01-GeoAffine-T04[Proiezioni, Simmetrie, affinità, sottospazi fissati]

Esercizio 1
Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine e F una trasformazione affine dello spazio in se stesso.

1. Mostrare che la trasformazione è idempotente (ovvero $F \circ F = F$) se e solo se è una proiezione affine (su una qualche sottovarietà rispetto ad una qualche direzione).
2. Mostrare che la trasformazione è autoinversa (ovvero $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$) se e solo se è una simmetria affine.

[sugg.: potete usare il fatto analogo per le applicazioni lineari che avete visto nel primo semestre.]

Esercizio 2
In uno spazio affine di dimensione tre siano r ed s due rette sghembe. Siano

$$\begin{aligned} H &= \{F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A} \mid F \text{ affinità tale che } F(r) = r \text{ e } F(s) = s\ \} \\ G &= H \cup \{F\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A} \mid F \text{ affinità tale che } F(r) = s \text{ e } F(s) = r\} \end{aligned}$$

(a) Mostrare che sono sottogruppi del gruppo delle affinità invertibili (bigettive).

(b) H è sottogruppo normale di G?

(c) Scegliendo un riferimento a che sottogruppi del gruppo delle matrici corrispondono?

(d) $\star\star$ Mostrare che H è isomorfo al prodotto cartesiano dei gruppi delle affinità di r ed s.

Esercizio 3: Fatti utili su proiezioni e simmetrie
Sia V uno spazio **vettoriale** di dimensione n su un campo K con una base $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Si considerino due sottospazi U e W con $U \oplus W = V$ di dimensioni k e $n-k$. Sia $\{u_1, \cdots, u_k\}$ una base di U e siano w_i delle matrici $1 \times n$, ovvero operatori lineari

$$\begin{aligned} w_i : V &\longrightarrow K \\ e_j &\longmapsto (w_i)_{(1,j)} \end{aligned},$$

tali che

$$\begin{cases} w_1 x = 0 \\ w_2 x = 0 \\ \dots \\ w_k x = 0 \end{cases}$$

sia un sistema di equazioni cartesiane per W. In breve:

$$W = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(w_i)$$

Siano infine $\tilde{U}$ la matrice $n \times k$ le cui colonne sono date dai vettori u_i e $\tilde{W}$ la matrice $k \times n$ le cui righe sono date dai vettori riga w_j.
Definiamo inoltre

- π_W^U la proiezione su W di direzione (parallelamente a) U
- π_U^W la proiezione su U di direzione W
- σ_W^U e σ_U^W le simmetrie con direzione, rispettivamente, U e W.

Si provi che:

(a) $\pi_W^U = \mathrm{id}_V - \pi_U^W$

(b) $\sigma_W^U = \mathrm{id}_V - 2\,\pi_U^W$

(c) Si dimostri che la matrice $\tilde{W}\tilde{U}$ ha rango massimo (ed è dunque invertibile) e che, detta $A \in M_n(K)$ la matrice (rispetto alla base $\{e_1, \cdots e_n\}$ fissata) della proiezione π_U^W, si ha

$$A = \tilde{U}\left(\tilde{W}\tilde{U}\right)^{-1}\tilde{W}$$

Esercizio 4: applicazione veloce dell'esercizio 3
Si consideri $V = \mathbb{Q}^5$ e i sottospazi

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad W = \left\{ 2x_1 + x_4 - x_5 = 0 \right.$$

Si mostri che U e W sono in somma diretta (e che quindi generano tutto $\mathbb{Q}^5$) e si calcoli, usando l'esercizio 3, la matrice della simmetria di direzione W e avente U come spazio di punti fissi.