Geometria 1 - V Tutorato, II semestre

Esercizio 1 - Euclidea, minima distanza
Siano date, in $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$, le varietà

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \pi = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Si dimostri che le due varietà sono sghembe.

(b) Si individuino due punti di minima distanza e si calcoli dunque la distanza tra r e π.

(c) La coppia di punti di minima distanza è unica?

(d) È vero che per due generiche varietà (in dimensione non necessariamente 4) la coppia di minima di stanza è unica?

(e) Date, in $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$, due generiche varietà

$$\mathbb{L} = L + V_{\mathbb{L}} \qquad \mathbb{M} = M + V_{\mathbb{M}}$$

con intersezione vuota, e data una coppia $(L_0, M_0) \in \mathbb{L} \times \mathbb{M}$ di minima distanza, si descriva l'insieme

$$\mathcal{A} = \{(P, Q) \in \mathbb{L} \times \mathbb{M} \mid (P, Q) \text{ sia una coppia di minima distanza } \}.$$

Esercizio 2 - Trasformazione affine, Matrice, Punti fissi
Siano dati in $\mathbb{A} := \mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ quattro punti P_0, P_1, P_2, P_3 in posizione generale. Sia $F : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ la trasformazione affine che manda P_0 in P_2, P_1 in P_3, P_2 in P_1 e P_3 in P_0.

(a) Si scelga un riferimento affine e si scriva la matrice di F in tale riferimento.

(b) Si individuino i punti fissi di F (cioè i punti $P \in \mathbb{A}$ tali che $F(P) = P$).

(c) Si individuino i punti fissi di F^2.