Geo1B 29/03/2023

Note Title

D'ora in poi indico con $\mathbb{E}^n$ ← spazio euclideo — lo spazio affine standard $\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n, \underbrace{\mathbb{R}^n}_{V}, +)$ quando voglio ricordare che su $V = \mathbb{R}^n$ c'è il prodotto scalare standard.

⤳ definire $\| \ \|$ dei vettori, distanze tra punti e distanze tra sottosp. affini

Esercizio In $\mathbb{E}^3$

Sia $r: \begin{cases} x = 2 \\ y+z=0 \end{cases}$ una retta e sia $s: \begin{cases} x+y=1 \\ x-z=0 \end{cases}$

soluz. del sistema

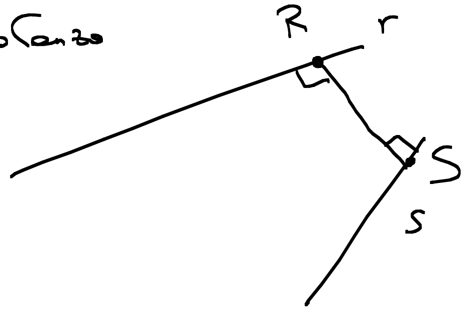
$r: \underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}}_{P} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{v} \rangle$ $\quad$ $\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{Q} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{w} \rangle$

- Posizione reciproca: . non sono parallele ⤳ $v \notin \langle w \rangle$ ✓
  . incidenti / sghembe
  $\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{P-Q}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{v}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{w}$ l. ind?

$P + \lambda v = Q + \mu w \iff 1(P-Q) + \lambda v - \mu w = 0 \iff P-Q, v, w$ sono l.d.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{2} + 1 - \cancel{2} \neq 0 \implies r \text{ e } s \text{ sono sghembe.}$$

- Determinare la distanza di r da s e una coppia di punti di minima distanza



$(R-S)$ ortogonale a r (a v)
" a s (a w)

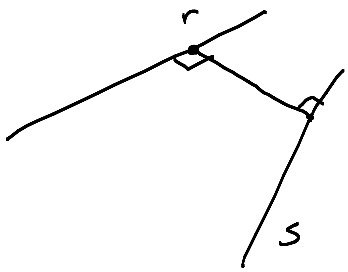
(NB Qui: lavoro in $\mathbb{E}^3$) senza prodotto scalare

(Ricorda se $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono sottosp. di $\mathbb{E}^n$ non incidenti i punti di minima distanza tra $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono dati da coppie P_L e P_M t.c. $P_L - P_M$ sia $\perp$ a $\mathbb{L}$ e sia $\perp$ a $\mathbb{M}$;

Inoltre se P_L e P_M sono una coppia di minima distanza allora $P_L + w$ e $P_M + w$ sono pure coppia " " " per ogni $w \in U_{\mathbb{L}} \cap U_{\mathbb{M}}$ ove $\mathbb{L} = P_L + U_{\mathbb{L}}$
$\mathbb{M} = P_M + U_{\mathbb{M}}$)

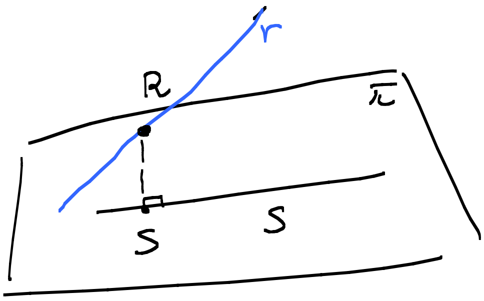
Nel caso delle rette dell'esercizio la coppia di minima dist. è unica. Se le rette fossero state parallele avrei avuto infinite coppie di minima distanza!

<u>I metodo</u> Mi dà la distanza, con lavoro ; pti di m.d.



Considero il piano π che contiene s ed è parallelo a r

$$\pi : \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$



$r \parallel$ a π ma non incidente
(se fosse $r \cap \pi \neq \emptyset$ avrei $r \subseteq \pi \Rightarrow$ r e s complanari $\lightning$)

$$d(r,s) = \underbrace{d(R,S)}_{\text{ignoti}} = d(r,\pi) \underset{r \text{ è } \parallel \text{ a } \pi}{=} d(P,\pi)$$

Per calcolarla mi basta avere l'eq. cartesiana di π.

$$\pi : \underset{\overset{\parallel}{Q}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}x-0\\y-1\\z-0\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

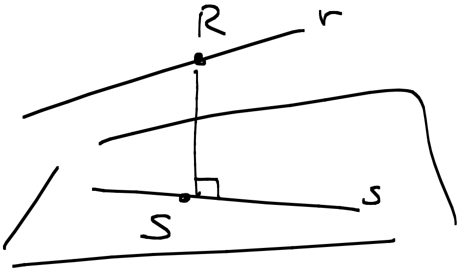
$\boxed{y + z = 1}$ $\leftarrow$ elimino param.

$$y + z - 1 = 0$$

[$\mathbb{E}^n$ se ho iperpiano π di equaz. $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + d = 0$
e $P = (p_1, \dots p_n) \in \mathbb{E}^n$ $\quad d(P,\pi) = \dfrac{|a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_np_n + d|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}$]

Nel nostro caso $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in r$ $\quad d(P, \pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Dunque $\boxed{d(r, s) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\qquad$ Punti di minima distanza?



R sarà un pto di r: $\begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$ per λ opport.

$R - S \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vettore $\perp$ piano π

S sarà del tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

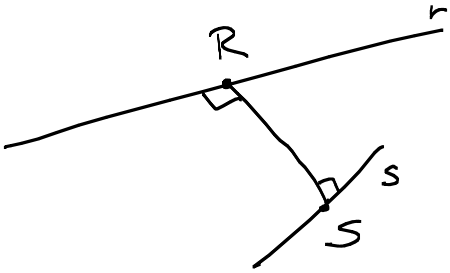
ossia $S = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda + \mu \\ -\lambda + \mu \end{pmatrix}$ per opportuni λ e μ deve soddisfare eq. cart. di s $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2 + \lambda + \mu = 1 \\ 2 + \lambda - \mu = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{—} \\ 2\mu = 1 \end{cases}$ $\quad \lambda = -3/2$, $\mu = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ $\quad S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$R - S \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Verifico $\|R - S\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Metodo non consigliato se devo calcolare R, S!

II metodo



$R = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$ $\qquad S = \begin{pmatrix} \mu \\ 1 - \mu \\ \mu \end{pmatrix}$

$R - S \perp v, w$

$\begin{pmatrix} 2 - \mu \\ \lambda - 1 + \mu \\ -\lambda - \mu \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

vuol dire $\begin{cases} (R - S) \cdot v = 0 \\ (R - S) \cdot w = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \lambda - 1 + \mu + \lambda + \mu = 0 \\ 2 - \mu - \lambda + 1 - \mu - \lambda - \mu = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2\lambda + 2\mu - 1 = 0 \\ -2\lambda - 3\mu + 3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \text{—} \\ -\mu + 2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \lambda = -3/2 \\ \mu = 2 \end{cases}$

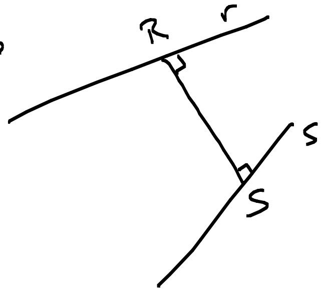
Punti di minima distanza $R = \begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ $\qquad S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underset{\parallel}{d(r, s)}$

$d(R, S) = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\qquad$ stessa!

Il metodo II è preferibile

III metodo



$R-S \parallel u = v \times w$ $\quad u \perp v$, $u \perp w$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} \text{ parallelo a } \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Considero il piano π' contenente r e $\parallel$ al vettore $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}_{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle} \rightsquigarrow \boxed{x=2}$$

Considero il piano π'' contenente s e $\parallel$ al vettore $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \boxed{2x+y-z=1}$$

$\pi' \cap \pi''$ è la retta incidente r e s ed ortogonale ad r e s.

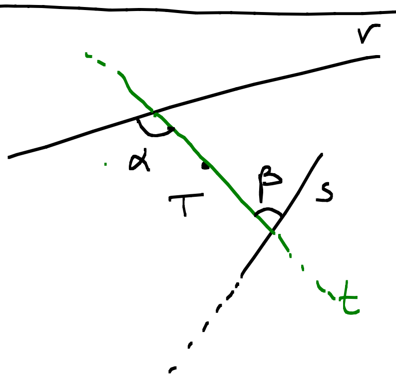
$r \cap \pi'' = R$ $\qquad$, $\qquad s \cap \pi' = S$

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x=2 \\ y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix}2\\-3/2\\3/2\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x=2 \\ x+y=1 \\ x-z=0 \end{cases} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

e $d(r,s) = d(R,S)$

- Ulteriori domande che non abbiamo tempo di indagare

Siano r, s come sopra



Sia $T : \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \notin r \cup s$

Determinare la retta per T incidente sia r sia s

$t : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{piano}}}{(r \vee T)} \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ \text{piano}}}{(s \vee T)}$ $\qquad$ determ. equaz. cartesiane e parametriche.

- calcolare $\cos\alpha$ e $\cos\beta$
- calcolare la proiezione ortogonale di T su r
  (ad es. considero il piano $\perp$ ad r passante per T e la sua intersezione con r) Altri modi?
- calcolare l'area del triangolo $\underbrace{RS}_{\text{coppia di pti di minima distanza}}T$

Esercizio In $\mathbb{E}^4$

$$\pi : \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \langle \overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}^{W} \rangle \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$r : \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{U} \rangle \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

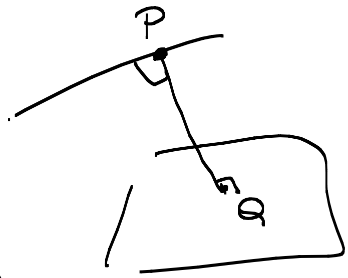
π e r non sono paralleli

$$P = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\1\\1\end{pmatrix} \overset{?}{\in} \pi \qquad \lambda + 1 = 0 \quad \lambda - 1 - 1 = 2 \qquad \lambda = -1 \quad \lambda = 4 \quad \lightning$$

$$\Rightarrow \pi \cap r = \emptyset$$

Calcolare $d(r, \pi)$ e coppia di pti di minima distanza

$U \cap W = 0$ // //



$$P = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\1\\1\end{pmatrix} \in r \qquad Q = \begin{pmatrix}1+\alpha\\\beta\\-1-\alpha\\2\alpha\end{pmatrix} \in \pi$$

$P - Q \in U^\perp \qquad P - Q \in W^\perp$

$$P - Q = \begin{pmatrix}\lambda-1-\alpha\\\lambda-\beta\\2+\alpha\\1-2\alpha\end{pmatrix} \perp \langle \underset{u}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}} \rangle$$

$(P - Q) \cdot u = 0$

$(\quad) \cdot w_1$

$(\quad) \cdot w_2$

$$\begin{cases} \lambda - 1 - \alpha + \cancel{\lambda -} \beta = 0 \\ \cancel{\lambda - 1 - \alpha} - 2 - \alpha + 2 - 4\alpha = 0 \\ \lambda - \beta = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha = \lambda - 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta = \lambda \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\underset{\lambda = 1}{P_r : \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}} \qquad \underset{\alpha = 0 \;\; \beta = 1}{Q_\pi : \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}}}_{\text{pti di minima distanza}} \qquad P_r - Q_\pi = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix} \perp u, w_1, w_2$$

$$d(r, \pi) = d(P_r, Q_\pi) = \left\| \begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}.$$

$$\pi : \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{= W} \rangle, \quad \pi' : \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \langle \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{= W'} \rangle$$

$d(\pi, \pi')$ e punti di minima distanza

$$\pi : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \qquad \pi' : \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\pi \cap \pi' = \emptyset$$

ha senso ...

$$W \cap W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ \cancel{x_1 + x_3 = 0} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

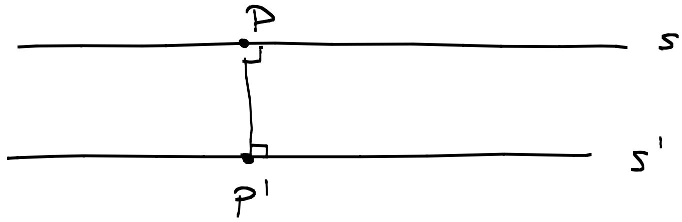
Se $P \in \pi$ e $P' \in \pi'$ sono coppia di pti di m.d. anche $P + a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $P' + a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (stesso $a \in \mathbb{R}$)

sono coppia di pti di m. d.

Ossia le rette $s : P + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $s' : P' + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

sono $s \subseteq \pi$ e $s' \subseteq \pi'$ rette parallele che contengono i pti di minima distanza

$$d(\pi, \pi') = d(s, s') = d(P, P')$$



Cerco P e P' coppia di punti di m. d.

Generico punto di π: $\begin{pmatrix} 1+\lambda \\ \mu \\ -1-\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$; generico pto di π': $\begin{pmatrix} 1+\beta \\ \beta \\ 1-\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$

$$P - P' = \begin{pmatrix} \cancel{1} + \lambda \cancel{-1} - \beta \\ \mu - \beta \\ -2-\lambda+\beta \\ 2\lambda - \alpha \end{pmatrix}$$ e impongo sia $\perp \langle W \cup W' \rangle = \langle \overbrace{\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\text{l. dip.}} \rangle$

ossia $P - P' \in W^\perp$
$P - P' \in (W')^\perp$

superfluo come generatore

Ottengo quindi
$$\begin{cases} \mu - \beta = 0 \\ 2\lambda - \alpha = 0 \\ \lambda - \beta + \cancel{\mu - \beta} + 2 + \lambda - \beta = 0 \end{cases}$$

ossia
$$\begin{cases} \mu = \beta \\ \alpha = 2\lambda \\ 2\lambda - 2\beta + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = \lambda + 1 \\ \alpha = 2\lambda \\ \beta = \lambda + 1 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1+\lambda \\ -1-\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \qquad P' = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ 1+\lambda \\ -\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

Per $\lambda = a \in \mathbb{R}$

$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $P' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Con $a = 0$ ottengo una coppia di punti di minima distanza.

$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad P' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e tutte le altre le ottengo per valori $\neq$ di a

Controllo $P - P' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad d(\pi, \pi') = \| P - P' \| = \boxed{\sqrt{2}}$

$d(P, P')$

NB Le coppie (P, P') di m. d. devono essere t.c. $P - P' \perp \langle W \cup W' \rangle$

ossia $P - P' \in W^{\perp} \cap (W')^{\perp} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{= u}$

Se considero M lo spazio che contiene π ed è // a u $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$x_1 - x_3 - x_4 = 2$

e M' lo spazio che contiene π' ed è // a u $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

allora la retta su π che contiene i pti di m. d è $\quad x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$

$M' \cap \pi$: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

mentre la retta su π' che contiene i pti di m. d. è $M \cap \pi'$: $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

ossia $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Se non le avessimo già trovate dovremmo ora individuare le coppie.

- Ora abbiamo 4 punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A \in \pi \quad B \in \pi' \quad P \in \pi \quad P' \in \pi'$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$B - A$, $P - A$, $P' - A$ individuano un parallelepipedo in $\mathbb{E}^4$.

Qual è il suo volume? 4? (vedere formula di ieri)