

Esercizio 3

Testo dell'esercizio:

Un quadrilatero piano completo Q del piano affine $\mathbb{A}^2(C)$ è la figura costituita da quattro rette r_i , $i = 1, 2, 3, 4$ a due a due non parallele, e a tre a tre non appartenenti ad uno stesso fascio.

Nomenclatura:

- Le rette r_i , $i = 1, 2, 3, 4$ sono dette i *lati* di Q ;
- i sei punti d'intersezione $P_{ij} := r_i \cap r_j$, ove $1 \leq i < j \leq 4$ sono detti i vertici;
- due vertici si dicono opposti se non appartengono ad uno stesso lato;
- le rette che congiungono una coppia di vertici opposti si dicono diagonali;
- i punti di intersezione delle diagonali si dicono i punti diagonali.

(conviene farsi un disegno!).

Si mostri che i punti medi delle tre diagonali (cioè dei segmenti delimitati dalle coppie di vertici opposti) sono allineati.

Suggerimento 1: Scegliete un buon riferimento e ragionate in coordinate... Le coordinate baricentriche possono essere più comode, in coordinate affini che succede?

Suggerimento 2: Può essere utile notare che, per ogni valore di α, β, γ in un campo, vale la seguente relazione tra determinanti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\beta & \alpha \\ \gamma & 1 & 1-\alpha \\ 1-\gamma & \beta & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1-\beta & \alpha \\ \gamma & 0 & 1-\alpha \\ 1-\gamma & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Richiami e fatti utili

Coordinate baricentriche (definizione): Dati $n + 1$ punti P_1, \dots, P_{n+1} in posizione generale in uno spazio affine di dimensione n , essi costituiscono un riferimento baricentrico. ogni $(n + 1)$ -upla di coordinate $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ che somma a 1 individua univocamente (per definizione) il punto A dello spazio affine dato da

$$A = Q + \alpha_1(P_1 - Q) + \alpha_2(P_2 - Q) + \dots + \alpha_{n+1}(P_{n+1} - Q)$$

dove si può scegliere come punto base Q un qualsiasi punto (e qualsiasi scelta di Q , chiaramente, individua lo stesso punto, come avete dimostrato a lezione). Si scriverà allora

$$A = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{n+1} P_{n+1}.$$

Convenzione sull'omogeneità delle coordinate baricentriche: Si può scrivere una $(n+1)$ -upla di coordinate che non sommano a 1, ma interpretarle comunque come coordinate baricentriche. L'unica condizione affinché ciò sia possibile è che $\sum \alpha_i \neq 0$, perché allora si interpreta tale $(n+1)$ -upla come il punto individuato dalle coordinate $\left(\frac{\alpha_1}{\sum \alpha_i}, \dots, \frac{\alpha_{n+1}}{\sum \alpha_i}\right)$, che sommano effettivamente a 1. In questo modo ogni riscalamento delle coordinate baricentriche (per un fattore non nullo) individua lo stesso punto.

Vantaggi delle coordinate baricentriche: Si prestano a descrivere contesti in cui si lavora con incidenza di rette e allineamento di punti. Questo perché c'è una certa versatilità nella scelta del sistema di riferimento (come vedrete nell'esercizio).

Coordinate baricentriche Vs Coordinate affini: Se considerate il riferimento baricentrico P_1, \dots, P_{n+1} e il riferimento affine $\{P_1; P_2 - P_1, P_3 - P_1, \dots, P_{n+1} - P_1\}$, allora prendendo proprio P_1 come punto base Q per le coordinate baricentriche, allora vedete facilmente che:

- Un punto che nel s.d.r. baricentrico ha coordinate $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$, nel s.d.r. affine ha coordinate $(\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$.
- Un punto che nel s.d.r. affine ha coordinate (x_1, \dots, x_n) , nel s.d.r. baricentrico avrà coordinate $(1 - \sum_{i=1}^n x_i, x_1, \dots, x_n)$.

Punto medio di un segmento: Il punto medio M tra A e B si può esprimere tramite coordinate baricentriche (in uno spazio di qualsiasi dimensione) come $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ (qui non serve nemmeno indicare un sistema di riferimento completo, si sottintende che le coordinate sono $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0)$ in un qualsiasi riferimento baricentrico i cui primi due punti siano A, B).

In un sistema di riferimento generico, in cui A ha coordinate α_i e B coordinate β_i (**prese con somma unitaria, è necessario per questo conto**), le coordinate di M saranno $m_i = \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2}\beta_i$ per ogni $i = 1, \dots, n+1$.

Equazione di una retta (senza sfruttare l'omogeneità): Siano $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ e $B = (\beta_1, \dots, \beta_{n+1})$ (con somma unitaria) in un qualche sistema di riferimento baricentrico.

Allora, considerato un generico punto $P = (x_1, \dots, x_{n+1})$, si ha:

$$\begin{aligned}
 P \in A \vee B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} \quad \exists \lambda \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - \beta_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} - \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} - \beta_{n+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

E così è facile rimuovere il parametro e ricavare $n - 1$ equazioni lineari (per la precisione n equazioni, ma una risulterà dipendente dalle altre, vista la condizione di somma unitaria sulle x_i, α_i e β_i).

Nota: Questo è di fatto come trovare una retta in coordinate affini, non cambia molto.

Equazione di una retta (sfruttando l'omogeneità): Siano $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$ e $B = (\beta_1, \dots, \beta_{n+1})$ (con somma non necessariamente unitaria, ma solo diversa da zero) in un qualche sistema di riferimento baricentrico. Allora, considerato un generico punto $P = (x_1, \dots, x_{n+1})$, si ha:

$$\begin{aligned}
 P \in A \vee B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} \quad \exists \lambda, \mu \text{ con } \lambda(\sum \alpha_i) + \mu(\sum \beta_i) \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} \quad \exists \lambda, \mu \quad \text{e} \quad \sum x_i \neq 0
 \end{aligned}$$

Questo è equivalente a richiedere l'annullamento di tutti i minori di ordine 3 nella matrice $(n + 1) \times 3$ ottenuta mettendo insieme i tre vettori colonna. Ma questo fornirà in definitiva esattamente $n - 1$ equazioni lineari, proprio come prima (per la precisione ne fornisce $\binom{n+1}{3}$, ma di queste ce ne saranno $n - 1$ linearmente indipendenti e non di più, per motivi dimensionali).

Per esercizio dimostrate le due doppie implicazioni. La seconda è abbastanza ovvia. Per la prima sfruttate l'omogeneità delle coordinate per ricondurvi al caso sopra, quello in cui avete le somme unitarie.

Nota: Questo metodo è quello utile per lavorare con le rette nel piano affine.