r}_C \times M \mathbf{v}_C .$$



$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i^* = 0$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}_C \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_C^*$$

In conclusione, il momento angolare totale nel riferimento inerziale è uguale alla somma di due termini: un termine è il momento angolare, detto "del baricentro", ed è il momento angolare che avrebbe nel sistema inerziale il baricentro, se fosse un punto materiale con la massa dell'intero sistema, il secondo termine è il momento angolare nel riferimento del baricentro.