Soluzione esercizio 3

Testo dell'esercizio:
Siano $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ varietà affini di uno spazio affine $\mathbb{A}$, e siano $P_1, ..., P_n$ e $Q_1, ..., Q_m$.
Mostrare che

$$\mathbb{L} \text{ e } \mathbb{M} \text{ sono sghembe} \Leftrightarrow P_1, ..., P_n, Q_1, ..., Q_n \text{ sono in posizione generale}$$

Richiami:
Ricordiamo le definizioni e i fatti rilevanti per questo esercizio, che sono noti dalla teoria:

Def1: "$\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ sono sghembe" := "$\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \varnothing$ e $V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}} = \langle 0 \rangle$"

Def2: "$A_1, ..., A_k$ sono in posizione generale" := "i $k-1$ vettori $A_2 - A_1,\ A_3 - A_1,\ ..., A_k - A_1$ sono linearmente indipendenti"

Def3: "i punti $A_1, ..., A_k$ sono un riferimento affine per la varietà affine $\mathbb{K}$" := "$A_1, ..., A_k$ sono in posizione generale e generano $\mathbb{K}$ (cioè $A_1 \vee ... \vee A_k = \mathbb{K}$)"

Fatto1: $A_1, ..., A_k$ è un riferimento affine per $\mathbb{K} \Leftrightarrow \mathbb{K} = A_1 + \langle A_2 - A_1, ..., A_k - A_1 \rangle$ e $A_2 - A_1, ..., A_k - A_1$ sono linearmente indipendenti (e quindi sono una base di $V_{\mathbb{K}}$)

Fatto2: Due varietà $\mathbb{L} = L + V_{\mathbb{L}}$ e $\mathbb{M} = M + V_{\mathbb{M}}$ sono incidenti se e solo se $L - M \in V_{\mathbb{M}} + V_{\mathbb{L}}$.

Svolgimento:

Oss1: Valgono le seguenti doppie implicazioni (nella seconda in particolare si usano Fatto1 e Fatto2):

$$\begin{aligned}
\mathbb{L} \text{ e } \mathbb{M} \text{ sono sghembe} &\Leftrightarrow \text{ sono disgiunte e i sottospazi direttori hanno intersezione banale} \\
&\Leftrightarrow P_1 - Q_1 \notin \langle P_2 - P_1, ..., P_n - P_1 \rangle + \langle Q_2 - Q_1, ..., Q_m - Q_1 \rangle \\
&\qquad \text{e i sottospazi } \langle P_2 - P_1, ..., P_n - P_1 \rangle \text{ e } \langle Q_2 - Q_1, ..., Q_m - Q_1 \rangle \\
&\qquad \text{sono in somma diretta} \\
&\Leftrightarrow P_1 - Q_1, P_2 - P_1, ...P_n - P_1, Q_2 - Q_1, ..., Q_m - Q_1 \\
&\qquad \text{sono } n + m - 1 \text{ vettori linearmente indipendenti}
\end{aligned}$$

Oss2: Vale per definizione la seguente doppia implicazione:

$$\begin{aligned} P_1, P_2, ..., P_n, Q_1, ..., Q_m \quad & \text{sono in posizione generale} \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & P_1 - Q_1, P_2 - P_1, ...P_n - P_1, Q_2 - P_1, ..., Q_m - P_1 \\ & \text{sono } n + m - 1 \text{ vettori linearmente indipendenti} \end{aligned}$$

A questo punto vogliamo mostrare che l'ultima affermazione della "Oss1" vale se e solo se vale l'ultima affermazione della "Oss2". Tutto quello che cambia tra le due è che in una compaiono i vettori $Q_j - Q_1$ mentre nell'altra i vettori $Q_j - P_1$. Mostrare l'equivalenza delle due ora è facile e ve lo lascio per esercizio con questi suggerimenti: si mostra prima che una implica l'altra e poi il viceversa, e lo si fa usando:

- la definizione di indipendenza lineare
- il fatto che $Q_j - P_1 = (Q_j - Q_1) + (Q_1 - P_1)$.