Corso di Laurea in Chimica Industriale

Chimica Fisica II

Zoom meeting del 10/03/2022

Esercizi
(prima parte)

A.A. 2022-2023

Marco Ruzzi

Dipartimento di Scienze Chimiche
Università degli Studi di Padova
Via Marzolo 1 35129 Padova
E-mail: marco.ruzzi@unipd.it

Il campo elettromagnetico [28]

TEORIA
per l'esercizio 0

Osservazione

L'estensione dell'equazione delle onde al caso 3-dimensionale risulta immediata….

La forma analitica:

$$\zeta = \xi(\vec{r},t) = \xi(x,y,z,t)$$

descrive un'onda che si propaga senza distorsione nello spazio 3-dimensionale lungo una determinata direzione definita dal vettore velocità $\vec{v}$ se e solo se è soluzione dell'equazione differenziale d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{\vec{v}^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Introducendo l'operatore Laplaciano definito come prodotto scalare di due operatori gradiente:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$$

ossia:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

l'equazione sopra si riscrive sinteticamente nella forma;

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{\vec{v}^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Esercizio 0

Si verifichi che l'equazione seguente:

$$E_{\rightleftarrows}(x,t) = 2E_0 \,\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$$

rappresenti la componente elettrica di un'onda stazionaria.

Valgono:

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x,t) = 2E_0 \, k \cos(kx)\cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x,t) = -2E_0 \, k^2 \mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t) = -k^2 E(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x,t) = -2E_0 \, \omega \, \mathrm{sen}(kx)\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^2} E(x,t) = -2E_0 \, \omega^2 \, \mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t) = -\omega^2 E(x,t)$$

L'equazione delle onde si scrive:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{\vec{\mathrm{v}}^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

In 1 Dim:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{\vec{\mathrm{v}}^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Esercizi [0]

In tal caso se vale:

$$-k^2 E(x,t) - \frac{1}{\vec{v}^2}\left(-\omega^2 E(x,t)\right) = 0$$

l'equazione data rappresenta un'onda.

Valgono:

$$-k^2 \cancel{E(x,t)} - \frac{1}{\vec{v}^2}\left(-\omega^2 \cancel{E(x,t)}\right) = 0$$

$$-k^2 + \frac{1}{\vec{v}^2}\omega^2 = 0 \qquad \vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \mathrm{v}\,\mathrm{v}\cos(0) = \mathrm{v}^2$$

$$-k^2 + \frac{1}{\mathrm{v}^2}\omega^2 = 0$$

$$-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{\lambda}{P}\right)^2}\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = 0$$

La relazione è effettivamente un'identità.
L'equazione data rappresenta effettivamente un'onda.

La crisi della fisica classica [12]

In riferimento ad una radiazione elettromagnetica *stazionaria monocromatica* distribuita nello spazio…

Definita la densità di energia di volume:

$$u(\vec{r}) = \frac{d\varepsilon}{d\tau} \qquad [\mathrm{J}][\mathrm{m}]^{-3}$$

la quantità di energia $d\varepsilon$ nell'elemento infinitesimo di volume $d\tau$ si scrive:

$$d\varepsilon = u(\vec{r})\,d\tau \qquad [\mathrm{J}]$$

L'energia totale si ottiene integrando sull'intero volume V:

$$\varepsilon = \int_V u(\vec{r})\,d\tau \qquad [\mathrm{J}]$$

Nel caso di una radiazione *stazionaria con dominio esteso di frequenze…*

Definita la densità spettrale di energia di volume:

$$\rho(\nu) = \frac{du}{d\nu} \qquad [\mathrm{J}][\mathrm{m}]^{-3}[\mathrm{s}]$$

la quantità di energia di volume du con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ si scrive:

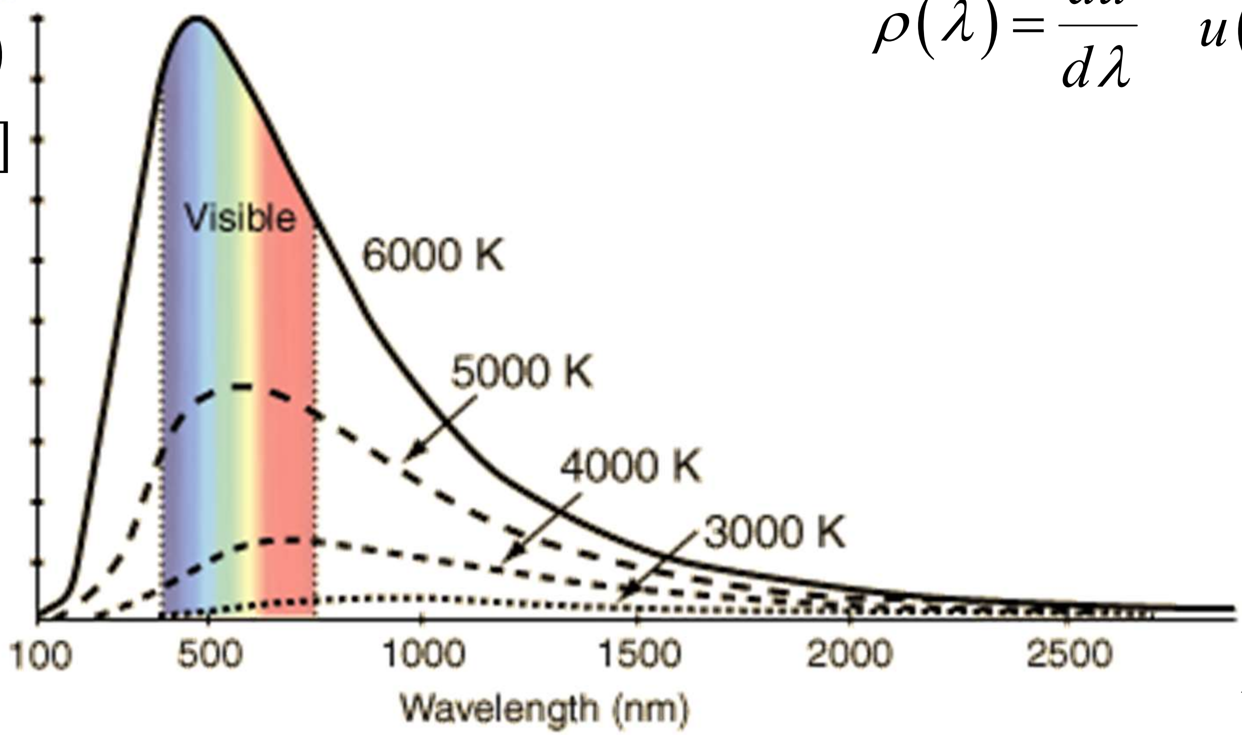
$$du = \rho(\nu)\,d\nu \qquad [\mathrm{J}][\mathrm{m}]^{-3}$$

L'energia di volume totale si ottiene integrando sull'intero dominio di frequenze:

$$u = \int_{[0,+\infty]} \rho(\nu)\,d\upsilon \qquad [\mathrm{J}][\mathrm{m}]^{-3}$$

La crisi della fisica classica [16]

Da misure spettroscopiche è possibile ricavare le distribuzioni di densità spettrali di energia di volume $\rho(\lambda)$ di un corpo nero a diverse temperature T ...



$\rho(\lambda)$ $[J][m]^{-3}[s]$

$$\rho(\lambda) = \frac{du}{d\lambda} \qquad u(\vec{r}) = \frac{d\varepsilon}{d\tau}$$

$\lambda\,[nm]$

Le distribuzioni di densità spettrali di energia (emessa) di volume di corpo nero presentano tutte un andamento a campana con un massimo netto...

All'aumentare di T il massimo delle curve si sposta verso le λ più corte.

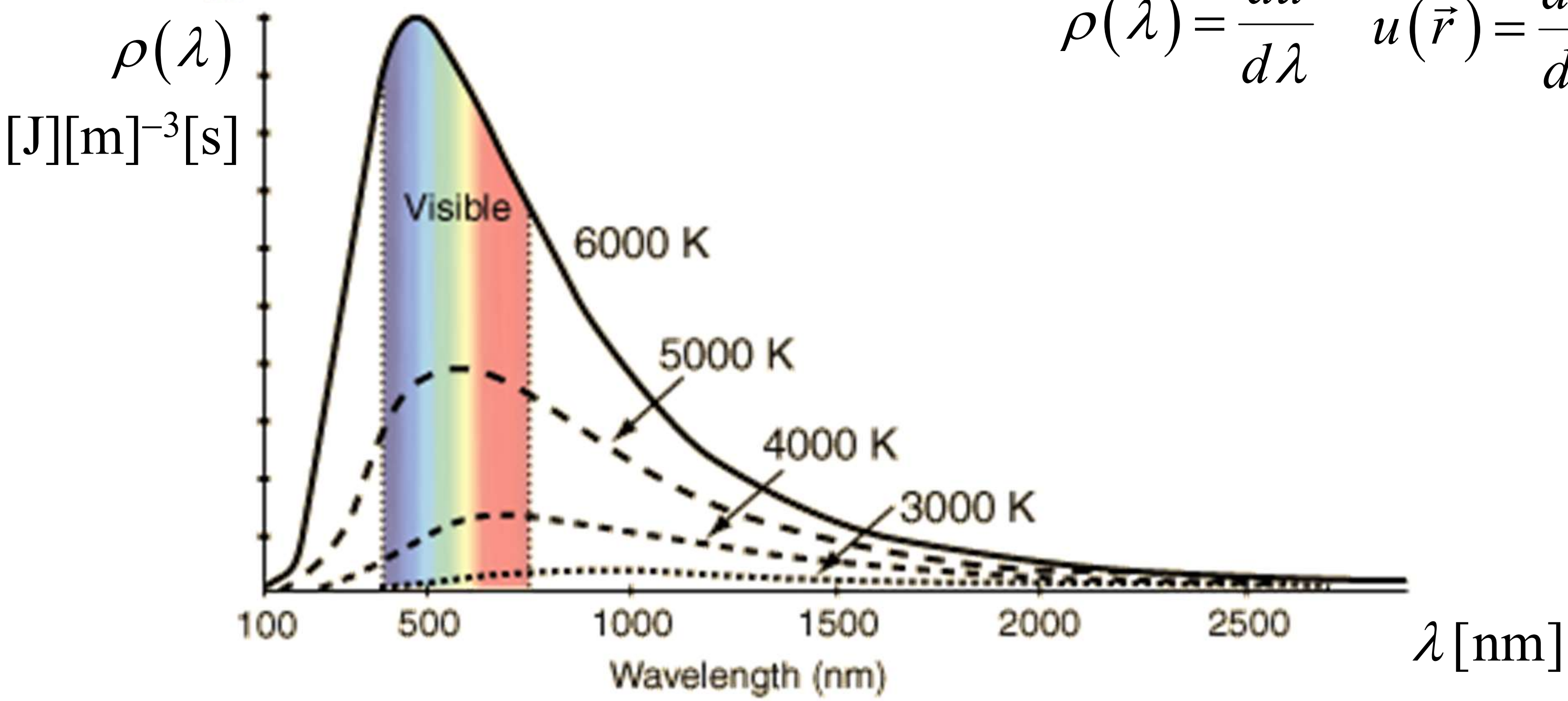
All'aumentare di T il valore del massimo (in ordinata) delle curve aumenta.

All'aumentare di T l'area sottesa le curve aumenta.

La crisi della fisica classica [17]

Da misure spettroscopiche è possibile ricavare le distribuzioni di densità spettrali di energia di volume $\rho(\lambda)$ di un corpo nero a diverse temperature T …

$$\rho(\lambda) = \frac{du}{d\lambda} \qquad u(\vec{r}) = \frac{d\varepsilon}{d\tau}$$



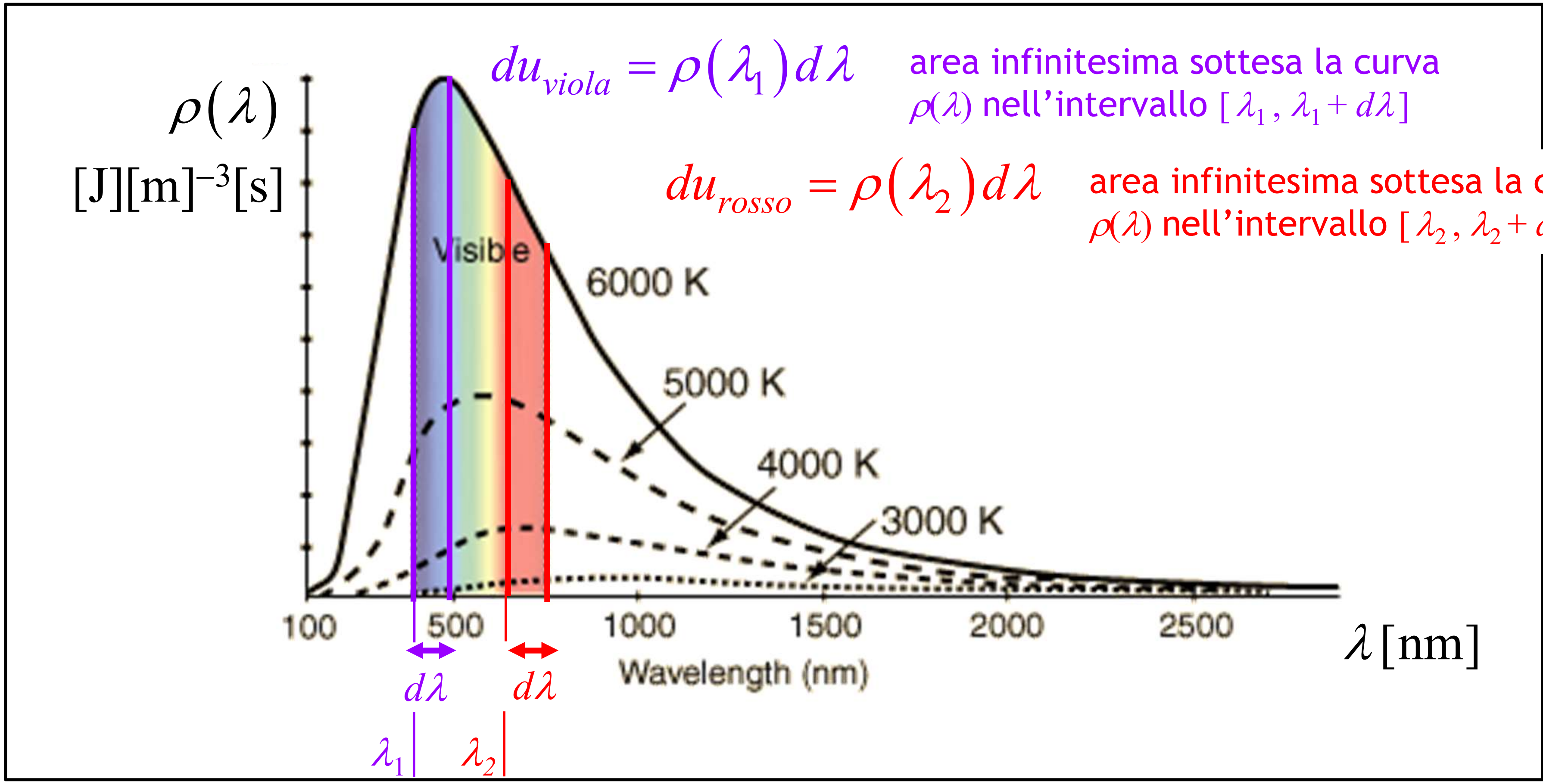
La quantità di energia di volume du associata ad una radiazione emessa con lunghezza d'onda compresa tra λ e $\lambda + d\lambda$ si scrive:

$$du = \rho(\lambda)\, d\lambda$$

ed è rappresentata dall'area infinitesima sottesa la curva $\rho(\lambda)$ nell'intervallo infinitesimo di ascissa $[\lambda\, ,\, \lambda + d\lambda\,]$.

La crisi della fisica classica [18]

Da misure spettroscopiche è possibile ricavare le distribuzioni di densità spettrali di energia di volume $\rho(\lambda)$ di un corpo nero a diverse temperature T …



All'aumentare della temperatura:
la quantità di energia di volume associata ad una radiazione emessa con lunghezza d'onda compresa tra λ e $\lambda + d\lambda$ sulla banda del viola (du_{viola}) aumenta rispetto alla quantità di energia di volume associata ad una radiazione emessa con lunghezza d'onda compresa tra λ e $\lambda + d\lambda$ sulla banda del rosso.

La crisi della fisica classica [19]

Distribuzione di densità di energia del corpo nero: interpretazione classica

Da considerazioni di tipo classico (di termodinamica e di elettromagnetismo) si può dedurre che per la distribuzione della densità spettrale di energia di volume vale:

$$\rho(\nu) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$ legge di Wien

La legge di Wien costituisce un primo passo importante per l'interpretazione della distribuzione di radiazione del corpo nero al variare della temperatura T.

La quantità di energia di volume du associata ad una radiazione emessa con lunghezza d'onda compresa tra λ e $\lambda + d\lambda$ si scrive:

$$du = \rho(\nu)\,d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu \quad \Rightarrow \quad u = \int_0^{+\infty} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu$$

eseguendo la sostituzione: $\varsigma = \dfrac{\nu}{T} \qquad \nu = T\varsigma \qquad d\nu = T\,d\varsigma$

si ottiene: $u = \int_0^{+\infty} T^4 \varsigma^3 F(\varsigma)\, d\varsigma = T^4 \int_0^{+\infty} \varsigma^3 F(\varsigma)\, d\varsigma = \sigma T^4$

e l'energia totale di volume u sull'intero spettro delle lunghezze d'onda vale:

$$u = \sigma T^4$$ legge di Stefan-Boltzmann

La crisi della fisica classica [20]

Distribuzione di densità di energia del corpo nero: interpretazione classica

Da considerazioni di tipo classico (di termodinamica e di elettromagnetismo) si può dedu … le:

$\rho(\nu$ …

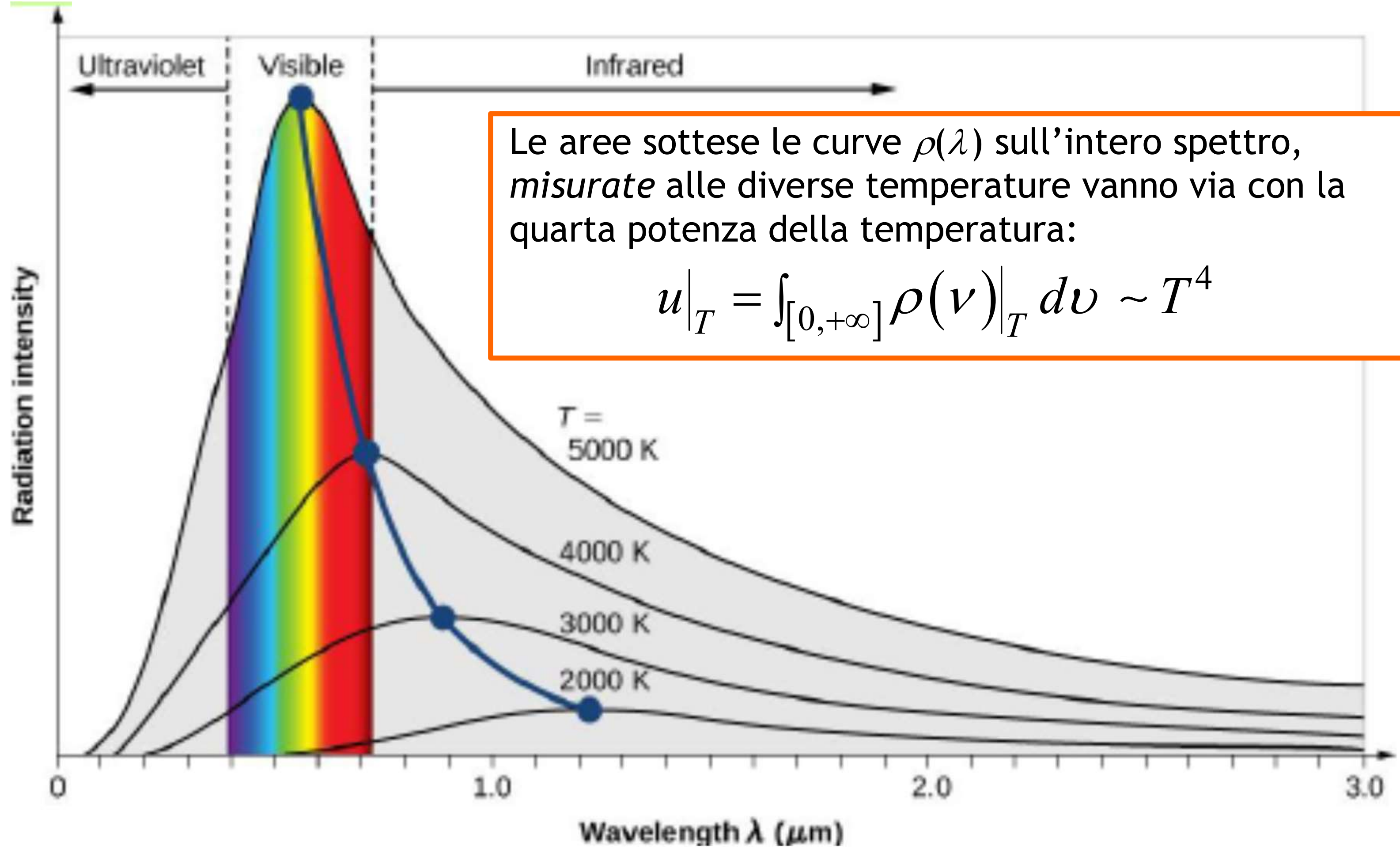
La le … ella
distr …

La q … con
lungh …

du …

eseg …

si ot …



Le aree sottese le curve $\rho(\lambda)$ sull'intero spettro, *misurate* alle diverse temperature vanno via con la quarta potenza della temperatura:

$$u\big|_T = \int_{[0,+\infty]} \rho(\nu)\big|_T \, d\upsilon \sim T^4$$

e l'energia totale di volume u sull'intero spettro delle lunghezze d'onda vale:

$$u = \sigma T^4$$

legge di Stefan-Boltzmann

La crisi della fisica classica [21]

A partire dalla legge di Wien:

$$\rho(\nu) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

imponendo la condizione per la ricerca del punto di massimo di $\rho(\nu)$ si ottiene:

$$\frac{d\rho}{d\nu} = 3\nu^2 F\left(\frac{\nu}{T}\right) + \nu^3 F'\left(\frac{\nu}{T}\right)\frac{1}{T} = \nu^2\left[3F\left(\frac{\nu}{T}\right) + \nu F'\left(\frac{\nu}{T}\right)\frac{1}{T}\right] = 0$$

Tralasciando le due soluzioni banali ($\nu_{1,2} = 0$) si ottiene l'equazione differenziale:

$$3F\left(\frac{\nu}{T}\right) + \nu F'\left(\frac{\nu}{T}\right)\frac{1}{T} = 0$$

Eseguendo la sostituzione: $\eta = \frac{\nu}{T}$ $\quad \nu = \eta T$ l'equazione sopra si riscrive:

$$3F(\eta) + \eta F'(\eta) = 0$$

Risolvendo quest'equazione si ottiene la terza radice $\eta_{max} = k$ che massimizza la $\rho(\nu)$.

Per i punti η_{max} che massimizzano la distribuzione $\rho(\nu)$ vale dunque: $\frac{\nu_{max}}{T} = k$

ossia: $\lambda_{max} T = \frac{c}{k} = \text{cost}$

$$\lambda_{max} T = \text{cost}$$ legge dello spostamento (dei massimi) di Wien

La crisi della fisica classica [22]

A partire dalla legge di Wien:

$\rho(\nu) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{\ldots}\right)$

impo

$\frac{d\rho}{d\nu} =$

Trala ... e:

$3F\left(\frac{\nu}{T}\ldots\right)$

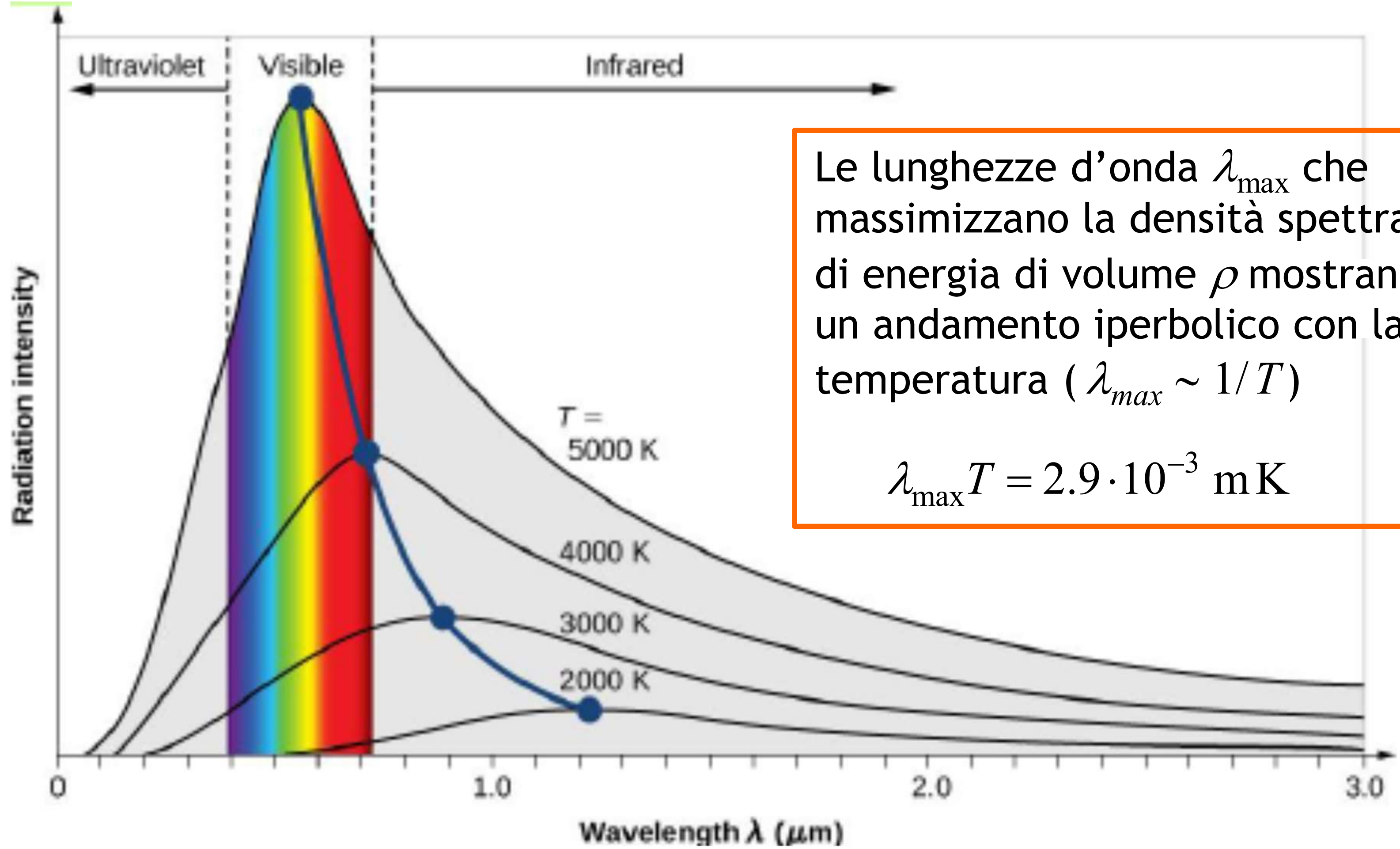
Esegu

$3F(\eta\ldots$

Risol ... $\rho(\nu)$.

Per i

ossia: $\lambda_{\max} T = \frac{\ldots}{k} = \text{cost}$



Le lunghezze d'onda $\lambda_{\max}$ che massimizzano la densità spettrale di energia di volume ρ mostrano un andamento iperbolico con la temperatura ($\lambda_{max} \sim 1/T$)

$$\lambda_{\max} T = 2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}$$

$\lambda_{\max} T = \text{cost}$ legge dello spostamento (dei massimi) di Wien

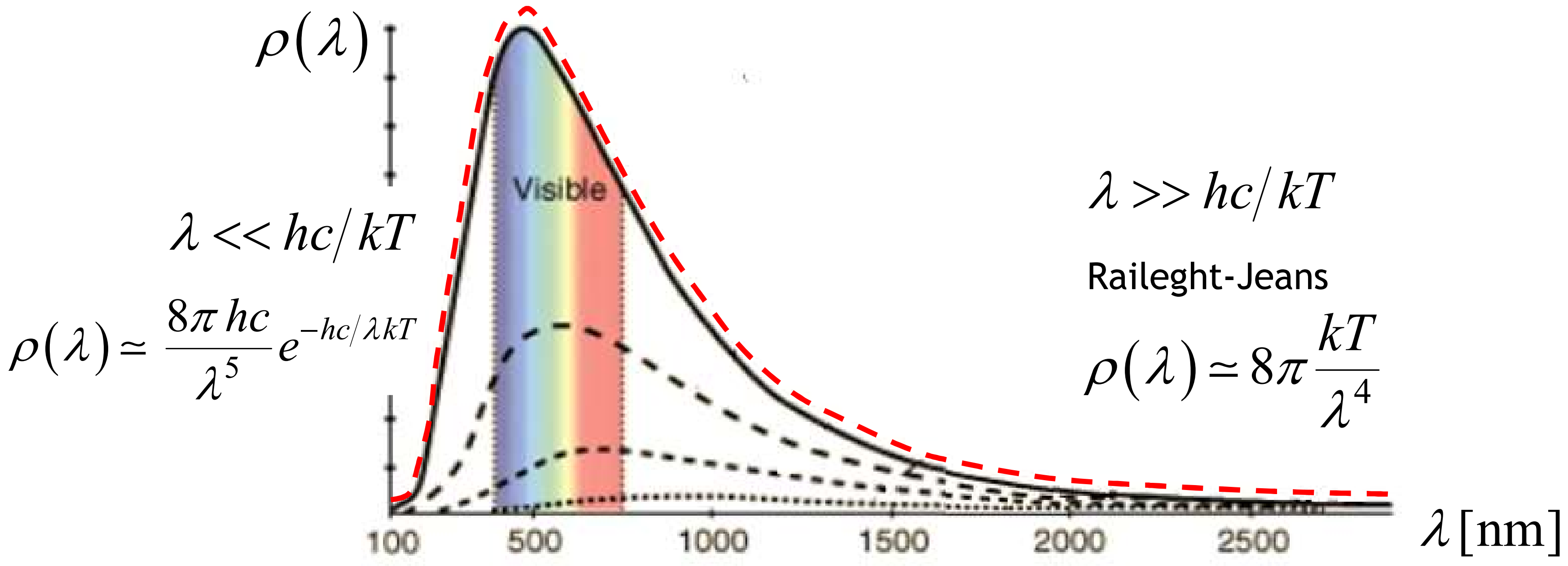
La crisi della fisica classica [32]

TEORIA
per gli esercizi 1÷8

La distribuzione di densità spettrale di energia di volume di Plank riproduce bene i risultati sperimentali ed elimina la catastrofe ultravioletta!

$$\rho(\lambda)\Big|_{\lambda>>hc/kT}=\frac{8\pi\,hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp[hc/\lambda kT]-1}\Bigg|_{\lambda>>hc/kT}\simeq 8\pi\frac{kT}{\lambda^4}$$

$$\rho(\lambda)\Big|_{\lambda<<hc/kT}=\frac{8\pi\,hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp[hc/\lambda kT]-1}\Bigg|_{\lambda<<hc/kT}\simeq \frac{8\pi\,hc}{\lambda^5}\exp[-hc/\lambda kT]$$



Tuttavia la teoria di Plank richiede l'ipotesi che nei sistemi microscopici l'energia possa assumere soltanto valori discreti, ipotesi in radicale contraddizione con tutto il sistema di rappresentazioni della fisica classica…

Esercizio 1

Si calcoli la lunghezza d'onda λ e la frequenza ν alle quali l'intensità di radiazione emessa da un corpo nero è massima se il corpo nero si trova alla temperatura $T = 298$ K.

Vale la legge di Wien:

$$\lambda_{\mathrm{max}} T = 2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}$$

da cui:

$$\lambda_{\mathrm{max}} = \left(2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}\right)\frac{1}{T} = \left(2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}\right)\frac{1}{298\ \mathrm{K}} = 9.7 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$$

Esercizio 2

L'intensità di radiazione emessa da un oggetto ha un massimo a 2000 cm^{-1}. Assumendo che l'oggetto si comporti come un corpo nero si trovi la sua temperatura.

Vale la legge di Wien:

$$\lambda_{max} T = 2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}$$

Vale inoltre:

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$$

quindi:

$$\frac{T}{\bar{\nu}_{max}} = 2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}$$

$$T = \left(2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}\right) \cdot \bar{\nu}_{max} = \left(2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}\right) \cdot \left(2000 \cdot 10^{2}\,\mathrm{m}^{-1}\right) = 580\ \mathrm{K}$$

Esercizio 3

Si calcoli la densità di energia nel range da 650 nm a 655 nm all'interno di una cavità a (a) 25 °C; (b) 3000 °C. Per il calcolo si utilizzi la seguente formula valida nel caso in cui l'intervallo di lunghezze d'onda risulti particolarmente limitato (in questo caso $\Delta\lambda=5$ nm) :

$$u = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \rho(\lambda, T)\, d\lambda = \rho(\lambda, T)(\lambda_1 - \lambda_2)$$

Una cavità è l'approssimazione di un corpo nero e la distribuzione di densità spettrale di energia di volume emessa è descritta dalla distribuzione di Plank.

Vale:

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)} = \frac{8\pi\left(6.6261\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\right)\left(2.9979\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)}{\left(652.5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}\right)^5 \left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)}$$

con:

$$\frac{hc}{\lambda k} = \frac{\left(6.6261\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\right)\left(2.9979\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)}{\left(652.5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}\right)\left(1.3806\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}\right)} = 2.2\cdot 10^{4}\,\mathrm{K}$$

da cui:

$$u = \rho\left(\lambda, T\right)\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)$$

$$= \frac{8\pi\left(6.6261\cdot10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\right)\left(2.9979\cdot10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)}{\left(652.5\cdot10^{-9}\,\mathrm{m}\right)^{5}\left(e^{2.2\cdot10^{4}\,\mathrm{K}/T}-1\right)}\left(5\cdot10^{-9}\,\mathrm{m}\right)$$

$$= \frac{\left(0.211\ \mathrm{J\,m^{-3}}\right)}{\left(e^{2.2\cdot10^{4}\,\mathrm{K}/T}-1\right)}$$

A $T = 298$ K risulta: $u\left(298\ \mathrm{K}\right) = \frac{\left(0.211\ \mathrm{J\,m^{-3}}\right)}{\left(e^{2.2\cdot10^{4}\,\mathrm{K}/298\,\mathrm{K}}-1\right)} = 1.54\cdot10^{-33}\ \mathrm{J\,m^{-3}}$

A $T = 3273$ K risulta: $u\left(3273\ \mathrm{K}\right) = \frac{\left(0.211\ \mathrm{J\,m^{-3}}\right)}{\left(e^{2.2\cdot10^{4}\,\mathrm{K}/3273\,\mathrm{K}}-1\right)} = 2.51\cdot10^{-4}\ \mathrm{J\,m^{-3}}$

Esercizio 4

La temperatura sulla superficie del sole è approssimativamente di 5800 K. Assumendo che l'occhio umano riveli con il massimo di sensibilità la lunghezza d'onda corrispondente al massimo di emissione del sole si indichi qual è il colore meglio percepito dall'occhio.

Assumendo che il sole si comporti come un corpo nero, vale la legge di Wien:

$$\lambda_{\max} T = 2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}$$

da cui:

$$\lambda_{\max} = \left(2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}\right)\frac{1}{T} = \left(2.9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,K}\right)\frac{1}{5800\ \mathrm{K}} = 500 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}$$

La lunghezza d'onda trovata corrisponde al blu-verde (turchese).

Esercizio 5

Partendo dalla distribuzione di densità spettrale di energia di volume secondo le frequenze assunta da Wien si ricavi la legge di Stefan Boltzmann.

La legge di Wien per la densità spettrale di energia di volume secondo le frequenze si scrive:

$$\rho(\nu) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

La quantità di energia di volume infinitesima su un volumetto infinitesimo $d\tau$ associata ad una radiazione con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ vale:

$$du = \rho(\nu)\, d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu$$

Integrando su tutto lo spettro delle frequenze si trova la quantità di energia di volume infinitesima su un volumetto infinitesimo $d\tau$ (ossia la densità di energia di volume u) su tutte le frequenze:

$$u = \int_0^{+\infty} \rho(\nu)\, d\nu = \int_0^{+\infty} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu$$

A partire dall'espressione trovata:

$$u = \int_0^{+\infty} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu$$

eseguendo la seguente sostituzione:

$$\varsigma = \frac{\nu}{T} \qquad \nu = T\varsigma \qquad d\nu = T\, d\varsigma$$

si trova:

$$u = \int_0^{+\infty} T^4 \varsigma^3 F(\varsigma)\ d\varsigma = T^4 \int_0^{+\infty} \varsigma^3 F(\varsigma)\ d\varsigma = \sigma T^4$$

E' stato dimostrato che la densità di energia di volume u (ossia la quantità di energia infinitesima su un volumetto $d\tau$) sull'intero spettro delle frequenze vale:

$$u = \sigma T^4$$

e questa è la legge di Stefan-Boltzmann ottenuta a partire dalla densità spettrale di energia di volume secondo le frequenze.

Esercizio 6

Partendo dalla distribuzione di densità spettrale di energia di volume secondo le lunghezze d'onda assunta da Wien si ricavi la legge di Stefan Boltzmann.

Legge di Wien per la densità spettrale di energia di volume secondo le frequenze si scrive:

$$\rho(\nu) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

e in tal caso vale:

$$du = \rho(\nu)\,d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu$$

Passando alle lunghezze d'onda si può scrivere:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \qquad d\nu = \left|-\frac{c}{\lambda^2}\right| d\lambda = +\frac{c}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$du = \rho(\nu)\,d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{c^3}{\lambda^3} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \frac{c}{\lambda^2}\,d\lambda$$

A partire dall'ultima relazione si può scrivere:

$$du = \frac{c^3}{\lambda^3} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) \frac{c}{\lambda^2}\, d\lambda = \rho(\lambda)\, d\lambda$$

e quindi la densità spettrale di energia di volume secondo le lunghezze d'onda si scrive:

$$\rho(\lambda) = \frac{c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right)$$

e questa è la legge di Wien scritta secondo le lunghezze d'onda.

Integrando su tutto lo spettro delle lunghezze d'onda si trova la quantità di energia di volume infinitesima su un volumetto infinitesimo $d\tau$ (ossia la densità di energia di volume u) su tutte le lunghezze d'onda:

$$u = \int_0^{+\infty} \rho(\lambda)\, d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) d\lambda$$

Esercizi [10]

A partire dall'espressione trovata:

$$u = \int_0^{+\infty} \rho(\lambda)\, d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) d\lambda$$

eseguendo la seguente sostituzione:

$$\varsigma = \frac{c}{\lambda T} \qquad \lambda = \frac{c}{T\varsigma} \qquad d\lambda = -\frac{c}{T\varsigma^2} d\varsigma$$

si trova:

$$u = \int_{+\infty}^{0} \frac{c^4}{c^5} T^5 \varsigma^5 F(\varsigma)\left(-\frac{c}{T\zeta^2}\right) d\varsigma = T^4 \int_0^{+\infty} \varsigma^3 F(\varsigma)\, d\varsigma = \sigma T^4$$

E' stato dimostrato che la densità di energia di volume u (ossia la quantità di energia infinitesima su un volumetto $d\tau$) sull'intero spettro delle lunghezze d'onda vale:

$$u = \sigma T^4$$

e questa è la legge di Stefan-Boltzmann ottenuta a partire dalla densità spettrale di energia di volume secondo le lunghezze d'onda. Il risultato è analogo a quello trovato a partire dalla densità spettrale di energia di volume secondo le frequenze (vedi esercizio precedente).

Esercizio 7

Si integri la distribuzione di densità spettrale di energia di volume di Plank su tutto il range di frequenze per trovare l'energia di volume totale emessa da un corpo nero alla temperatura T.

Vale:

$$u(T) = \int_0^{+\infty} \rho(\lambda, T)\, d\lambda = 8\pi hc \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^5 \left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)}\, d\lambda$$

Eseguendo la sostituzione:

$$x = hc/\lambda kT \quad \Rightarrow \quad \lambda = hc/xkT \quad \Rightarrow \quad d\lambda = \left(-hc/x^2 kT\right) dx$$

si ottiene:

$$u(T) = 8\pi hc \int_0^{+\infty} \frac{1}{(hc/xkT)^5 \left(e^x - 1\right)} \frac{hc}{x^2 kT}\, dx = 8\pi \frac{(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\left(e^x - 1\right)}\, dx$$

$$= 8\pi \frac{(kT)^4}{(hc)^3} \frac{\pi^4}{15} = 8\pi^5 \frac{(kT)^4}{(hc)^5} \frac{1}{15} = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^5 c^5} T^4$$

La legge trovata è la legge di Stefan Boltzmann. L'energia di volume del corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della temperatura. ■

Esercizio 8

Si dimostri che la formula di Raileght-Jeans del corpo nero è compatibile con la forma analitica della densità spettrale di energia di volume prevista dalla prima legge di Wien.

La formula di Raileght-Jeans si scrive:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2$$

Vale:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2 = \frac{8\pi kT}{c^3 \nu}\nu^3 = \nu^3 \frac{8\pi k}{c^3}\frac{1}{\left(\frac{\nu}{T}\right)}$$

ossia:

$$\rho(\nu) = \nu^3 \frac{8\pi k}{c^3} F\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad \text{con} \quad F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\nu}{T}\right)}$$

forma analitica in accordo con quanto prevede la legge di Wien.

Esercizio 9

Calcolare il momento lineare di fotoni con lunghezza d'onda di (a) 750 nm; (b) 70 pm; (c) 19 m.

Vale:

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad p = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}}{(750 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m})} = 8.83 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{Kg\,m\,s^{-1}}$$

ossia:

$$p = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}}{(750 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m})} = 8.83 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{Kg\,m\,s^{-1}}$$

$$p = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}}{(70 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m})} = 9.5 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{Kg\,m\,s^{-1}}$$

$$p = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}}{(19\,\mathrm{m})} = 3.5 \cdot 10^{-35}\ \mathrm{Kg\,m\,s^{-1}}$$

Esercizio 10

Un esperimento di diffrazione richiede elettroni con lunghezza d'onda di De Broglie pari a 0.45 nm. Si calcoli la velocità di tali elettroni.

Vale:

$$\mathrm{v} == \frac{p}{m_e} = \frac{1}{m_e}\frac{h}{\lambda}$$

ossia:

$$\mathrm{v} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}}{(9.109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{Kg})(0.45 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m})} = 1.6 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

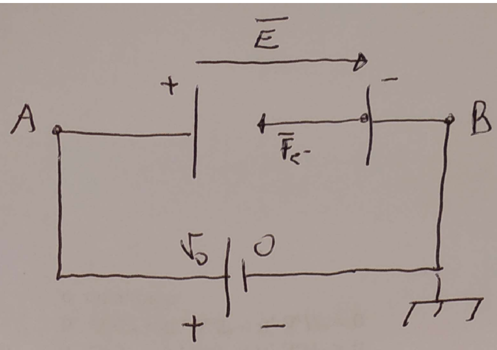
La crisi della fisica classica [34]

TEORIA
per gli esercizi 11 e 14

Nota aggiunta a lezione…

L'energia cinetica di un elettrone accelerato da un campo elettrico generato (tra le piastre di un condensatore) da una differenza di potenziale $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B = V_0$ è espressa dalla relazione:

$$\boxed{E_K = eV_0}$$



Vale $\phi_A - \phi_B = \frac{L_{AB}}{q_0} = \frac{1}{q_0}\left(E_{k_B} - E_{k_A}\right)$

Assumendo: $E_{k_B} \sim 0$

Vale:

$$\phi_A - 0 = \frac{1}{q_0}\left(-E_{k_A}\right) = -\frac{E_{k_A}}{q_0}$$

$$E_{k_A} = -q_0\phi_A = eV_0$$

Esercizio 11

Nell'ambito della microscopia elettronica gli elettroni sono accelerati da opportune differenze di potenziale per ottenere funzioni d'onda caratterizzate da lunghezza d'onda estremamente ridotte. Calcolare la lunghezza d'onda della funzione d'onda di un elettrone accelerato da un campo elettrico generato con una differenza di potenziale di 1000 V.

L'energia cinetica acquisita da un elettrone accelerato dal campo elettrico generato da una differenza di potenziale $\Delta V = -V_0$ si scrive:

$$E_k = (-e)(-V_0) = e\,V_0 \quad \mathrm{C\,V}$$

con e carica dell'elettrone espressa in Coulomb (C) e V_0 espressa in Volt (V).

Definizione: l'energia di 1 eV è l'energia posseduta da un elettrone sottoposto alla differenza di potenziale di 1 V, ossia:

$$E(1\,\mathrm{eV}) = (-e)(-V_0)$$

$$= (1.602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})\left(1\ \mathrm{V}\right) = 1.602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C\,V} = 1.602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

e dunque:

$$1\ \mathrm{eV} = 1.602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

Per il principio di conservazione dell'energia l'energia cinetica in uscita da un dispositivo in grado di accelerare elettroni è pari all'energia potenziale degli elettroni stessi prima che vengano accelerati.

Vale dunque:

$$\frac{p^2}{2m_e} = e\,\mathrm{V}_0$$

da cui:

$$p = \pm\sqrt{2m_e e\,\mathrm{V}_0}$$

Utilizzando la relazione di De Broglie la funzione d'onda associata all'elettrone accelerato si scrive:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e\, e\,\mathrm{V}_0}}$$

la soluzione negativa va ovviamente esclusa per senso fisico…

La formula scritta fornisce dunque la lunghezza d'onda di un elettrone sottoposto ad un campo elettrico generato da una differenza di potenziale V_0.

Inserendo $V_0 = 1000$ V nella formula trovata si ha:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e e V_0}}$$

$$= \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \quad \text{J s}}{\sqrt{2\left(9.109 \cdot 10^{-31}\ \text{Kg}\right)\left(1.602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(1 \cdot 10^{3}\ \text{V}\right)}}$$

$$= 3.88 \cdot 10^{-11} \frac{\text{J s}}{\left(\text{Kg J}\right)^{1/2}}$$

Da un punti di vista dimensionale l'equazione è corretta:

$$\frac{\text{J s}}{\left(\text{Kg J}\right)^{1/2}} = \left(\frac{\text{J}^2\ \text{s}^2}{\text{Kg J}}\right)^{1/2} = \left(\frac{\text{J s}^2}{\text{Kg}}\right)^{1/2} = \left(\frac{(\text{Kg m s}^{-2}\text{m})\ \text{s}^2}{\text{Kg}}\right)^{1/2} = \text{m}$$

La lunghezza d'onda ottenuta è comparabile alle tipiche distanze di legame delle molecole(~ 100 pm). Gli elettroni accelerati con differenze di potenziale dell'ordine del kV possono essere utilizzati dunque in microscopia per ottenere figure di diffrazione che, se correttamente interpretate, forniscono informazioni sui reticoli cristallini o sulle strutture molecolari.

Esercizio 12

Una lampada al sodio emette luce gialla a 550 nm. Quanti fotoni emette al secondo se la sua potenza è di 100 Watt?

L'energia emessa da una lampada di potenza costante P in un intervallo di tempo Δt risulta:

$$E = P\,\Delta t$$

L'energia di un singolo fotone con lunghezza d'onda λ vale:

$$E_\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

Il numero di fotoni emessi in un tempo Δt vale:

$$N = \frac{E}{E_\nu} = P\frac{\lambda}{hc}\Delta t$$

Il numero di fotoni emessi in 1 s vale:

$$\begin{aligned} N &= P\frac{\lambda}{hc}\Delta t = 100\ \text{Watt}\frac{550\cdot 10^{-9}\ \text{m}}{\left(6.6261\cdot 10^{-34}\ \text{J s}\right)\left(2.9979\cdot 10^{8}\ \text{m s}^{-1}\right)}1\,\text{s} \\ &= 2.77\cdot 10^{20} \end{aligned}$$

Esercizio 13

Un lucciola di massa $m = 5$ g emette luce rossa a $\lambda = 650$ nm e con una potenza costante di P=0.10 W. Assumendo che tutti i fotoni vengano emessi in direzione x, si calcoli quale sarebbe la velocità dell'insetto raggiunta dopo un tempo di 10 anni per effetto della sola emissione dei fotoni.

L'energia emessa da una sorgente di potenza costante P in un intervallo di tempo Δt risulta:

$$E = P\,\Delta t$$

L'energia di un singolo fotone con lunghezza d'onda λ vale:

$$E_\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

Il numero di fotoni emessi in un tempo Δt vale:

$$N = \frac{E}{E_\nu} = P\frac{\lambda}{hc}\Delta t$$

Un anno espresso in secondi vale:

$$\Delta t = 10 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3.1536 \cdot 10^8$$

Tenendo conto del principio di conservazione della quantità di moto, la lucciola riceverà una quantità di moto con verso opposto a quello dell'espulsione dei fotoni, pari a:

$$p_{tot} = N p_{\nu} = N\frac{h}{\lambda} = \left(P\frac{\lambda}{hc}\Delta t\right)\left(\frac{h}{\lambda}\right) = P\frac{1}{c}\Delta t$$

In tal caso, in 10 anni, vale:

$$p_{tot} = P\frac{1}{c}\Delta t = \left(0.10\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}m\,s^{-1}}\right)\frac{1}{2.9979\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\left(3.1536\cdot 10^{8}\,\mathrm{s}\right)$$

$$\mathrm{v}_{tot} = \frac{p_{tot}}{m} = \left(0.10\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}m\,s^{-1}}\right)\frac{1}{2.9979\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}\left(3.1536\cdot 10^{8}\,\mathrm{s}\right)\frac{1}{0.005\,\mathrm{kg}}$$

$$\mathrm{v}_{tot} = 21\,\mathrm{m s^{-1}}$$

Esercizio 14

Calcolare il potenziale con il quale bisogna accelerare un elettrone per avere un'onda di De Broglie con lunghezza d'onda pari a 100 pm.

Utilizzando la relazione di De Broglie è facile calcolare la lunghezza d'onda associata all'elettrone accelerato da un potenziale V_0.

Vale:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m_e e V_0}}$$

Quindi il potenziale per accelerare un elettrone in modo che gli sia associata un'onda di De Broglie con lunghezza d'onda λ vale:

$$V_0 = \frac{h^2}{\left(2 m_e e \lambda^2\right)}$$

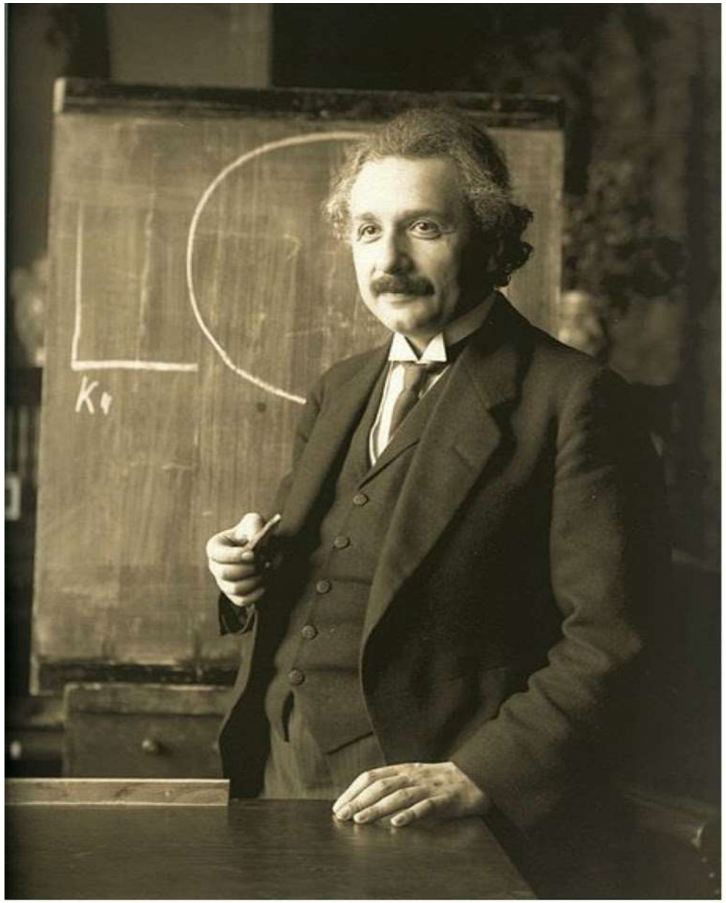
$$= \frac{\left(6.6261 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\right)^2}{2 \cdot \left(9.1094 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\right)\left(1.6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\right)\left(100 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}\right)^2} = 150 \ \mathrm{V}$$

La crisi della fisica classica [37]

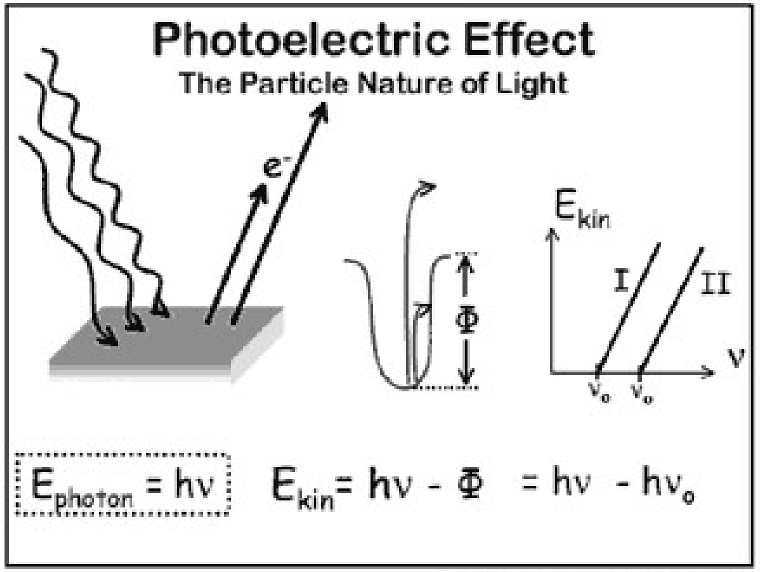
TEORIA
per gli esercizi 15÷17

L'interpretazione teorica dell'effetto fotoelettrico fu data da Einstein nel 1905. Essa si fonda sull'ipotesi che la radiazione e.m. si comporti come se consistesse di un flusso di fotoni con energia quantizzata $h\nu$…

Tutti i fenomeni inerenti l'interazione luce-materia possono essere interpretati tenendo conto che la luce si comporta come un gas di fotoni descritto dalla nuova statistica di Bose-Einstein…



Premio Nobel nel 1921 per la scoperta dell'effetto fotoelettrico



Quantum mechanics is certainly imposing. But an inner voice tells me that it is not yet the real thing. The theory says a lot, but does not really bring us any closer to the secret of the old one. I, at any rate, am convinced that He does not throw dice.

(Albert Einstein)

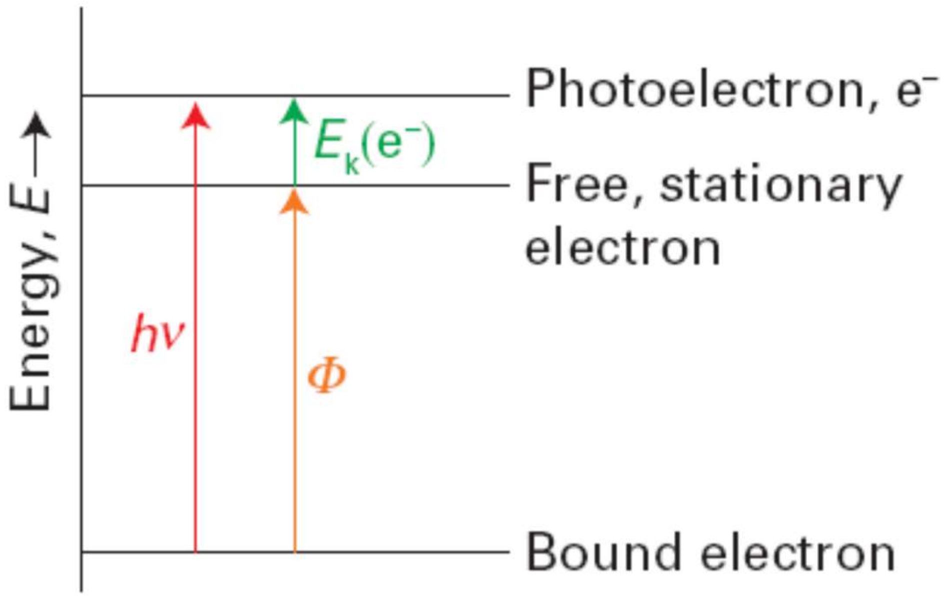
La crisi della fisica classica [38]

L'effetto fotoelettrico è il risultato di una collisione elementare tra un singolo fotone con energia $h\nu$ e un elettrone in prossimità della superficie del metallo. A seguito della collisione l'elettrone guadagna sufficiente energia per essere espulso dal metallo.

La differenza tra l'energia del fotone $h\nu$ e il lavoro di estrazione Φ dell'elettrone dal metallo fornisce l'energia cinetica E_k del fotoelettrone espulso:

$$E_{k,e^-} = h\nu - \Phi \qquad h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$$

Il lavoro di estrazione Φ è l'energia necessaria per allontanare all'infinito un elettrone del metallo ed è caratteristica del metallo.



Esercizio 15

Quando una radiazione ultravioletta a λ=58.4 nm emessa da una lampada ad He è inviata su un campione di Kripton si osserva l'emissione di elettroni a $1.59 \cdot 10^6$ m s^{-1}. Si calcoli il lavoro di estrazione (funzione lavoro) del Kripton.

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$h\nu = \frac{1}{2} m_e \mathrm{v}^2 + I$$

da cui:

$$I = h\nu - \frac{1}{2} m_e \mathrm{v}^2$$

$$= h\frac{c}{\lambda} - \frac{1}{2} m_e \mathrm{v}^2$$

$$= 6.626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\ Hz^{-1}} \cdot \frac{2.998 \cdot 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}}{58.4 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} - \frac{1}{2}\left(9.109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{Kg}\right)\left(1.59 \times 10^6\ \mathrm{m\ s^{-1}}\right)^2$$

$$= 2.25 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

$$= 14.0\ \ \mathrm{eV}$$

Si è usata la conversione: $1\ \ \mathrm{J} = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \ \mathrm{eV}$

Esercizio 16

Quando il litio viene irradiato con della luce, l'energia cinetica degli elettroni emessi è $2.935 \cdot 10^{-19}$ J per λ=300.0 nm e $1.280 \cdot 10^{-19}$ J per λ=400.0 nm. Da questi dati calcolare (a) la costante di Plank, (b) la frequenza di soglia e (c) il lavoro di estrazione (funzione lavoro) del litio.

Vale:

$$E_1 - E_2 = h(\nu_1 - \nu_2) = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

$$1.655 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = h\left(2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)\left(\frac{1}{300 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} - \frac{1}{400 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}\right)$$

da cui si ricava:

$$h = \frac{1.655 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{2.998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\left(\frac{1}{300 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} - \frac{1}{400 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}\right)} = 6.625 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}$$

Usando il dato $\lambda = 300\ \text{nm}$ si può scrivere:

$$2935 \cdot 10^{-19}\,\text{J} = \frac{hc}{300 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} - h\nu_0$$

da cui per la frequenza di soglia si ricava:

$$\nu_0 = 5564 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

Vale inoltre:

$$\phi = h\nu_0 = 3687 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 2301\ \text{eV}$$

Esercizio 17

Il lavoro di estrazione per il cesio metallico vale $\phi = 2.14$ eV. Si calcoli l'energia cinetica E_k dei fotoelettroni espulsi da una luce di lunghezza d'onda di (a) 700 nm e (b) 300 nm.

Il lavoro di estrazione espresso in J vale:

$$\phi = (2.14\,\mathrm{eV})\left(1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J\,eV^{-1}}\right) = 3.42\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

L'emissione di fotoelettroni può avvenire solo se l'energia del fotone E_ν incidente è superiore al lavoro di estrazione ϕ. Se questa condizione è verificata allora l'energia cinetica dei fotoelettroni espulsi vale:

$$E_k = h\nu - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi$$

Nel caso di fotoni incidenti a 700 nm vale:

$$E_\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\left(6.6261\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\right)\left(2.9979\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)}{700\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 2.84\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

e dunque non può esserci effetto fotoelettrico (in quanto $E_\nu < \phi$).

Nel caso di fotoni incidenti a 300 nm vale:

$$E_\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\left(6.6261 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\right)\left(2.9979 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)}{300 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 6.62 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

e in tal caso può esserci effetto fotoelettrico ($E_\nu > \phi$).

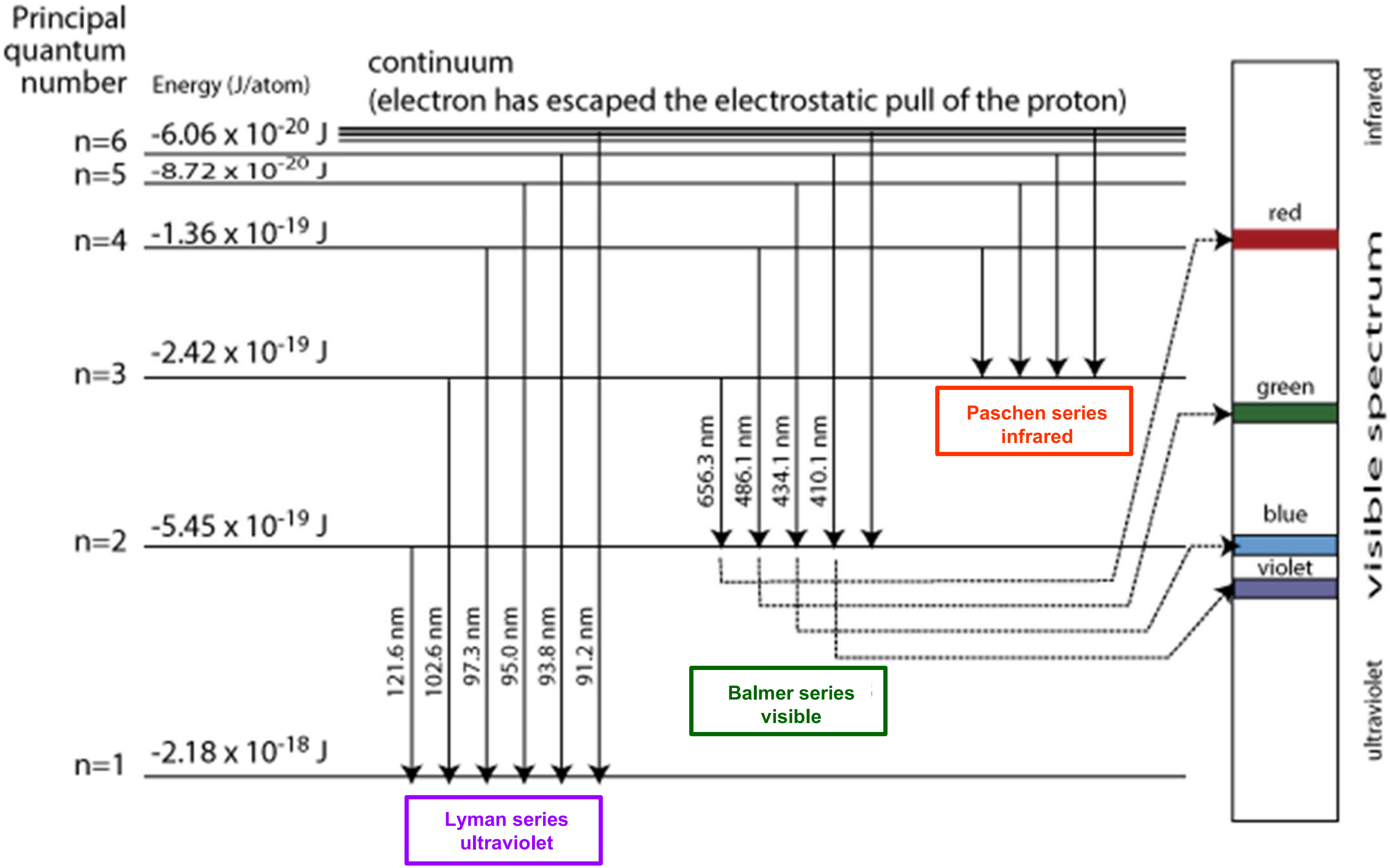
L'energia cinetica dei fotoelettroni espulsi vale:

$$E_k = h\nu - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi = 6.62 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} - 3.42 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 3.20 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Esercizi [27]

TEORIA
per gli esercizi 18÷22

Nell'ambito del modello di Bohr, per l'atomo di idrogeno, le righe spettroscopiche osservate si organizzano in serie:



Esercizi [28]

Nell'ambito del modello di Bohr, per l'atomo di idrogeno, per le serie di righe spettroscopiche osservate valgono:

Paschen series infrared

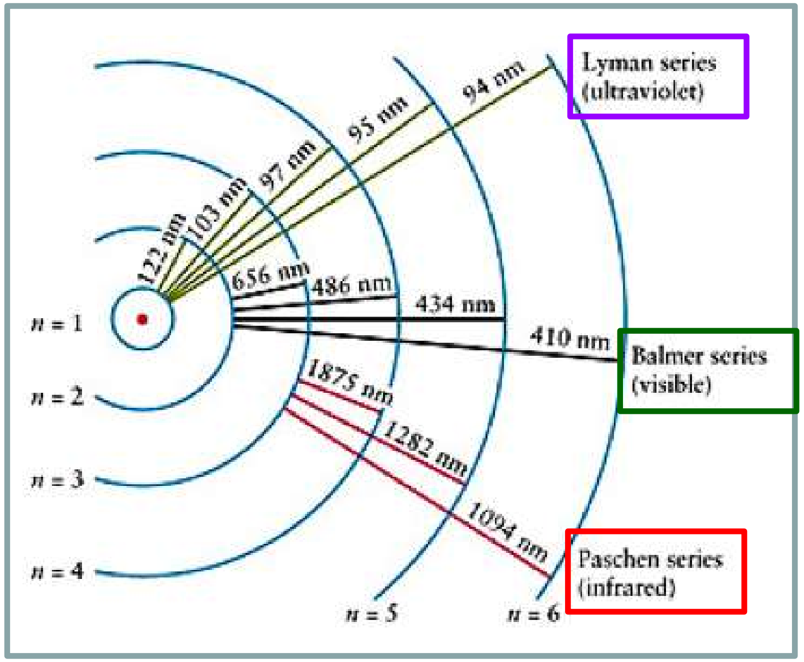
$$\frac{1}{\lambda} = \Re_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \qquad \text{con: } n_1 = 3, \quad n_2 = 4, 5, 6, \ldots$$

Balmer series visible

$$\frac{1}{\lambda} = \Re_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \qquad \text{con: } n_1 = 2, \quad n_2 = 3, 4, 5, \ldots$$

Lyman series ultraviolet

$$\frac{1}{\lambda} = \Re_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \qquad \text{con: } n_1 = 1, \quad n_2 = 2, 3, 4, \ldots$$



N.B. Nello schema la separazione tra i livelli è solo indicativa: è noto infatti che ΔE tra livelli adiacenti diminuisce all'aumentare di n e al limite risulta $\Delta E \to 0$ per $n \to +\infty$.

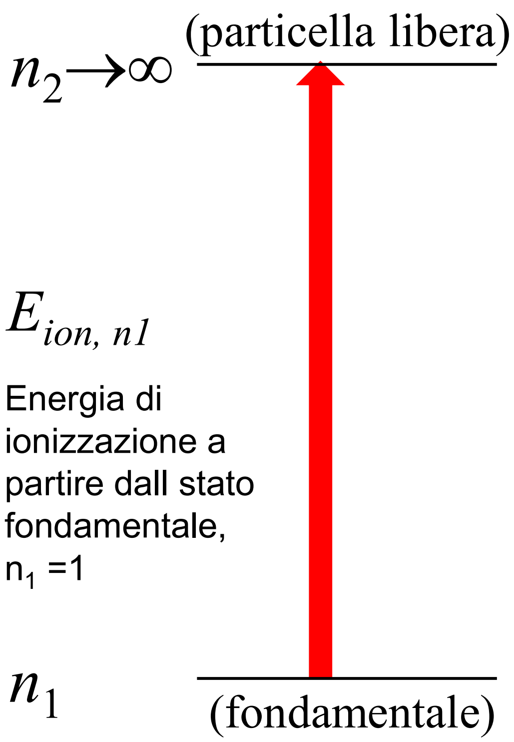
La costante di Riedberg vale:

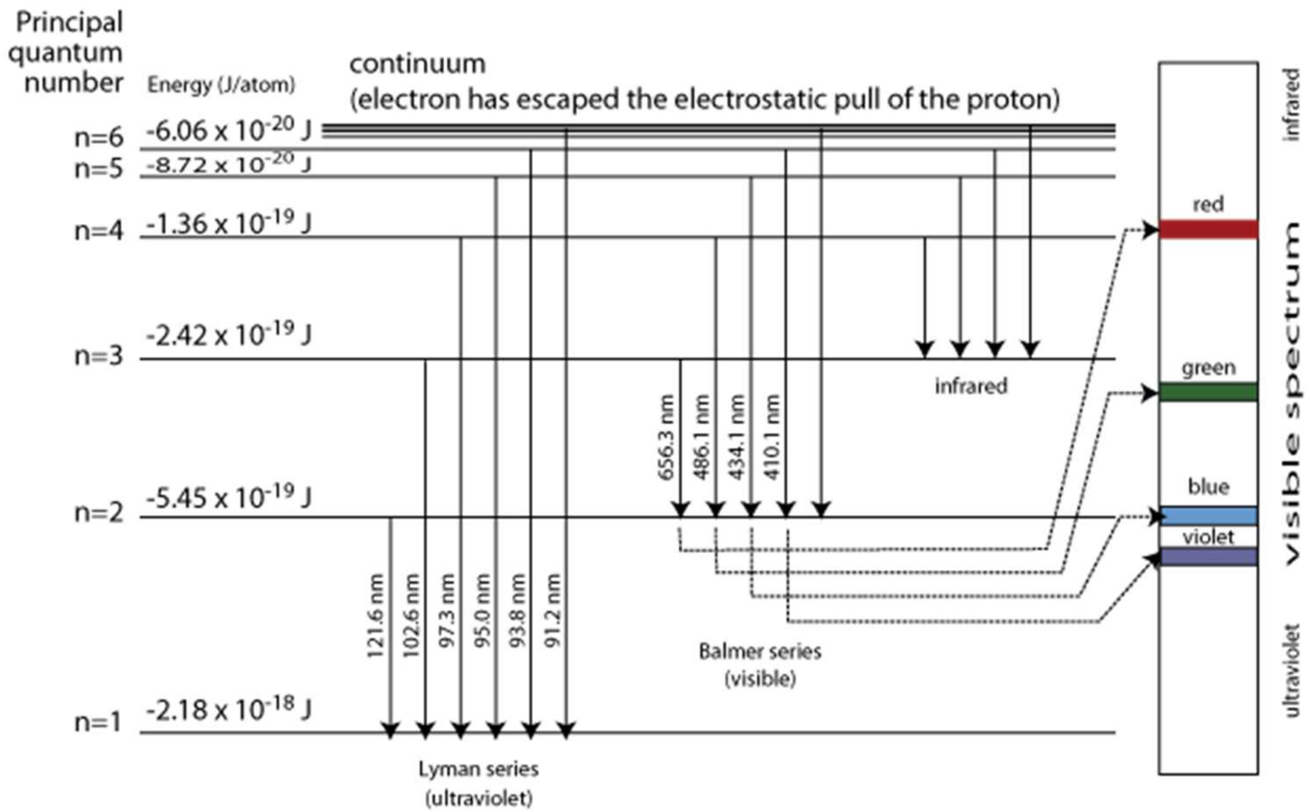
$$R_H = 109677 \text{ cm}^{-1} = 109677 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$$

Esercizi [29]

Sempre nell'ambito degli atomi idrogenoidi l'energia di ionizzazione $E_{ion,n1}$ a partire da un determinato stato n_1 (non necessariamente il fondamentale) si ottiene calcolando la separazione energetica tra il livello di partenza n_1 e il livello finale n_2 con n_2 tendente a infinito (stato non legato):

$$E_{ion,n_1} = hc\frac{1}{\lambda} = hc\,\Re_H\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)\Bigg|_{n_2\to+\infty} = hc\,\Re_H\left(\frac{1}{n_1^2}\right) \qquad \Re_H = 109677\ \mathrm{cm}^{-1}$$





Esercizio 18

Si calcoli la lunghezza d'onda della riga appartenente alla serie di Balmer caratterizzata da $n_2 = 4$ dello spettro dell'idrogeno atomico.

Per la serie di Balmer vale:

$$\frac{1}{\lambda} = \Re_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \qquad \text{con: } n_1 = 2, \quad n_2 = 3, 4, 5, \ldots \qquad \Re_H = 109677 \text{ cm}^{-1}$$

esprimibile (eventualmente) anche in termini di numero d'onda: $\tilde{\nu} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Con $n_2 = 4$ si ottiene:

$$\lambda = \frac{1}{\Re_H} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right)^{-1}$$

$$= \left(1.09677 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}\right)^{-1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = 486.3 \text{ nm}$$

Esercizio 19

La frequenza di una delle righe della serie di Paschen dell'idrogeno atomico è $2.7415 \cdot 10^{14}$ Hz. Si calcoli il numero quantico n_2 dello stato ad energia più elevata della transizione corrispondente.

Per la serie di Paschen vale:

$$\frac{1}{\lambda} = \Re_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \qquad \text{con: } n_1 = 3 \qquad \Re_H = 109677 \text{ cm}^{-1}$$

$$n_2 = 4, 5, 6, \ldots$$

e quindi:

$$n_2 = \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\lambda \Re_H} \right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{3^2} - \frac{\nu}{c} \frac{1}{\Re_H} \right)^{-1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{9} - \frac{2.7415 \cdot 10^{14} \, s^{-1}}{\left(2.9979 \cdot 10^{8} \text{ m s}^{-1}\right)\left(1.09677 \cdot 10^{7} \text{ m}^{-1}\right)} \right)^{-1/2}$$

$$= 6.005$$

ossia $n_2 = 6$ (a meno dell'errore di approssimazione nel calcolo).

Esercizio 20

Una serie di righe dello spettro dell'idrogeno atomico è caratterizzata da lunghezze d'onda a 656.46 nm, 486.27 nm, 434.17 nm e 410.29 nm. Qual è la lunghezza d'onda della riga successiva appartenete alla serie? Qual è l'energia di ionizzazione dell'atomo quando l'elettrone si trova nello stato a più bassa energia tra gli stati interessati dalle transizioni sopra?

Per gli atomi idrogenoidi vale:

$$E_n = \frac{-h\,c\,\Re_H}{n^2} \qquad h\,c\,\Re_H = \frac{Z^2 \mu\, e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2\, \hbar^2} \qquad \Re_H = 109677\ \text{cm}^{-1}$$

Per una transizione tra livelli energetici n_1 e n_2 vale:

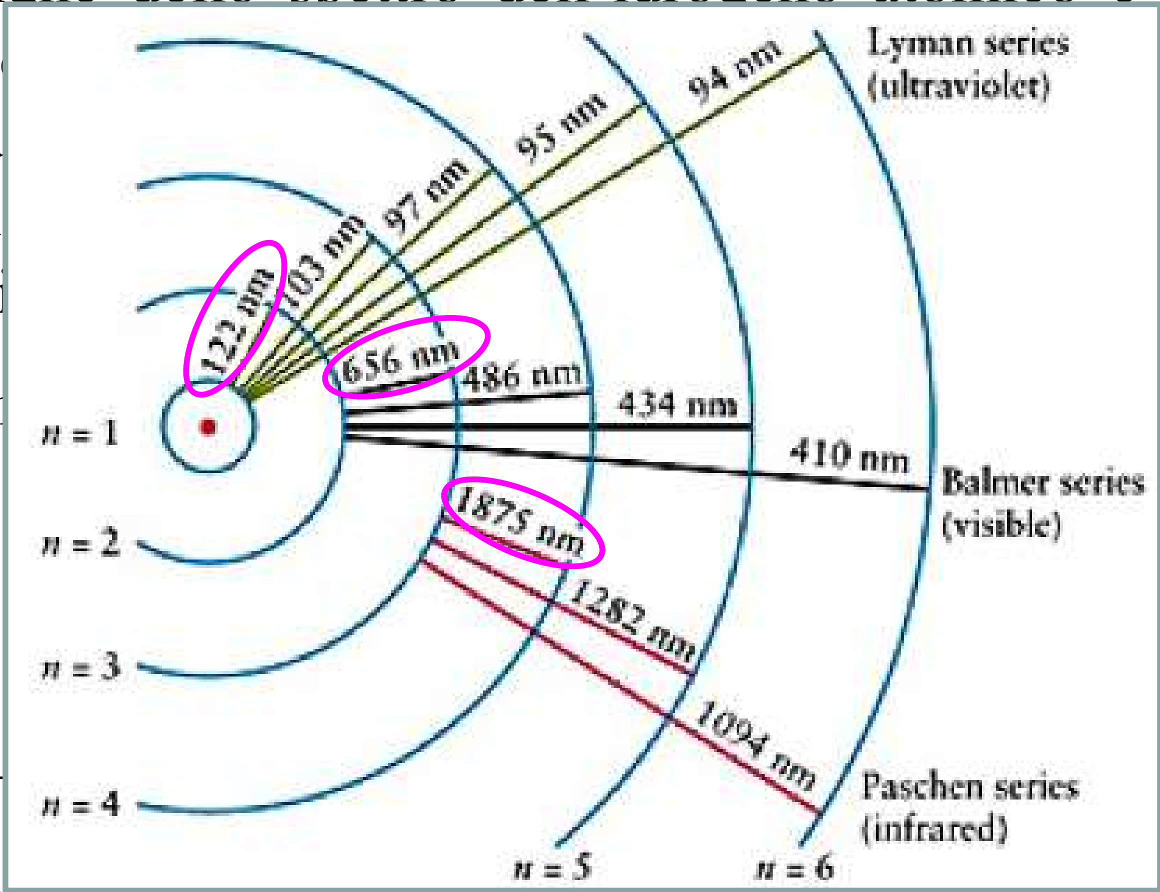
$$\frac{1}{\lambda} = \Re_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Il valore λ_{max} è ottenibile dalla transizione che interessa i livelli di energia caratterizzati dalla minima separazione ΔE_{min} ossia tra i livelli adiacenti n_1+1 e n_1 e in tal caso vale:

$$\frac{1}{\lambda_{max} \Re_H} = \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{(n_1+1)^2} = \frac{2n_1+1}{n_1^2 (n_1+1)^2}$$

Esercizio 20

Una serie di righe dello spettro dell'idrogeno atomico è caratterizzata da lunghezze d'on … 0.29 nm. Qual è la lunghezza d … la serie? Qual è l'energia di ion … ova nello stato a più bassa energi … a?



Per gli atomi id

$$E_n = \frac{-h\,c\,\Re_H}{n^2}$$ … $77\ \mathrm{cm}^{-1}$

Per una transizi

$$\frac{1}{\lambda} = \Re_H\left(\frac{1}{n_1^2} - \right.$$

Il valore $\lambda_{\max}$ è ottenibile dalla transizione che interessa i livelli di energia caratterizzati dalla minima separazione ΔE_{min} ossia tra i livelli adiacenti n_1+1 e n_1 e in tal caso vale:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}\Re_H} = \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{(n_1+1)^2} = \frac{2n_1+1}{n_1^2(n_1+1)^2}$$

Calcolando il reciproco della precedente, vale:

$$\lambda_{\max}\Re_H = \frac{n_1^2\left(n_1+1\right)^2}{2n_1+1}$$

A partire dalla $\lambda_{\max}$ fornita nel testo del problema si ottiene il valore di n_1:

$$\frac{n_1^2\left(n_1+1\right)^2}{2n_1+1} = \lambda_{\max}\Re_H = (656.46\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m})\cdot(109677\cdot 10^{2}\ \mathrm{m}^{-1}) = 7.20$$

ossia: $n_1 = 2$

Le transizioni sono date da:

$$\frac{1}{\lambda} = \Re_H\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n_2^2}\right) \qquad n_2 = 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

Per la riga successiva, caratterizzata da $n_2 = 7$, vale:

$$\frac{1}{\lambda} = \Re_H\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{7^2}\right) = 109677\ \mathrm{cm}^{-1}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{7^2}\right)$$

per cui la riga successiva cade a:

$$\lambda = 397.13\ \mathrm{nm}$$

L'energia richiesta per ionizzare l'atomo a partire dallo stato eccitato caratterizzato da n_1= 2 è ottenuta facendo tendere lo stato finale n_2 a infinito, ossia:

$$\frac{1}{\lambda_\infty} = \Re_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \varepsilon^+ \right) \sim \frac{\Re_H}{n_1^2} = \frac{\Re_H}{2^2}$$

$$= \frac{109677}{2^2} \text{ cm}^{-1} = 27419 \text{ cm}^{-1}$$

L'energia di ionizzazione a partire dallo stato eccitato n_1=2 risulta:

$$I = \frac{hc}{\lambda_\infty}$$

$$= (6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s})(3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})(27419 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1})$$

$$= 5.450 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$= 3.40 \text{ eV}$$

Si ricordi che vale la conversione: 1 eV = 1.6022 · 10^{-19} J

TEORIA
per l'esercizio 21

Per le righe dell'idrogeno atomico vale dunque:

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \qquad n_1 = 1, 2, 3, \ldots \quad n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3, \ldots \quad R_H = 109677 \text{ cm}^{-1}$$

Il risultato può essere espresso in forma più sintetica nella seguente legge di Ritz:

$$\bar{\nu} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = \frac{R_H}{n_1^2} - \frac{R_H}{n_2^2} = T_{n_1} - T_{n_2}$$

Questa importante legge esprime il principio di combinazione di Ritz.

Ogni riga osservata nello spettro dell'atomo di idrogeno è caratterizzata da un numero d'onda $\bar{\nu}$ esprimibile come differenza di due termini spettrali T_n del tipo:

$$\bar{\nu}_n = \frac{R_H}{n_n} = T_n$$

I termini spettrali dell'atomo di idrogeno sono caratteristici dell'atomo perché dipendenti R_H a sua volta caratteristica dell'atomo.

Il principio di combinazione di Ritz vale per tutti gli atomi.
I termini spettrali T_n in questo caso sono ottenuti a partire da una diversa costante R (caratteristica dell'atomo considerato) da sostituire al posto della costante R_H.

Esercizio 21

Uno dei termini dell'atomo di idrogeno è a 27414 cm^{-1}. Si calcoli il valore del termine con il quale esso si combina per dare luce a λ = 486.1 nm.

Vale:

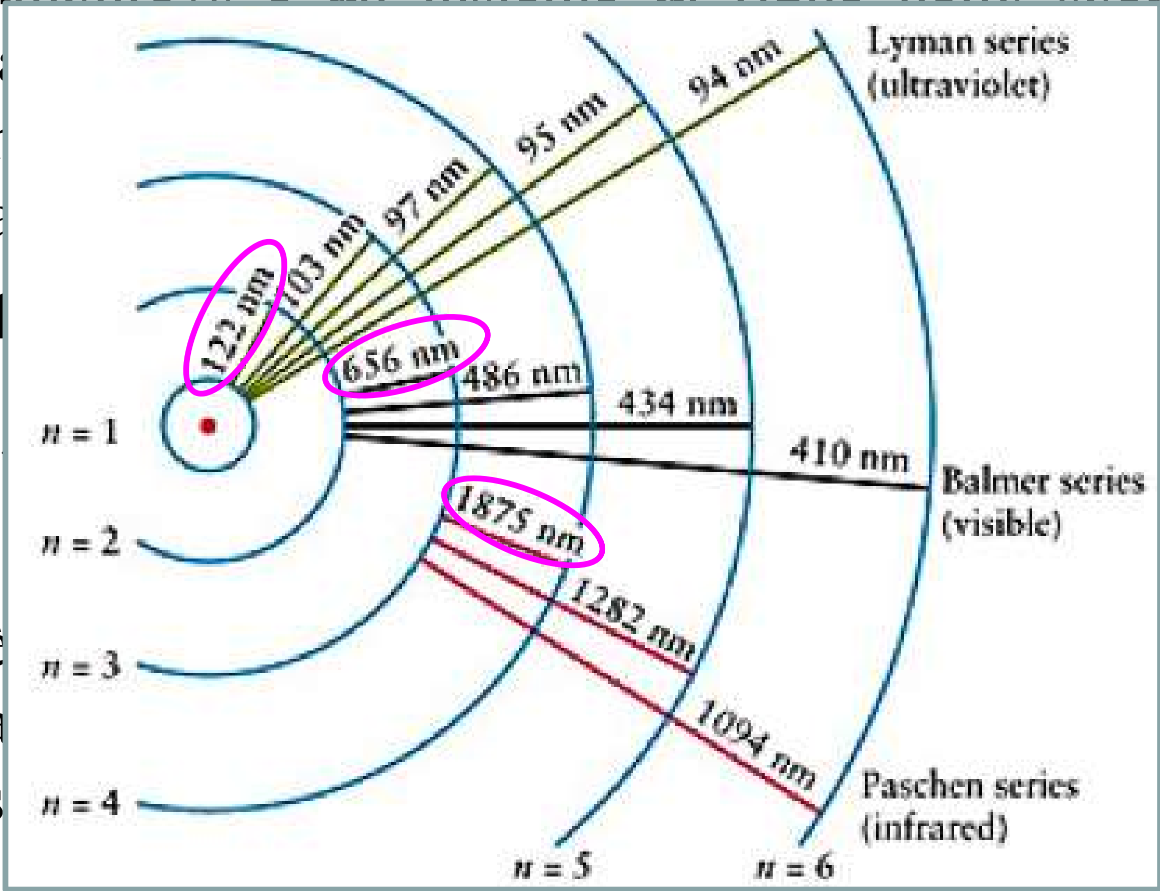
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{486.1 \cdot 10^{-7}\ \text{cm}} = 20572\ \text{cm}^{-1}$$

quindi il termine risulta:

$$T = 27414\ \text{cm}^{-1} - 20572\ \text{cm}^{-1} = 6842\ \text{cm}^{-1}$$

Esercizio 22

La serie di Humphreys è un insieme di righe nello spettro di emissione
dell'idrogeno c ... ie inizia con una
riga a 12368 nr ... sizioni coinvolte
nella serie? Qua ... medie?



Per le righe dell

$$\frac{1}{\lambda} = \tilde{\nu} = \Re_H \Bigg(\quad \ldots \quad \Re_H = 109677 \text{ cm}^{-1}$$

Il valore λ_{max} è ... livelli di energia
caratterizzati da ... lli adiacenti n_1+1
e n_1 e in tal cas

$$\frac{1}{\lambda_{max}\Re_H} = \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{(n_1+1)^2} = \frac{(n_1+1)^2 - n_1^2}{n_1^2 (n_1+1)^2} = \frac{2n_1+1}{n_1^2 (n_1+1)^2}$$

La transizione a lunghezza d'onda più lunga è quella fornita dal testo a λ_{max} = 12368 nm = $1.2368 \cdot 10^{-3}$ cm.

Esercizio 22

La serie di Humphreys è un insieme di righe nello spettro di emissione dell'idrogeno caratterizzate da un certo valore di n_1. La serie inizia con una riga a 12368 nm e termina a 3281.4 nm. Quali sono le transizioni coinvolte nella serie? Quali sono le lunghezze d'onda delle righe intermedie?

Per le righe dell'idrogeno, in generale, vale:

$$\frac{1}{\lambda} = \tilde{\nu} = \Re_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad \text{con: } n_1 = 1, 2, 3, \ldots \quad n_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, n_1 + 3, \ldots \qquad \Re_H = 109677 \text{ cm}^{-1}$$

Il valore λ_{max} è ottenibile dalla transizione che interessa i livelli di energia caratterizzati dalla minima separazione ΔE_{min} ossia tra i livelli adiacenti n_1+1 e n_1 e in tal caso vale:

$$\frac{1}{\lambda_{max}\Re_H} = \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{(n_1+1)^2} = \frac{(n_1+1)^2 - n_1^2}{n_1^2 (n_1+1)^2} = \frac{2n_1+1}{n_1^2 (n_1+1)^2}$$

La transizione a lunghezza d'onda più lunga è quella fornita dal testo a λ_{max} = 12368 nm = $1.2368 \cdot 10^{-3}$ cm.

Dai valori forniti nel testo:si può calcolare:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}\Re_H} = \left[\left(1.2368\cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}\right)\left(109677\ \mathrm{cm}^{-1}\right)\right]^{-1} = \left(135.6\right)^{-1}$$

Il valore di n_1 è trovato cercando un valore intero di n_1 per il quale vale:

$$\frac{1}{\lambda_{\max}\Re_H} = \frac{2n_1+1}{n_1^2\left(n_1+1\right)^2} = \left(135.6\right)^{-1}$$

ossia:

$$\frac{n_1^2\left(n_1+1\right)^2}{2n_1+1} = 135.6$$

E' facile verificare che la frazione sopra è verificata per n_1=6. La serie di Humphreys si compone dunque delle righe con n_1=6.

Le lunghezze d'onda delle righe della serie di Humphreys sono:

$$\lambda_{n_2} = \Re_H^{-1}\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)^{-1} \qquad \text{con: } n_2 = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots$$

In particolare valgono:

$$\lambda_{n_2=7} = \Re_H^{-1}\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}\right)^{-1} = 12372.0\ \text{nm} \qquad \text{con: } n_2 = 7$$

$$\lambda_{n_2=8} = \Re_H^{-1}\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{8^2}\right)^{-1} = 7502.5\ \text{nm} \qquad \text{con: } n_2 = 8$$

$$\lambda_{n_2=9} = \Re_H^{-1}\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{9^2}\right)^{-1} = 5908.3\ \text{nm} \qquad \text{con: } n_2 = 9$$

$$\lambda_{n_2=10} = \Re_H^{-1}\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{10^2}\right)^{-1} = 5128.7\ \text{nm} \qquad \text{con: } n_2 = 10$$

La riga di accumulazione cade a lunghezza d'onda:

$$\lambda_{n_2\to+\infty} = \Re_H^{-1}\left(\frac{1}{6^2}-\varepsilon\right)^{-1} \to \Re_H^{-1}\left(\frac{1}{6^2}\right)^{-1} = 3282{,}4\ \text{nm}$$

in accordo con la riga a lunghezza d'onda minima fornita nel testo.