3-GeoAffine-T03[Posizioni reciproche, Trasversali, Calcolo baricentrico]

Esercizio 1 - Ex 2 21.06.2021 Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, \ldots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si determinino dimensione e posizione reciproca di r e π e un sistema di equazioni cartesiane per ciascuna delle due sottovarietà lineari. Mostrare che per ogni punto P non appartenente a r e π esiste una unica retta r_P passante per P e non sghemba sia con r che con π. Discutere le posizioni reciproche di tali rette al variare del punto P. Descrivere tramite delle equazioni cartesiane l'unione di tali rette al variare del punto P sulla retta $X_4 - 1 = X_3 = X_2 - 1 = 0$.

Esercizio 2 - EX 2 esame 13.09.2021 - In uno spazio affine di dimensione 5 sono date tre rette r, s, t tali che $r \vee s \vee t$ sia tutto lo spazio. Mostrare che le rette sono due a due sghembe. Esistono rette che siano non sghembe con tutte e tre date r, s, t ? Determinare le affinità che mandano ciascuna delle rette r, s, t in sè. Esistono affinità che permutano le tre rette tra di loro?
Suggerimento: Potete provare a fare qualche caso esplicito: in $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ prendete

$$r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

verificate che generano tutto lo spazio e trovate se esistono le rette non sghembe con tutte e tre, le affinità che le fissano tutte, affinità che scambino r ed s o che mandino r in s, s in t e t in r.
Extra: Provate a capire se togliete l'ipotesi $\mathbb{A} = r \vee s \vee t$ cosa cambia...

Problema - AGLQ 2.5.5 Un quadrilatero piano completo $\mathcal{Q}$ del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ è la figura costituita da quattro rette $r_i, i = 1, 2, 3, 4$ a due a due non parallele, e a tre a tre non appartenenti ad uno stesso fascio. Le rette $r_i, i = 1, 2, 3, 4$ sono dette i lati di $\mathcal{Q}$; i sei

punti d'intersezione $P_{ij} = r_i \cap r_j$, ove $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ sono detti i vertici; due vertici si dicono opposti se non appartengono ad uno stesso lato; le rette che congiungono una coppia di vertici opposti si dicono diagonali. I punti di intersezione delle diagonali si dicono i punti diagonali (conviene farsi un disegno!). Si mostri che i punti medi delle tre diagonali (cioè dei segmenti delimitati dalle coppie di vertici opposti) sono allineati.
Suggerimento 1: Scegliete un buon riferimento e ragionate in coordinate... Le coordinate baricentriche possono essere più comode, in coordinate affini che succede?
Suggerimento 2: Può essere utile notare che, per ogni valore di α, β, γ in un campo, vale la seguente relazione tra determinanti:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1-\beta & \alpha \\ \gamma & 1 & 1-\alpha \\ 1-\gamma & \beta & 1 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1-\beta & \alpha \\ \gamma & 0 & 1-\alpha \\ 1-\gamma & \beta & 0 \end{pmatrix}$$