Un'osservazione sulla funzione esponenziale. L'ampiezza di un'oscillazione smorzata (3.8.14) e l'energia dell'oscillatore smorzato (3.8.15) sono esempi di grandezze fisiche che decrescono esponenzialmente nel tempo. Se ne incontrano spesso nello studio della fisica. Facciamo qui una semplice ma importante osservazione. Consideriamo una funzione del tipo

$$f(t) = f_0 e^{-t/\tau} . \tag{3.8.16}$$

Consideriamo il rapporto tra i valori assunti dalla funzione in due successivi istanti di tempo t_1 e t_2 ($t_1 < t_2$). Si vede subito che questo rapporto dipende solo dalla durata dell'intervallo $t_2 - t_1$ e non dal valore assoluto degli istanti né dalla costante f_0. Infatti

$$\frac{f_0 e^{-t_2/\tau}}{f_0 e^{-t_1/\tau}} = e^{-(t_2 - t_1)/\tau} .$$

In particolare quindi in qualsiasi intervallo di durata τ ($\tau = t_2 - t_1$), e non solo in quello iniziale, la funzione decresce di un fattore e. In particolare la frase detta sopra: "l'energia diminuisce esponenzialmente nel tempo, riducendosi ad un valore $1/e$ rispetto al valore iniziale in un tempo pari a τ" si può generalizzare a dire: "τ è il tempo in cui l'energia si riduce di un fattore $1/e$".

Oscillazioni forzate

(a) (b)

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x} - \beta\frac{d\vec{x}}{dt} + \hat{\imath}F_0\cos\omega t$$
$$\rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Un teorema dell'analisi matematica stabilisce che la soluzione generale di un'equazione differenziale del tipo (3.9.3) è data dalla somma di una sua qualunque soluzione particolare e della soluzione generale dell'omogenea associata. Quest'ultima è l'equazione stessa con zero a secondo membro.

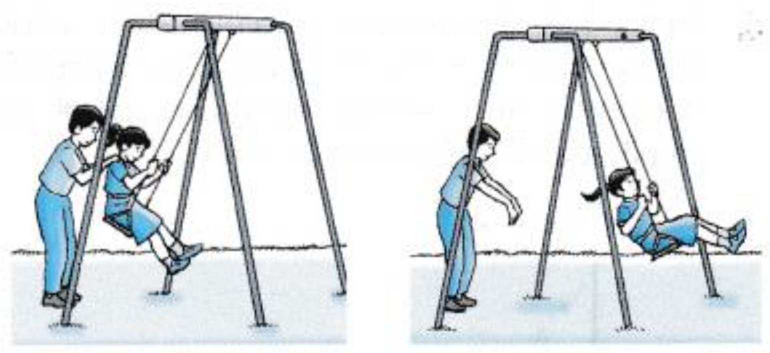
Soluzione generale dell'omogenea

$$x(t) = Ae^{-(\gamma/2)t}\cos(\omega_1 t + \phi)$$

Soluzione particolare

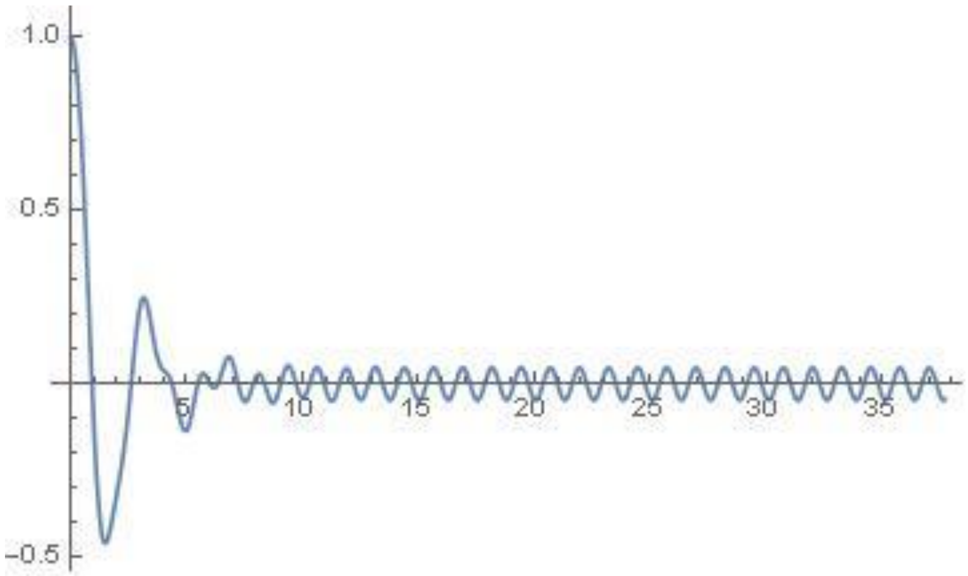
$$x(t) = B\cos(\omega t - \delta) \qquad B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \qquad \delta = \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Oscillazioni forzate



Soluzione generale

$$x(t) = Ae^{-(\gamma/2)t}\cos(\omega_1 t + \phi) + B\cos(\omega t - \delta)$$

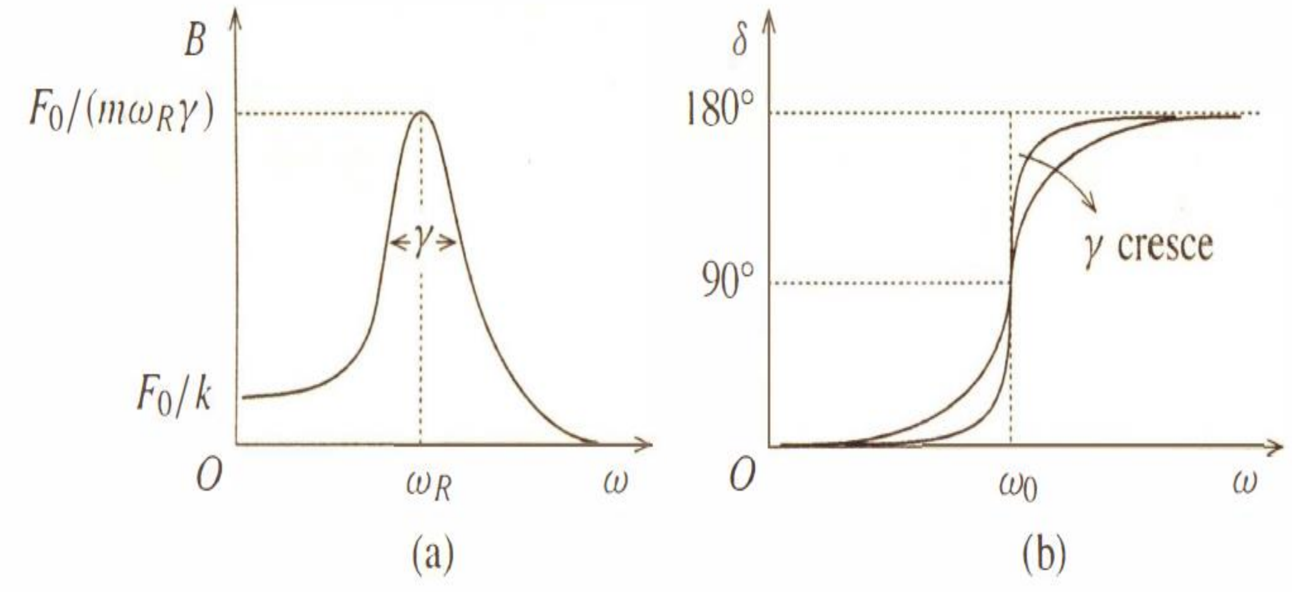


Discutiamo la soluzione trovata. Essa è somma di due termini: il primo termine rappresenta un'oscillazione smorzata alla pulsazione ω_1 caratteristica dell'oscillatore. Solo in questo termine compaiono le costanti A e ϕ dipendenti dalle condizioni iniziali del moto. Il secondo termine è un'oscillazione armonica alla pulsazione, non già dell'oscillatore, ma della forza applicata. Il moto è quindi in generale complicato. Tuttavia il primo termine decresce in ampiezza nel tempo, diminuendo di un fattore e per ogni intervallo di tempo $2/\gamma$. Se aspettiamo quindi un tempo pari ad alcuni di questi intervalli, il primo termine si è praticamente annullato. Si tratta, come si dice, di un transiente. Passato il transiente, il sistema oscilla in *regime stazionario*, la sua equazione del moto è proprio la (3.9.16), che, per questa ragione si chiama la *soluzione stazionaria*. La indicheremo con

$$x_s(t) = B\cos(\omega t - \delta)\ . \tag{3.9.18}$$

Oscillazioni forzate: Risonanza

Tacoma Bridge. A poco più di quattro mesi dalla sua inaugurazione, il ponte si mise a oscillare e torcersi paurosamente per via delle forti raffiche di vento, tanto da essere immediatamente evacuato e chiuso al traffico.



$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$$

Si noti che ω_R assomiglia ma non è proprio uguale alla pulsazione delle oscillazioni libere smorzate ω_1. Tuttavia, per piccoli smorzamenti (cioè per $\gamma/\omega_0 \ll 1$) ω_R e ω_1 differiscono molto poco tra loro e da ω_0. Quando la forza sollecita l'oscillatore con la sua frequenza caratteristica l'ampiezza, a parità d'altre condizioni, diviene molto grande. Si tratta del fenomeno della *risonanza*.

Diagrammi dell’energia in una dimensione

Oscillatore armonico

$$U(x) = \frac{1}{2} k\, x^2$$

$$\vec{F}(x) = -\frac{dU(x)}{dx}\,\hat{\imath} = -k\, x\, \hat{\imath}$$

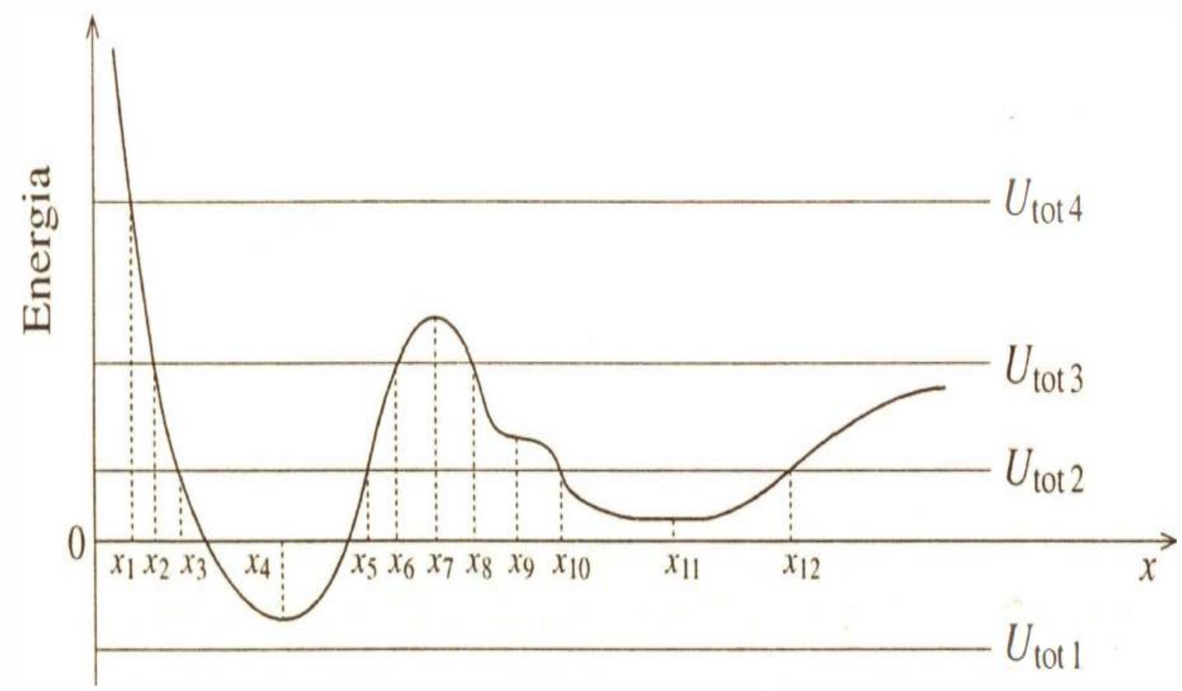
Forza peso

$$U(z) = m\, g\, z$$

$$\vec{F}(z) = -\frac{dU(z)}{dz}\,\hat{k} = -m\, g\, \hat{k}$$

Nel caso di forze conservative il lavoro fatto dalla forza è un differenziale esatto. Il lavoro fatto contro la forza quando un punto materiale si sposta da A a B è pari U(B)-U(A). Nota la forza, integrando troviamo il potenziale. Noto il potenziale, differenziando si trova la forza. La generalizzazione a 3 dimensioni sarà fatta più avanti.

Diagrammi dell'energia in una dimensione



1. EQUILIBRIO STABILE. Una posizione è, per un punto materiale, d'equilibrio stabile se è d'equilibrio e se, allontanando di una distanza infinitesima il punto da quella posizione in qualsiasi direzione, la risultante delle forze tende a riportare il punto nella posizione d'equilibrio (forza di richiamo).

2. EQUILIBRIO INSTABILE. Una posizione è, per un punto materiale, d'equilibrio instabile se è d'equilibrio e se esiste almeno una direzione tale che, allontanando di una distanza infinitesima il punto da quella posizione in quella direzione, la risultante delle forze tende ad allontanare ulteriormente il punto.

3. EQUILIBRIO INDIFFERENTE. È una posizione d'equilibrio. Allontanando il punto in qualsiasi direzione la risultante delle forze è nulla. La posizione d'equilibrio indifferente è cioè completamente circondata da altre posizioni d'equilibrio.