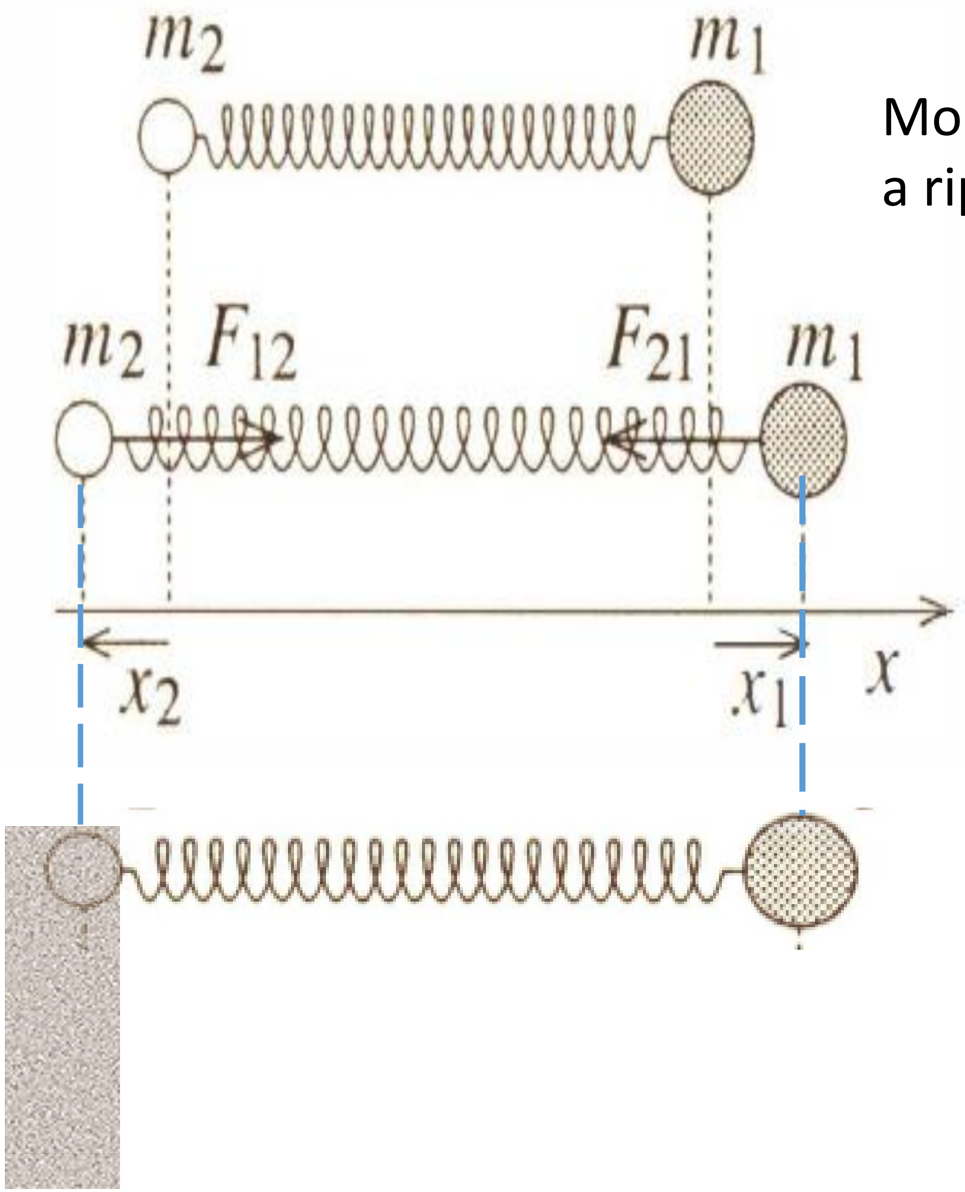
Meccanica dei sistemi

In questo capitolo discuteremo la meccanica dei sistemi materiali, dei sistemi cioè composti non da un solo, ma da più corpi o da un corpo di dimensioni finite. Sinora abbiamo considerato il moto di un singolo punto materiale. Ma, se il punto materiale subisce una forza, dev'esserci un altro corpo che la esercita. Non esistono in meccanica, e più in generale nella fisica, azioni isolate, ma ogni azione è accompagnata da una reazione. Altrimenti detto, il sistema meccanico più semplice non può essere costituito da una singola particella, ma almeno da due che interagiscono tra loro (cioè agiscono reciprocamente una sull'altra). Sinora abbiamo trascurato questo punto e abbiamo considerato il moto ad esempio di un grave sulla Terra o di un pianeta attorno al Sole. L'abbiamo potuto fare senza apprezzabile errore perché uno dei due corpi, la sorgente della forza, aveva massa enormemente più grande dell'altro. Ma questo è un caso particolare.

Meccanica dei sistemi: L'energia potenziale come energia di interazione



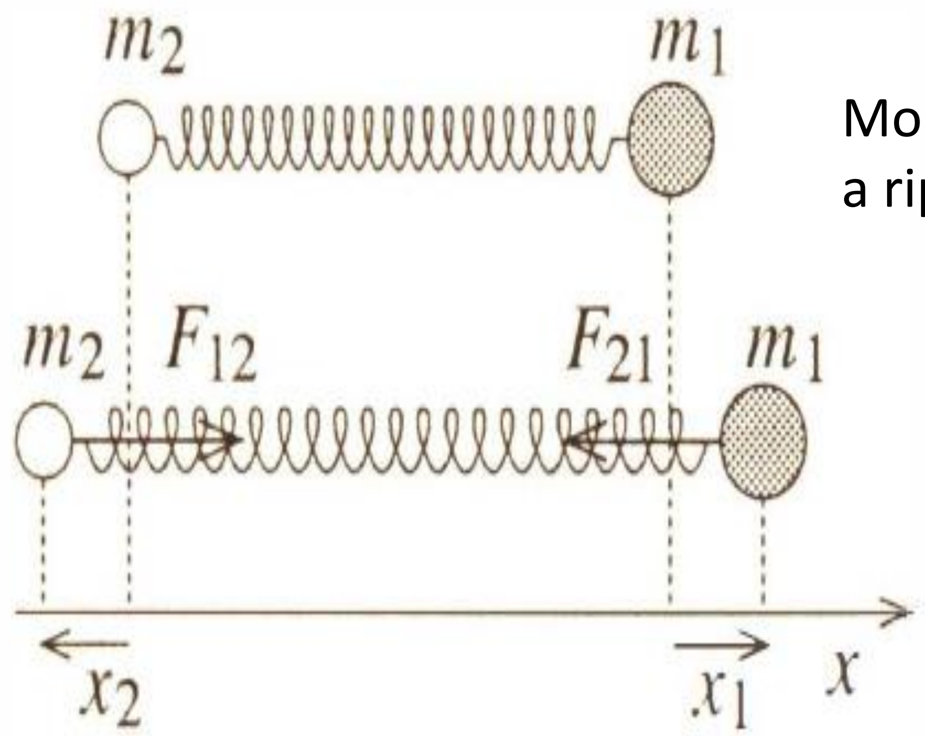
Molla con lunghezza
a riposo

Molla allungata di $x_1 - x_2$ con due masse m_1 e m_2 agli estremi.

Molla allungata di $x_1 - x_2$ con la massa m_2 ad un estremo e il muro dall'altro

In entrambi i casi l'energia potenziale della molla è la stessa perché è pari a ½ k $(x_1-x_2)^2$. Nel caso più in basso quando la molla si troverà in lunghezza a riposo l'energia potenziale si sarà trasformata in energia cinetica di m_2. Nel caso in alto la stessa energia potenziale sarà ripartita tra le 2 masse. Come? La risposta la diamo in questo capitolo.

Meccanica dei sistemi: L’energia potenziale elastica come energia di interazione



Molla con lunghezza a riposo

Molla allungata di $x_1 - x_2$ con due masse m_1 e m_2 agli estremi.

$$U_p = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

L’energia potenziale elastica è data da 1/2 per la costante elastica della molla per il suo allungamento al quadrato sia che un estremo della molla sia attaccato ad un muro e l’altro ad un punto materiale o che siano entrambi attaccati a 2 punti materiali.

$$W_1 = -\int_0^{x_1} F_{21x}\, dx = +k \int_0^{x_1} x\, dx = \frac{1}{2} k x_1^2$$

Lavoro contro la forza elastica per spostare la massa m_1 di una quantità x_1

$$W_2 = -\int_0^{x_2} F_{12x}\, dx = k \int_0^{x_2} (x - x_1)\, dx = -k x_1 x_2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

Lavoro contro la forza elastica per spostare la massa m_2 di una quantità x_2 quando m_1 è in x_1

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} k x_1^2 - k x_1 x_2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

Lavoro totale

Meccanica dei sistemi: L'energia potenziale gravitazionale come energia di interazione

$$U_p = -\gamma \frac{mM}{R}$$

Il lavoro fatto contro la forza gravitazionale per portare m ad una distanza R da M è lo stesso del lavoro fatto per portare M ad una distanza R da m. L'energia potenziale gravitazionale è l'energia del sistema delle 2 masse.
Se la massa m >> M e il sistema è lasciato libero M cadrà su m con energia cinetica U_P (assumendo le masse puntiformi).
Se la massa M >> m e il sistema è lasciato libero m cadrà su M con energia cinetica U_P (assumendo le masse puntiformi).
Se le due masse sono comparabili i due corpi si verranno incontro con energia cinetica finale totale pari a U_P (assumendo le masse puntiformi).

L'energia potenziale della forza peso

$$U_p = mgh$$

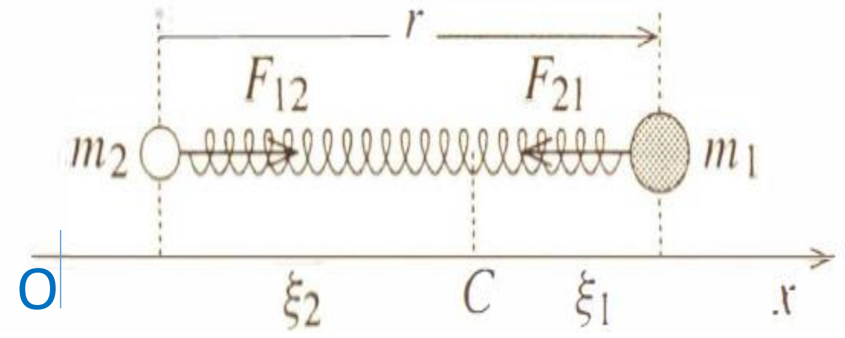
$$U_p(R_T + h) - U_p(R_T) = -\gamma \frac{mM}{R_T + h} + \gamma \frac{mM}{R_T} \approx \gamma \frac{mM}{R_T^2} h = mgh$$

Anche l'energia potenziale della forza peso non è l'energia del corpo pesante da solo, bensì energia della coppia corpo più pianeta Terra. Solo che data la sua enorme inerzia rispetto al corpo, l'energia cinetica acquisita dalla Terra è nulla.

Meccanica dei sistemi: La massa ridotta

Nei sistemi a due corpi, quando le masse sono comparabili, come si muovono i corpi soggetti a mutua interazione?
Anticipiamo un risultato che dimostreremo in questo capitolo per sistemi a più corpi.

per ogni sistema materiale esiste un punto (geometrico non fisico), il baricentro, che gode della seguente importantissima proprietà: se sul sistema, come nel nostro caso, non agiscono forze esterne, il suo baricentro in un riferimento inerziale rimane fermo, se inizialmente fermo, o se in moto, si muove di moto rettilineo uniforme. In conclusione possiamo scegliere sempre un riferimento inerziale in cui il baricentro, nelle ipotesi dette, stia fermo. Descriveremo quindi il moto nel riferimento solidale col baricentro e con origine in esso.



$$\vec{x}_C = \frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

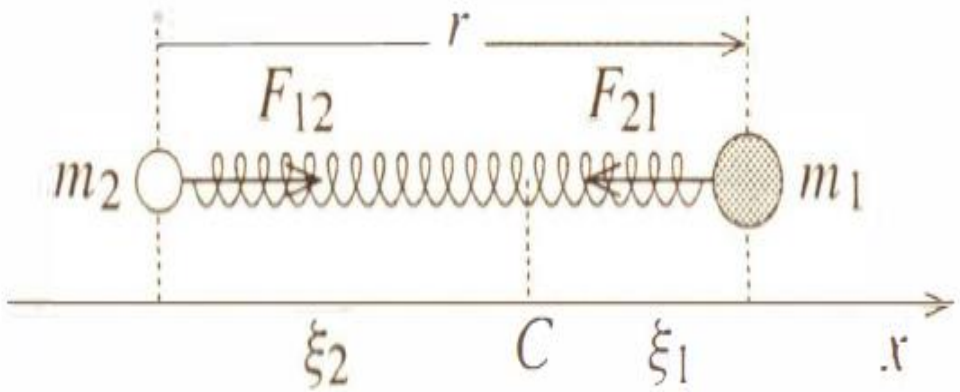
$$m_1\xi_1 = m_2\xi_2$$

Per un sistema di due punti materiali il baricentro è quel punto geometrico che giace tra i due punti, sulla retta congiungente i due corpi, per cui le distanze pesate per la masse dei due corpi sono identiche.

Meccanica dei sistemi: La massa ridotta

Nei sistemi a due corpi, quando le masse sono comparabili, come si muovono i corpi soggetti a mutua interazione?

$$m_1\xi_1 = m_2\xi_2 \qquad \xi_1/\xi_2 = m_2/m_1$$



$$r = \xi_1 + \xi_2 \qquad \xi_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$$

$$F_{21} = m_1 a_1 = m_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Per un sistema di due punti materiali il baricentro è per definizione il punto del segmento che unisce i due punti e che lo divide in parti inversamente proporzionali alle masse ai due estremi corrispondenti.

Indichiamo con r la coordinata del corpo 1 misurata a partire dal corpo 2: il suo valore assoluto non è altro che la lunghezza della molla (i corpi sono puntiformi) nella configurazione generica del sistema. Indichiamo con ξ_1 e ξ_2 le distanze delle due masse dal baricentro C. Allora per la definizione data di baricentro

Meccanica dei sistemi: La massa ridotta

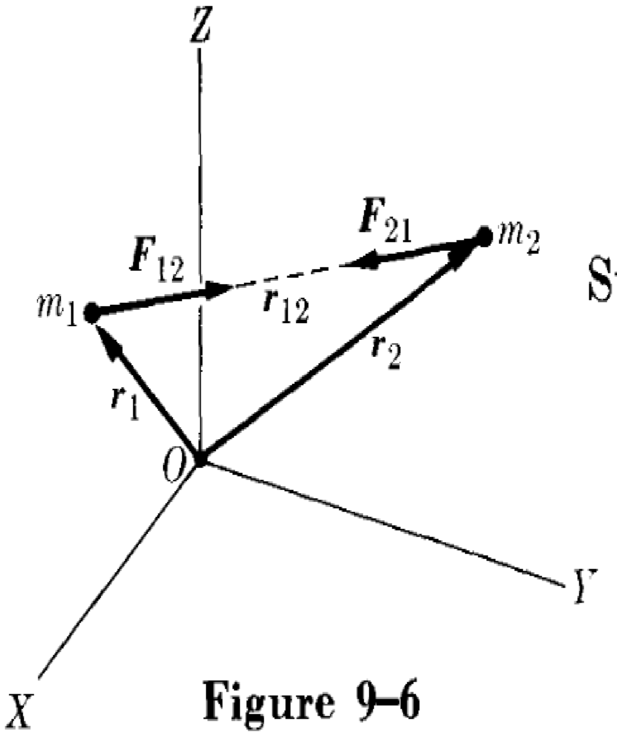


Figure 9–6

$$\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{m_1}, \qquad \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}_{21}}{m_2}.$$

Subtracting these equations, we have

$$\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} - \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{m_1} - \frac{\boldsymbol{F}_{21}}{m_2}.$$

We use $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\boldsymbol{F}_{12}$$

Now $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_{12}$ is the velocity of m_1 *relative* to m_2, and therefore

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \frac{d\boldsymbol{v}_{12}}{dt} = \boldsymbol{a}_{12}$$

is the acceleration of m_1 *relative* to m_2. Let us introduce a quantity called the *reduced mass* of the two-particle system, designated by μ, and defined by

the relative motion of two particles subject only to their mutual interaction is equivalent to the motion, relative to an inertial observer, of a particle of mass equal to the reduced mass under a force equal to their interaction.

$$\boldsymbol{a}_{12} = \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{\mu} \qquad \text{or} \qquad \boldsymbol{F}_{12} = \mu\boldsymbol{a}_{12}.$$

Meccanica dei sistemi: La massa ridotta

$$m_2 \gg m_1 \qquad \mu \to m_1$$

Es: $M_{Terra} = 6\ 10^{24}$ kg $\qquad M_{Sole} = 2\ 10^{30}$ kg

Es: $M_{elettrone} = 9\ 10^{-31}$ kg $\qquad M_{protone} = 1.7\ 10^{-27}$ kg

Molecola di HCl (Vedi Bettini)

$$m_1 = m_2 \qquad \mu = \tfrac{1}{2} m_1$$

Es: $M_{neutrone} = 1.6748\ 10^{-27}$ kg $\qquad M_{protone} = 1.6725\ 10^{-27}$ kg

Molecola di CO (Vedi Bettini)