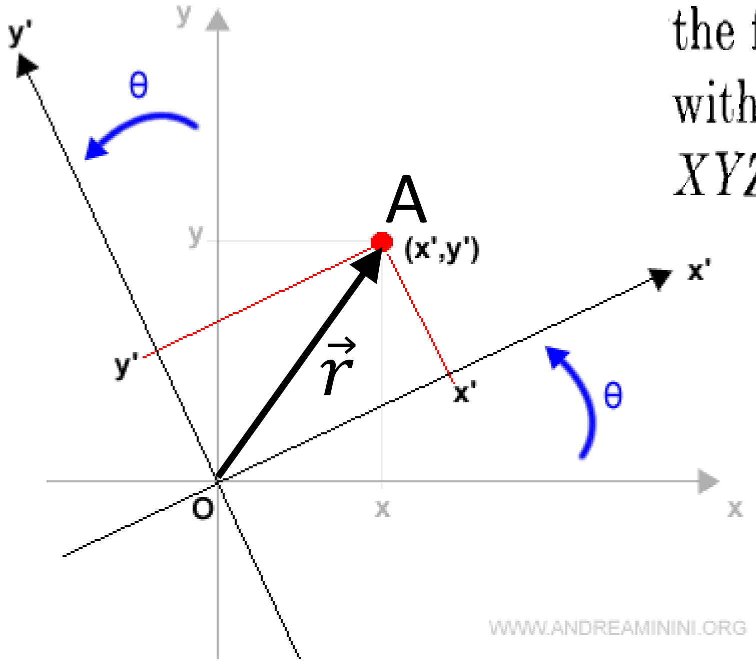
Sistema di riferimento in moto relativo circolare uniforme rispetto ad un sistema inerziale

Scopo del capitolo sui moti relativi è il seguente: note le leggi della meccanica e le forze in gioco nei sistemi di riferimento inerziale, quali effetti osserviamo nei sistemi di riferimento non inerziali.

Sistema di riferimento in moto rettilineo uniformemente accelerato rispetto ad un sistema di riferimento inerziale:
un punto materiale in moto rettilineo uniforme nel sistema di riferimento inerziale appare accelerato con un'accelerazione pari a $-a'_O$. Sul punto materiale è come se agisse una forza apparente $\vec{F} = -ma'_O$

Moto relativo circolare uniforme: relazione tra i vettori posizione

Let us now consider two observers O and O' rotating relative to each other but with no relative translational motion. For simplicity we shall assume that both O and O' are in the same region of space and that each uses a frame of reference attached to itself but with a common origin. For example, observer O, who uses the frame XYZ (Fig. 6-5), notes that the frame $X'Y'Z'$ attached to O' is rotating with angular velocity $\boldsymbol{\omega}$. To O', the situation is just the reverse; O' observes frame XYZ rotating with angular velocity $-\boldsymbol{\omega}$.



$$\vec{r} = \vec{r}\,'$$

I vettori posizione del punto A nei due sistemi coincidono, sono lo stesso vettore

Non c'è perdita di generalità immaginandosi la rotazione in 2 dimensioni anziché in 3

Moto relativo circolare uniforme: relazione tra le velocità

The position vector $\boldsymbol{r}$ of particle A referred to XYZ is

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}_x x + \boldsymbol{u}_y y + \boldsymbol{u}_z z, \tag{6.15}$$

and therefore the velocity of particle A as measured by O relative to its frame of reference XYZ is

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\ &= \boldsymbol{u}_x \frac{dx}{dt} + \boldsymbol{u}_y \frac{dy}{dt} + \boldsymbol{u}_z \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Similarly, the position vector of A referred to $X'Y'Z'$ is

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}_{x'} x' + \boldsymbol{u}_{y'} y' + \boldsymbol{u}_{z'} z', \tag{6.17}$$

where, because the origins are coincident, the vector $\boldsymbol{r}$ is the same as in Eq. (6.15);

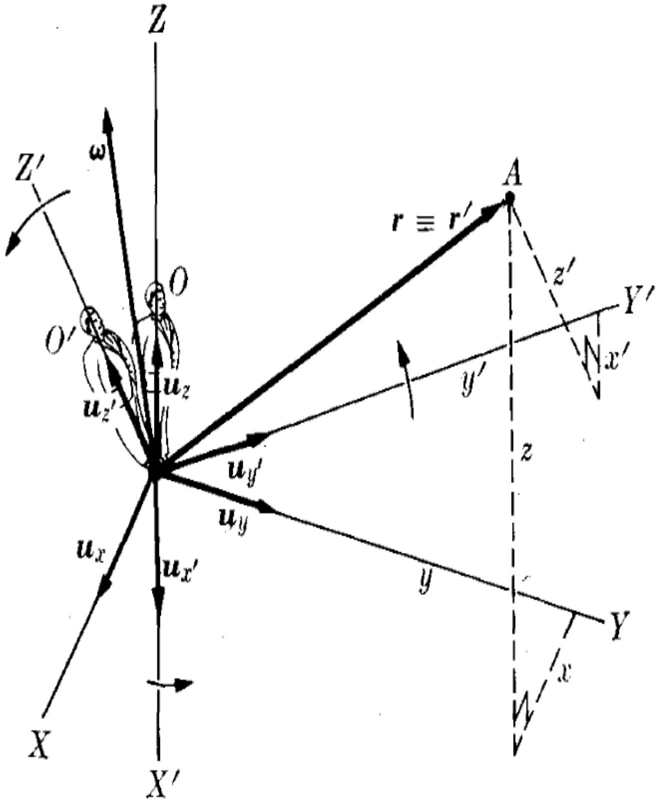


Fig. 6–5. Frames of reference in uniform relative rotational motion.

La velocità nel sistema XYZ è come al solito la derivata del vettore posizione $\vec{r}$ rispetto al tempo

Moto relativo circolare uniforme: relazione tra le velocità

The velocity of A, as measured by O' relative to its own frame of reference $X'Y'Z'$, is

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{u}_{x'}\frac{dx'}{dt} + \boldsymbol{u}_{y'}\frac{dy'}{dt} + \boldsymbol{u}_{z'}\frac{dz'}{dt}. \tag{6.18}$$

In taking the derivative of Eq. (6.17), observer O' has assumed that his frame $X'Y'Z'$ is not rotating, and has therefore considered the unit vectors as constant in direction. However, observer O has the right to say that, to him, the frame $X'Y'Z'$ is rotating and therefore the unit vectors $\boldsymbol{u}_{x'}$, $\boldsymbol{u}_{y'}$, and $\boldsymbol{u}_{z'}$ are not constant in direction, and that in computing the time derivative of Eq. (6.17) one must write

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{u}_{x'}\frac{dx'}{dt} + \boldsymbol{u}_{y'}\frac{dy'}{dt} + \boldsymbol{u}_{z'}\frac{dz'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{u}_{x'}}{dt}x' + \frac{d\boldsymbol{u}_{y'}}{dt}y' + \frac{d\boldsymbol{u}_{z'}}{dt}z'. \tag{6.19}$$

Now the endpoints of vectors $\boldsymbol{u}_{x'}$, $\boldsymbol{u}_{y'}$, and $\boldsymbol{u}_{z'}$ are (by assumption) in uniform circular motion relative to O, with angular velocity $\boldsymbol{\omega}$. In other words, $d\boldsymbol{u}_{x'}/dt$ is the velocity of a point at unit distance from O and moving with uniform circular motion with angular velocity $\boldsymbol{\omega}$. Therefore, using Eq. (5.48), we have,

$$\frac{d\boldsymbol{u}_{x'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{x'}, \qquad \frac{d\boldsymbol{u}_{y'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{y'}, \qquad \frac{d\boldsymbol{u}_{z'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{z'}.$$

Stiamo applicando la formula di Poisson ai versori $\mathbf{u}_{x'}$, $\mathbf{u}_{y'}$, $\mathbf{u}_{z'}$

Moto relativo circolare uniforme: relazione tra le velocità

Accordingly, from Eq. (6.19) we may write

$$\frac{d\boldsymbol{u}_{x'}}{dt}x' + \frac{d\boldsymbol{u}_{y'}}{dt}y' + \frac{d\boldsymbol{u}_{z'}}{dt}z' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{x'}x' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{y'}y' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{z'}z'$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{u}_{x'}x' + \boldsymbol{u}_{y'}y' + \boldsymbol{u}_{z'}z')$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \qquad (6.20)$$

Introducing this result in Eq. (6.19), and using Eqs. (6.16) and (6.18), we finally get

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \qquad (6.21)$$

This expression gives the relation between the velocities $\boldsymbol{V}$ and $\boldsymbol{V}'$ of A, as recorded by observers O and O' in relative rotational motion.

La velocità del punto A nel sistema di riferimento fisso è pari alla velocità del punto A nel sistema di riferimento rotante più il prodotto vettore della velocità angolare di quest’ultimo per il vettore posizione

Moto relativo circolare uniforme: relazione tra le accelerazioni

To obtain the relation between the accelerations, we proceed in a similar way. The acceleration of A, as measured by O relative to XYZ, is

$$\boldsymbol{a} = \frac{dV}{dt} = \boldsymbol{u}_x \frac{dV_x}{dt} + \boldsymbol{u}_y \frac{dV_y}{dt} + \boldsymbol{u}_z \frac{dV_z}{dt}. \tag{6.22}$$

The acceleration of A, as measured by O' relative to $X'Y'Z'$, when he again ignores the rotation, is

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{u}_{x'} \frac{dV'_{x'}}{dt} + \boldsymbol{u}_{y'} \frac{dV'_{y'}}{dt} + \boldsymbol{u}_{z'} \frac{dV'_{z'}}{dt}. \tag{6.23}$$

Moto relativo circolare uniforme: relazione tra le accelerazioni

When we differentiate Eq. (6.21) with respect to t, remembering that we are assuming that $\boldsymbol{\omega}$ is constant, we obtain

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{6.24}$$

Now, since $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{u}_{x'}V'_{x'} + \boldsymbol{u}_{y'}V'_{y'} + \boldsymbol{u}_{z'}V'_{z'}$, we obtain by differentiation

$$\frac{d\boldsymbol{V}'}{dt} = \boldsymbol{u}_{x'}\frac{dV'_{x'}}{dt} + \boldsymbol{u}_{y'}\frac{dV'_{y'}}{dt} + \boldsymbol{u}_{z'}\frac{dV'_{z'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{u}_{x'}}{dt}V'_{x'} + \frac{d\boldsymbol{u}_{y'}}{dt}V'_{y'} + \frac{d\boldsymbol{u}_{z'}}{dt}V'_{z'}.$$

The first three terms are just $\boldsymbol{a}'$, as given by Eq. (6.23), and the last three, by a procedure identical to that used to derive Eq. (6.20), are $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}'$. That is, by substituting the appropriate quantities into Eq. (6.20), we have

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{x'}V'_{x'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{y'}V'_{y'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{z'}V'_{z'} \\ = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{u}_{x'}V'_{x'} + \boldsymbol{u}_{y'}V'_{y'} + \boldsymbol{u}_{z'}V'_{z'}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}'.\end{aligned}$$

Moto relativo circolare uniforme: relazione tra le accelerazioni

Therefore $d\boldsymbol{V}'/dt = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}'$. Also from Eqs. (6.16) and (6.21), $d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, so that

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}).$$

Substituting both results in Eq. (6.24), we finally obtain

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}). \tag{6.25}$$

This equation gives the relation between the accelerations $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{a}'$ of A as recorded by observers O and O' in uniform relative rotational motion. The second term, $2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}'$, is called the *Coriolis acceleration*. The third term is similar to Eq. (5.59) and corresponds to a *centripetal acceleration*. Both the Coriolis and centripetal accelerations are the result of the relative rotational motion of the observers. In the next section we shall illustrate the use of these relations.

L'accelerazione del punto A nel sistema di riferimento fisso è pari all'accelerazione del punto A nel sistema di riferimento rotante più l'accelerazione di Coriolis più l'accelerazione centripeta.

Moto relativo circolare uniforme

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Se il sistema XYZ è inerziale e in esso un corpo è in quiete o in moto rettilineo uniforme allora **a** = 0 e si ha:

$$\vec{a}' = -2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Nel sistema X'Y'Z' il moto appare accelerato. L'osservatore solidale a tale sistema attribuisce queste accelerazioni a forze apparenti dette rispettivamente forza di Coriolis e forza centrifuga. La prima non si osserva se il punto materiale è fermo nel sistema di riferimento ruotante e non dipende dalla posizione dello stesso, la seconda dipende dalla distanza di questo dal centro di rotazione.