Impulso e quantità di moto

Legge di Newton

$$\mathbf{F}\,dt = d\mathbf{p} = d(m\mathbf{v})$$

La quantità $\mathbf{F}\,dt$ viene detta *impulso* elementare della forza in dt.

$$\mathbf{i}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt$$

Se una forza agisce per un intervallo di tempo che va da t_1 a t_2, essa esercita un impulso dato dalla quantità vettoriale qui a fianco. Si ha:

$$\mathbf{i}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta\mathbf{p} = \Delta(m\mathbf{v})$$

che esprime il *teorema dell'impulso*: la variazione della quantità di moto di un punto materiale sotto l'azione della forza **F** nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2 è uguale all'impulso corrispondente, qualunque sia la legge con cui la forza varia nel tempo, qualunque sia la durata dell'intervallo.

Impulso e quantità di moto

EXAMPLE 8.1. A ball whose mass is 0.1 kg is allowed to fall from a height of 2 m and, after hitting the floor, it bounces back up to a height of 1.8 m. Determine the impulse it received from gravity while it was falling and the impulse it received when it struck the floor.

Il valor medio di una grandezza in un certo intervallo di tempo è, per definizione, l'integrale di quella grandezza su quell'intervallo di tempo, diviso per la durata di quest'ultimo. Nel caso della nostra forza quindi

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\, dt \; .$$

ESEMPIO 6.5.1. Il martello è uno strumento usato sin dall'antichità per amplificare la forza muscolare. Inizialmente, al tempo t_1 il martello, di cui indicheremo con m la massa, è fermo; gli si applica con la mano una forza di valor medio $\langle \mathbf{F} \rangle$ sino all'istante t_2 in cui il martello colpisce la testa del chiodo. In quest'istante, per il teorema dell'impulso, il martello ha la quantità di moto $\mathrm{p}_2 = \langle \mathbf{F} \rangle (t_2 - t_1)$. Successivamente il martello rallenta, conficcando il chiodo, sino ad arrestarsi (ad avere quantità di moto nulla) all'istante t_3. La forza media $\langle \mathbf{F}' \rangle$ impressa al chiodo in quest'intervallo di tempo è, ancora per il teorema dell'impulso $\langle \mathbf{F}' \rangle = \mathrm{p}_2/(t_3 - t_2)$ e, in definitiva

$$\frac{\langle F' \rangle}{\langle F \rangle} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} \; .$$

Come si vede il rapporto tra le forze medie è uguale all'inverso delle loro durate; si può così facilmente ottenere un'amplificazione dell'intensità della forza anche di qualche migliaio di volte. □

Meccanica dei sistemi

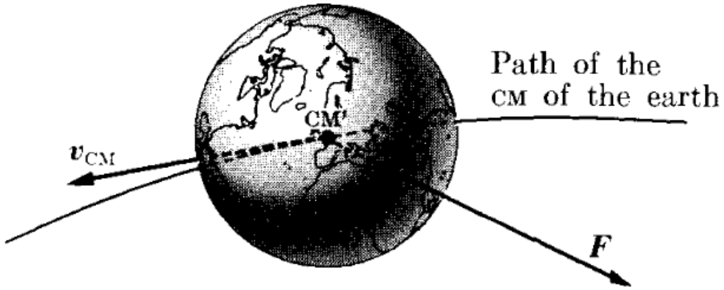
Questo capitolo può apparire astratto, perché le cose dette hanno una validità molto generale.

Cos’è un sistema di punti materiali?

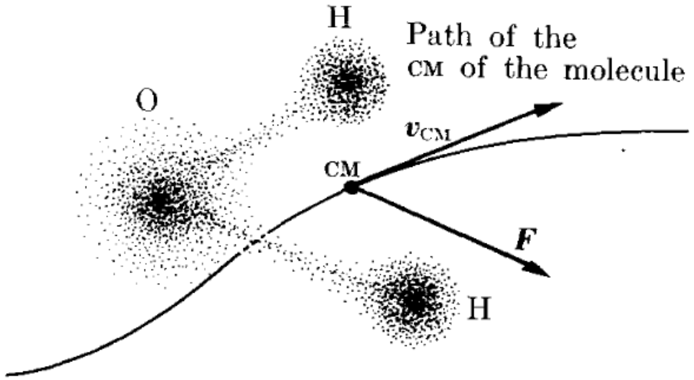
- Possono essere due o più corpi che interagiscono (es: due palle da biliardo)
- O qualsiasi corpo che non si può assimilare ad un punto materiale (es: nave in porto, ascia in volo, nuvola, un fluido)

Cosa hanno in commune tutti questi sistemi?

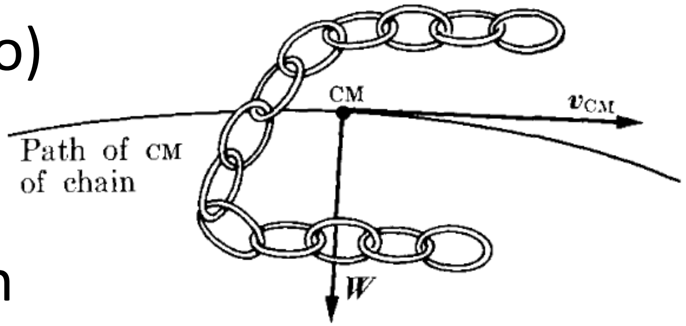
- In essi agiscono forze interne
- Hanno un baricentro

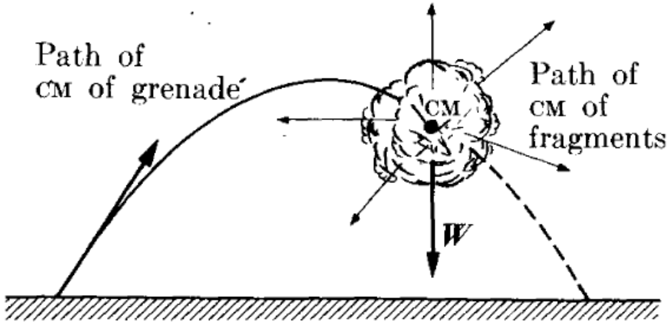


(a)



(b)





Meccanica dei sistemi a due corpi: prove sperimentali della conservazione della quantità di moto

Abbiamo visto che tutte le volte che parliamo di energia potenziale dobbiamo intenderla come energia di interazione, cioè il lavoro fatto contro le forze del campo di forza per costituire un sistema. Ad esempio:

Nuclei (Forze forti): D, T, α
Atomi (elettroni e protoni del nucleo, Forze Coulombiane): H, He, Li, Be, B, C, N, O……….
Una molecola biatomica (Forze di van der Waals): HCl, CO, H_2, O_2, N_2
Una molecola triatomica (Forze di van der Waals): CO_2, H_2O
Molecole più complesse (Forze di van der Waals): CH_4, NH_3
Solidi (corpi rigidi), Fluidi, Gas (Forze di van der Waals)
Stelle doppie (Forze Gravitazionali)
Sistemi solari (Forze gravitazionali)

Tutti questi sistemi sono esempi di sistemi stabili e la forza fatta contro le forze del campo è negativa. Tutti questi sistemi sono soggetti a forze di interazione (che li tengono insieme) e a forze esterne tipo l’attrazione terrestre (solidi, fluidi, gas, molecole, atomi e nuclei) o l’attrazione gravitazionale dovuta al buco nero al centro della galassia nel caso di sistemi planetari e stelle doppie. Vogliamo capire il ruolo delle forze di interazione e di quelle esterne.

Meccanica dei sistemi a due corpi: prove sperimentali della conservazione della quantità di moto

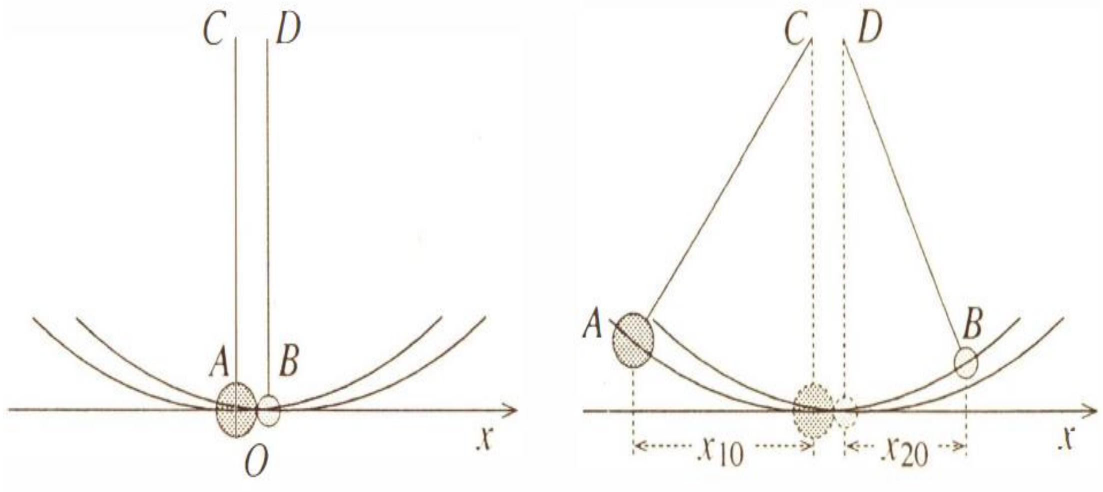
Consideriamo ancora un sistema composto da due punti materiali (li chiameremo 1 e 2 e, più avanti A e B) di masse rispettivamente m_1 e m_2. Ciascun punto esercita sull'altro una forza: $\mathbf{F}_{12}$ sia la forza che 1 esercita su 2 e $\mathbf{F}_{21}$ quella che 2 esercita su 1. Ai paragrafi precedenti abbiamo studiato esempi di questa situazione: due palline collegate da una molla, due nuclei in una molecola diatomica, un sistema di stelle doppie. In questo paragrafo vedremo come si verifica sperimentalmente il principio di azione e reazione.

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$$

$$\frac{d(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{P} = \text{costante.}$$



Inoltre, affinché qualcuno non obietti che la regola, per la quale fu inventato questo esperimento, presuppone che i corpi siano assolutamente duri o perfettamente elastici (considerando che niente di tale si trova in natura), aggiungo che gli esperimenti già descritti avvengono sia con corpi molli che duri, e in verità non dipendono in nessun modo dalla condizione della durezza.

Meccanica dei sistemi a due corpi: conservazione della quantità di moto con forze non impulsive

Negli esperimenti d'urto le due forze d'interazione agiscono per tempi molto brevi; le forze stesse sono molto intense. Si parla in questi casi di *forze impulsive*. Gli esperimenti appena descritti hanno stabilito che la quantità di moto totale di un sistema isolato si conserva nel caso di forze interne impulsive. Continua questo ad esser vero anche per forze non impulsive? Newton stesso si pose questa domanda e, per avere una risposta, fece il seguente esperimento: fissò un pezzo di ferro ed una calamita ciascuno sopra un corpo galleggiante (due pezzi di legno). Appoggiò i due corpi sulla superficie dell'acqua di un recipiente, avendo cura che questa fosse perfettamente ferma. Abbandonò i due corpi con velocità nulle. I due corpi si mossero l'uno verso l'altro sotto l'azione delle forze d'attrazione magnetiche che l'uno esercitava sull'altro. Alla fine i due corpi si toccarono e rimasero fermi. L'osservazione importante è che l'insieme dei due corpi, quando il ferro si è attaccato alla calamita, non si muove sull'acqua, come potrebbe, ma rimane fermo. La quantità di moto totale del sistema nello stato finale risulta cioè essere sperimentalmente nulla, quindi uguale a quella iniziale. Anche in quest'esperimento il sistema è isolato (i pesi sono equilibrati dalle forze di Archimede che portano al galleggiamento) e la quantità di moto si conserva.

Meccanica dei sistemi a due corpi: conservazione della quantità di moto, impulso e forze interne.

$$\mathbf{p}_{i1} + \mathbf{p}_{i2} = \mathbf{p}_{f1} + \mathbf{p}_{f2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_{f1} - \mathbf{p}_{i1} = -(\mathbf{p}_{f2} - \mathbf{p}_{i2})$$

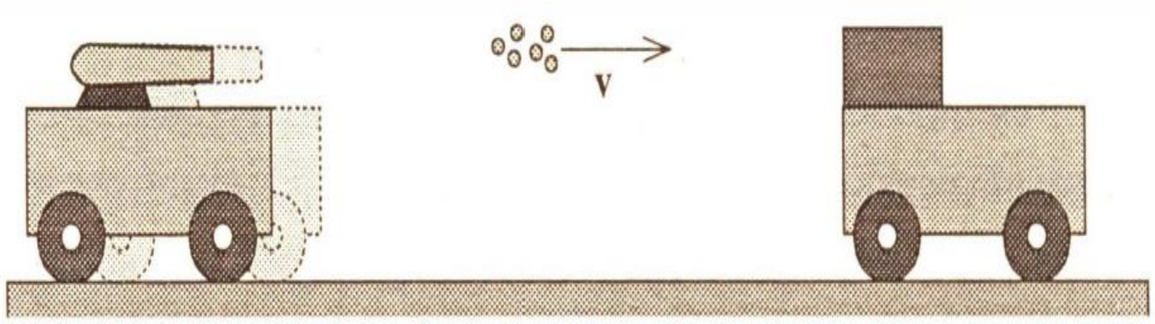
$$\mathbf{p}_{f1} - \mathbf{p}_{i1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{21}(t)\,dt \qquad \text{e} \qquad \mathbf{p}_{f2} - \mathbf{p}_{i2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{12}(t)\,dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{21}(t)\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{12}(t)\,dt$$

Sappiamo dunque dall'esperimento che gli *integrali* nel tempo estesi all'intervallo tra lo stato iniziale e quello finale della forza che il corpo 1 esercita su 2 e della forza che 2 esercita su 1 sono uguali e contrari. In linea di principio i valori *istantanei* delle forze $\mathbf{F}_{12}$ e $\mathbf{F}_{21}$ potrebbero essere abbastanza scorrelati, sin tanto che gli integrali sono opposti.

Ripetendo però tanti esperimenti in condizioni diverse e ottenendo sempre integrali uguali fra loro non si può che dedurre che siano le forze di interazione ad essere uguali ed opposte

Meccanica dei sistemi a due corpi: conservazione della quantità di moto

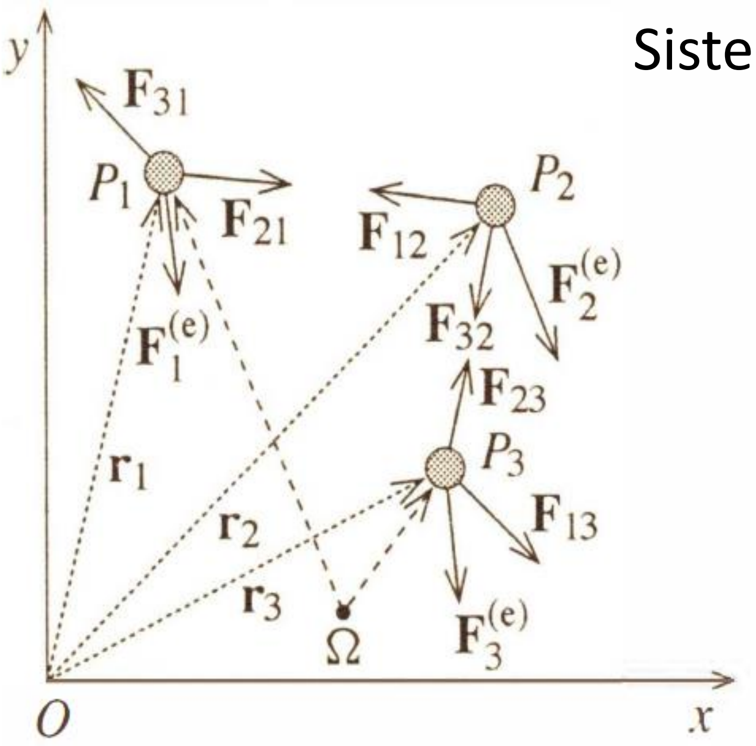


Il primo carrellino porta una lampada a flash che emette ad un certo istante un lampo di luce. La luce trasporta quantità di moto, sia pure in misura molto piccola, e il primo carrello acquista una quantità di moto opposta. Il secondo è ancora fermo. Supponiamo che esso porti uno schermo nero, che, quando è colpito dal lampo di luce, lo assorbe completamente. In quest'istante il secondo carrello si mette in moto.

Durante l'intervallo di tempo in cui la luce viaggia la quantità di moto totale meccanica non si conserva, la quantità di moto mancante è nel campo elettromagnetico. Lo si studierà nel corso di elettromagnetismo. Nella meccanica quantistica l'analogia è ancora più vicina: l'impulso di luce è uno sciame di particelle invisibili, i fotoni.

La quantità di moto meccanica in quest'esempio non si conserva ma la quantità di moto totale sì!!!

Sistemi con un numero generico di punti materiali



5 quantità globali

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$$

Quantità di moto totale

$$\mathbf{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_{\Omega i} = \sum_{i=1}^{N} \Omega \mathrm{P}_i \times \mathbf{p}_i$$

Momento angolare totale

$$U_\mathrm{k} = \sum_{i=1}^{N} U_{\mathrm{k}i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Energia cinetica totale

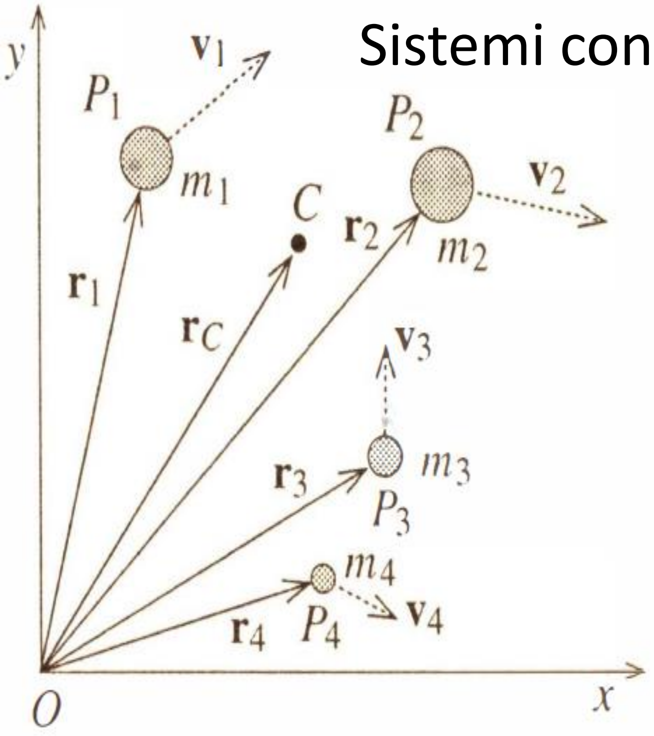
$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i^{(i)} + \mathbf{F}_i^{(e)}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(i)} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}^{(i)} + \mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}$$

Risultante delle forze agenti sul sistema (l’ultima uguaglianza è dovuta al principio di azione e reazione)

$$\mathbf{M}_\Omega = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{\tau}_{\Omega i}^{(i)} + \boldsymbol{\tau}_{\Omega i}^{(e)}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{\Omega i}^{(i)} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{\Omega i}^{(e)} = \mathbf{M}_\Omega^{(i)} + \mathbf{M}_\Omega^{(e)} = \mathbf{M}_\Omega^{(e)}$$

Risultante del momento delle forze agenti sul sistema (l’ultima uguaglianza è dovuta al principio di azione e reazione)

Sistemi con un numero generico di punti materiali: moto del baricentro



$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

Definiamo come baricentro, o centro di massa, del sistema il punto geometrico (non è un punto materiale) il cui raggio vettore è

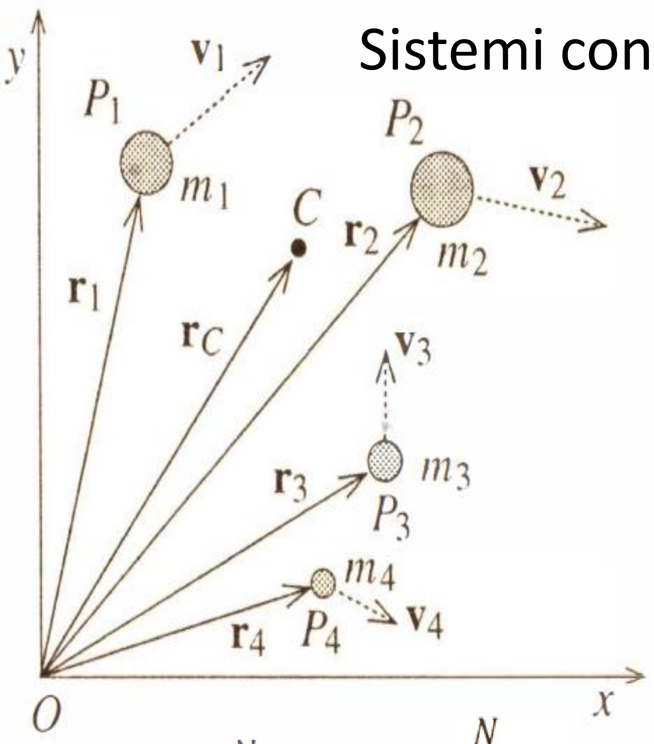
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}.$$

Coordinate cartesiane del baricentro

$$\mathbf{v}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i}{M} = \frac{\mathbf{P}}{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = M\mathbf{v}_C$$

relazione molto importante, che ci dice che *la quantità di moto totale del sistema è uguale a quella del baricentro considerato come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema.*

Sistemi con un numero generico di punti materiali: moto del baricentro



$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

Definiamo come baricentro, o centro di massa, del sistema il punto geometrico (non è un punto materiale) il cui raggio vettore è

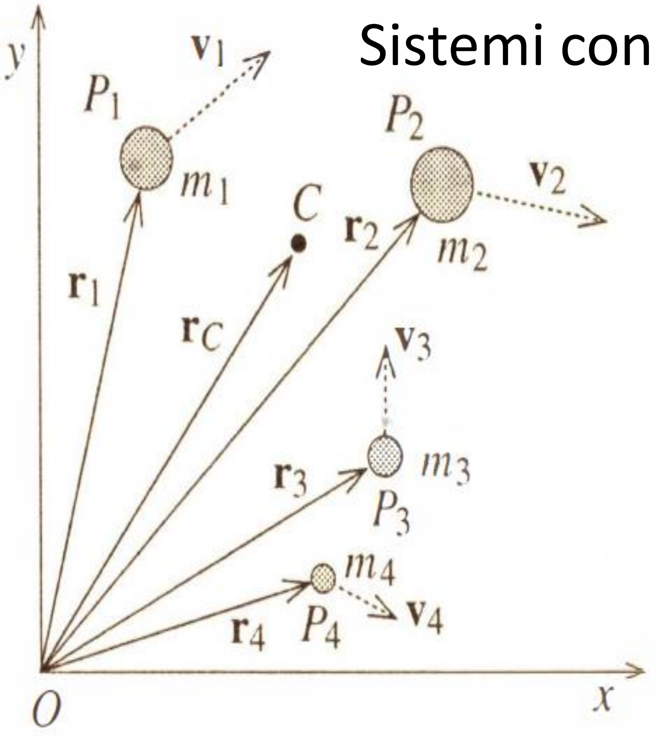
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}$$

Coordinate cartesiane del baricentro

$$\mathbf{v}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i}{M} = \frac{\mathbf{P}}{M} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i^{(\mathrm{i})} + \mathbf{F}_i^{(\mathrm{e})}) = \mathbf{F}^{(\mathrm{i})} + \mathbf{F}^{(\mathrm{e})} = \mathbf{F}^{(\mathrm{e})}$$

Quest'importante relazione è chiamata la *prima equazione cardinale della meccanica*. Essa ci dice che *la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale di un sistema meccanico è uguale alla risultante delle forze esterne, in un riferimento inerziale.* Si noti che il fatto di non dover considerare le forze interne, almeno per sapere come varia nel tempo una quantità complessiva come la quantità di moto totale, porta ad una grande semplificazione.

Sistemi con un numero generico di punti materiali: moto del baricentro



$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

Definiamo come baricentro, o centro di massa, del sistema il punto geometrico (non è un punto materiale) il cui raggio vettore è

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M}$$

Coordinate cartesiane del baricentro

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i^{(i)} + \mathbf{F}_i^{(e)}) = \mathbf{F}^{(i)} + \mathbf{F}^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}^{(e)} = M\mathbf{a}_C$$

relazione che esprime il *teorema del moto del baricentro. Il baricentro si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e su cui agisca la risultante delle forze esterne.* In particolare quindi il moto del baricentro è determinato solo dalle forze esterne, mentre i moti dei singoli punti dipendono anche dalle forze interne.

Sistemi con un numero generico di punti materiali: moto del baricentro

Supponiamo, ad esempio, che un indiano brandisca un'accetta per il manico e la lanci. L'accetta descriverà un moto complicato ruotando nell'aria e contemporaneamente spostandosi. Ma conoscere il moto del suo baricentro è semplice: è il moto di un punto materiale, con una certa velocità iniziale, sotto l'azione del peso (trascuriamo la resistenza dell'aria). Il baricentro descrive quindi semplicemente una parabola; l'accetta intanto gli ruota attorno. Nelle condizioni dette anche il moto del baricentro di un corpo non rigido, pensiamo ad esempio di lanciare una catena, descrive una parabola. Analogamente consideriamo un proiettile sparato da un cannone; esso descrive una parabola; se ad un certo istante il proiettile scoppia producendo molti frammenti, ciascuno di questi percorrerà una certa traiettoria, dipendente da come è avvenuto lo scoppio, ma il baricentro continuerà a muoversi lungo la parabola esattamente come se lo scoppio non fosse avvenuto e il proiettile fosse ancora intero. Questo, per la precisione, sino a che il primo frammento non tocca terra; in quest'istante infatti interviene una nuova forza esterna (oltre al peso), quella di reazione del terreno.

Il baricentro, come abbiamo visto, si comporta come un punto materiale, anzi esso è l'unico punto materiale perfetto, che non richiede approssimazioni sulle dimensioni geometriche.

Sistemi con un numero generico di punti materiali: moto del baricentro

se un sistema materiale è isolato, cioè se su di esso non agiscono forze esterne, o se comunque la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale è costante nel tempo (in un riferimento inerziale). Lo si ricava immediatamente dalla (6.9.8)

$$\mathbf{P} = \text{costante} \qquad \text{se} \qquad \mathbf{F}^{(e)} = 0\,. \tag{6.10.1}$$

Possiamo anche dire che nelle stesse ipotesi

$$\mathbf{a}_C = 0, \quad \mathbf{v}_C = \text{costante} \qquad \text{se} \qquad \mathbf{F}^{(e)} = 0\,. \tag{6.10.2}$$

Se la risultante delle forze esterne è nulla in un riferimento inerziale il baricentro rimane in quiete, se inizialmente in quiete, altrimenti prosegue con moto rettilineo uniforme.

Al §6.6 abbiamo già usato, nel caso particolare di un sistema di due corpi, le proprietà del baricentro e il principio di conservazione della quantità di moto e illustrato le sue relazioni con il principio di azione e reazione.