# Tutorato 4 esercizio 3

$V$ spazio vettoriale su $K$

$\dim_K V = n$

$U, W \leq V \qquad U \oplus W = V$

$\dim_K U = k \qquad \dim_K W = n-k$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ base di $V$

$\{u_1, \dots, u_k\}$ base di $U$

$\{w_1, \dots, w_k\}$ base duale di $W$:

$w_i$ vettori riga $1 \times n$

tali che

$$W = \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(w_i)$$

$$= \left\{ v \in V \;\middle|\; \underbrace{\begin{pmatrix} - & w_1 & - \\ & \vdots & \\ - & w_k & - \end{pmatrix}}_{k \times n} \cdot \underbrace{v}_{n \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{k \times 1} \right\}$$

$=$

$$\overline{U} := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_k \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\overline{W} := \begin{pmatrix} - & w_1 & - \\ & \vdots & \\ - & w_k & - \end{pmatrix}$$

Suggerimento: devo pensare ai $w_i$ come elementi di $V^\vee = \operatorname{Hom}_K(V, K)$

ovvero $\quad w_i : V \longrightarrow K$

$$v \longmapsto \underbrace{\underbrace{w_i}_{1 \times n} \cdot \underbrace{v}_{n \times 1}}_{1 \times 1 \,\rightsquigarrow\, \in K}$$

Osservazione: pensando ai $w_i \in \operatorname{Hom}_K(V, K) = V^\vee$ non ho bisogno di fissare la base $\{e_1, \dots, e_n\}$

ma se vogliamo pensare ad un elemento di $V^\vee$ come vettore riga dobbiamo

- fissare una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di $V$
- il vettore associato a $\lambda \in V^\vee$ è $(\lambda(e_1), \dots, \lambda(e_n))$

ovvero $\quad \lambda = \sum \lambda(e_i)\, e_i^\vee \in V^\vee$

dove $\quad e_i^\vee : V \longrightarrow K$

$$e_j \longmapsto \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$\{e_1^\vee, \dots, e_n^\vee\}$ è la **BASE DUALE** associata ad $\{e_1, \dots, e_n\}$

(è base perché $V$ è finito dimensionale)

<u>Oss</u> Dato che $V = U \oplus W$ $\left[ \begin{matrix} U, W \text{ generano } V \\ U \cap W = \{0\} \end{matrix} \right]$

ogni vettore $v \in V$ si scrive come $v = u + w$ $\quad u \in U$, $w \in W$

Inoltre se $\overset{\in U}{u_1} + \overset{\in W}{w_1} = \overset{\in U}{u_2} + \overset{\in W}{w_2}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$

$\Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$

$\Rightarrow u_1 = u_2\,,\ w_1 = w_2$

$\rightsquigarrow$ Ogni $v \in V$ si scrive in modo <u>UNICO</u> come $\overset{\in W}{w} + \overset{\in U}{u}$

Proiezione di $V$ su $W$ parallela a $U$:

$$\tilde{\pi} : V = U \oplus W \longrightarrow W$$
$$v = u + w \longmapsto w$$

Proiezione di $V$ su $U$ parallela a $W$

$$\pi : V = U \oplus W \twoheadrightarrow U$$
$$v = u + w \longmapsto u$$

Riflessioni:

$$\sigma_W^U : V = W \oplus U \longrightarrow V$$
$$v = w + u \longmapsto (-w) + u$$

$$\sigma_U^W : V \longrightarrow V$$
$$w + u \longmapsto w - u$$

Dimostrare (a) La somma delle due proiezioni

è l'identità su $V$

(b) $\sigma_W^U = id_V - 2\,\tilde{\Pi}$

(c) rango $(\underbrace{\overline{W}_{k\times n} \cdot \overline{U}_{n\times k}}_{k\times k}) = k$ [invertibile]

(d) Se $A$ = Matrice corrispondente a $\Pi$ $\in M_n(K)$ nella base $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$\Rightarrow A = \overline{U}\,(\overline{W}\,\overline{U})^{-1}\,\overline{W}$$

"(a),(b)" ovvi dalle formule per un vettore $v = \underset{\underset{U}{\cap}}{u} + \underset{\underset{W}{\cap}}{w} \in V$

"(c)" Sia $\mathcal{U} : K^k \longrightarrow V$ Operatore associato ad $\overline{U}$

[$V$ base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $K^k$ con base canonica $\{S_1, \dots, S_k\}$ $S_i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \text{ i-esimo posto}}{1}, 0, \dots, 0)$]

$\mathcal{W} : V \longrightarrow K^k$ Operatore associato a $\overline{W}$

[$V$ base $\{e_1, \dots, e_n\}$, $K^k$ base canonica $\{S_1, \dots, S_k\}$]

$$\Rightarrow \mathcal{U}(S_i) = \begin{pmatrix} | & & | & & | \\ u_1 & \dots & u_i & \dots & u_k \\ | & & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ u_i \\ | \end{pmatrix} = u_i \in U$$

$$\Rightarrow \mathcal{U} : K^k \xrightarrow{\cong} U \hookrightarrow V \qquad \mathrm{Im}(\mathcal{U}) = U$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}(\mathcal{W}\mathcal{U}) \cong \mathrm{Ker}(\mathcal{W}) \cap U \underset{\uparrow \text{def } \mathcal{W}}{=} W \cap U = (0)$$

$$\Rightarrow \text{rango}(\overline{W}\,\overline{U}) = \dim_K(\text{Immagine}(\mathcal{W}\mathcal{U})) = \dim_K K^k - \dim_K \mathrm{Ker}\,\mathcal{W}\mathcal{U} = k - 0 = k$$

$\Rightarrow$ $\overline{W}\,\overline{U}$ ha rango pieno

$\underline{\underline{\text{"(d)"}}}$ : $\mathcal{U}\,(\mathcal{W}\,\mathcal{U})^{-1}\,\mathcal{W} = \Pi$

dato che sono operatori lineari $V \longrightarrow V$ basta verificare l'uguaglianza
$\sim$ su $W$
$\sim$ su $U$
( perché $U + W = V$ )

- Se $w \in W$ $\Rightarrow$ $\mathcal{W}(w) = 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}\,(\mathcal{W}\,\mathcal{U})^{-1}\,\mathcal{W}\,(w) = \mathcal{U}\,(\mathcal{W}\,\mathcal{U})^{-1}(0) = 0$
$\Pi\, w = 0$ $\qquad = \Pi\, w$ ✓

- dato che $u_i$ generano $U$ basta verificare l'uguaglianza sugli $u_i$

$$\mathcal{W}\,(u_i) = \begin{pmatrix} w_1 \cdot u_i \\ | \\ w_k \cdot u_i \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{(w_j \cdot u_i)}_{\in K} \cdot \delta_j \in K^k$$

$$\boxed{\mathcal{W}\,\mathcal{U}\,(\delta_i) = \mathcal{W}\,(u_i) = \sum_{j=1}^{k} (w_j \cdot u_i)\, \delta_j}$$

$$\Rightarrow (\mathcal{W}\,\mathcal{U})^{-1}\,\big(\mathcal{W}\,(u_i)\big) = (\mathcal{W}\,\mathcal{U})^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{k} (w_j \cdot u_i)\, \delta_j\Big)$$

$$= \delta_i$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}\,(\mathcal{W}\,\mathcal{U})^{-1}\,(\mathcal{W})\,(u_i) = \mathcal{U}\,(\delta_i) = u_i$$
$$= \Pi\, u_i$$

$$\Longrightarrow \quad \Pi = \mathcal{U} \circ (\mathcal{W}\,\mathcal{U})^{-1} \circ (\mathcal{W}) \quad \text{su } V$$

$\underline{/\!/}$