La resistenza viscosa

$$R = Av + Bv^2$$

La resistenza viscosa è nulla se la velocità è nulla

E’ sempre opposta alla direzione della velocità

In genere si misura facendo scorrere il fluido (galleria del vento)

A piccole velocità prevale il termine lineare (regime laminare)

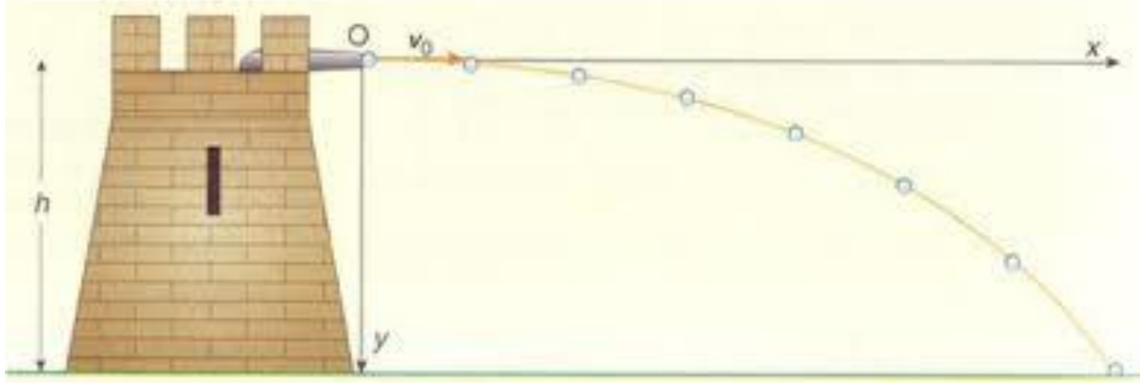
A grandi velocità prevale il termie quadratico (regime turbolento)

Più i corpi sono di grandi dimensioni più il termine quadratico prevale

Un sassolino di raggio 1 cm, che propaga in aria, cessa di essere in regime laminare già ad una velocità di 4 cm/s.

In acqua tale velocità cala a 2.2 mm/s

Resistenza dell’ aria e indipendenza dei moti



Sul corpo agiscono due forze: il peso

$$\mathbf{F}_p = m\mathbf{g}$$

e la resistenza viscosa.

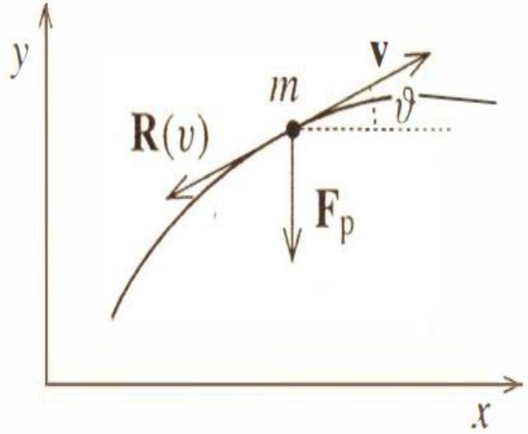
$$\mathbf{R} = -(Av + Bv^2)\mathbf{u}_v$$

La legge di Newton ci dice come il corpo si muove

$$m\mathbf{g} - (Av + Bv^2)\mathbf{u}_v = m\mathbf{a}$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -(Av + Bv^2)\cos\vartheta, \qquad m\frac{dv_y}{dt} = -(Av + Bv^2)\sin\vartheta - mg$$

Se si trascura la resistenza dell’aria un corpo, lasciato cadere verticalmente dalla torre, impiega lo stesso tempo della palla di cannone a giungere a terra. In regime turbolento arriva prima.



Se trascuro B (regime laminare)

$$m\frac{dv_x}{dt} = -Av\cos\vartheta, \qquad m\frac{dv_y}{dt} = -Av\sin\vartheta - mg$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -Av_x, \qquad m\frac{dv_y}{dt} = -Av_y - mg$$

Indipendenza dei moti

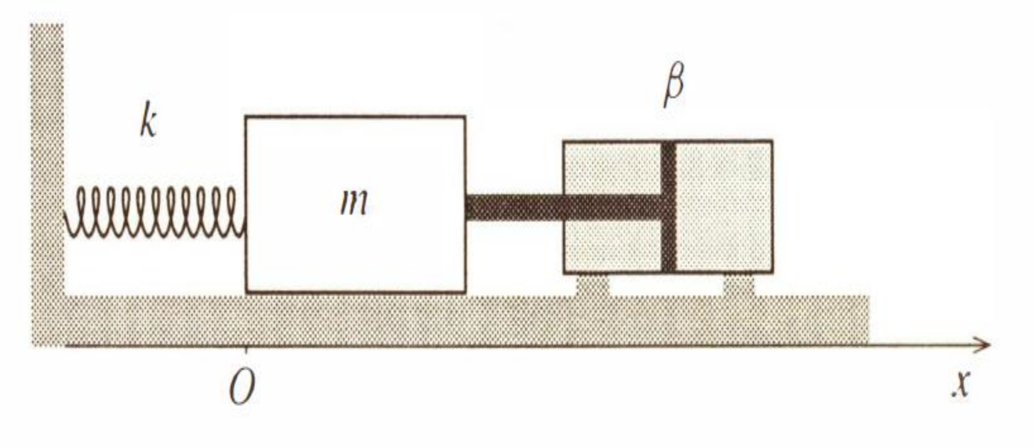
Se trascuro A (regime turbolento)

$$m\frac{dv_x}{dt} = -Bv^2\cos\vartheta, \qquad m\frac{dv_y}{dt} = -Bv^2\sin\vartheta - mg$$

$$m\frac{dv_x}{dt} = -B(v_x^2 + v_y^2)\cos\vartheta, \qquad m\frac{dv_y}{dt} = -B(v_x^2 + v_y^2)\sin\vartheta - mg$$

I moti non sono indipendenti

Oscillazioni smorzate: equazione del moto e sua soluzione



$$\vec{F}_r = -\beta \frac{d\vec{x}}{dt}$$ Forza di attrito viscoso

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x} - \beta\frac{d\vec{x}}{dt} \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0 \rightarrow$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$[\gamma] = [Hz] \qquad \tau = \frac{2}{\gamma}$$ Tempo di smorzamento dell'ampiezza dell'oscillazione

Soluzione generale

SI risolve equazione algebrica associata

$$r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0 \,.$$

Le due radici sono:

$$r_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è

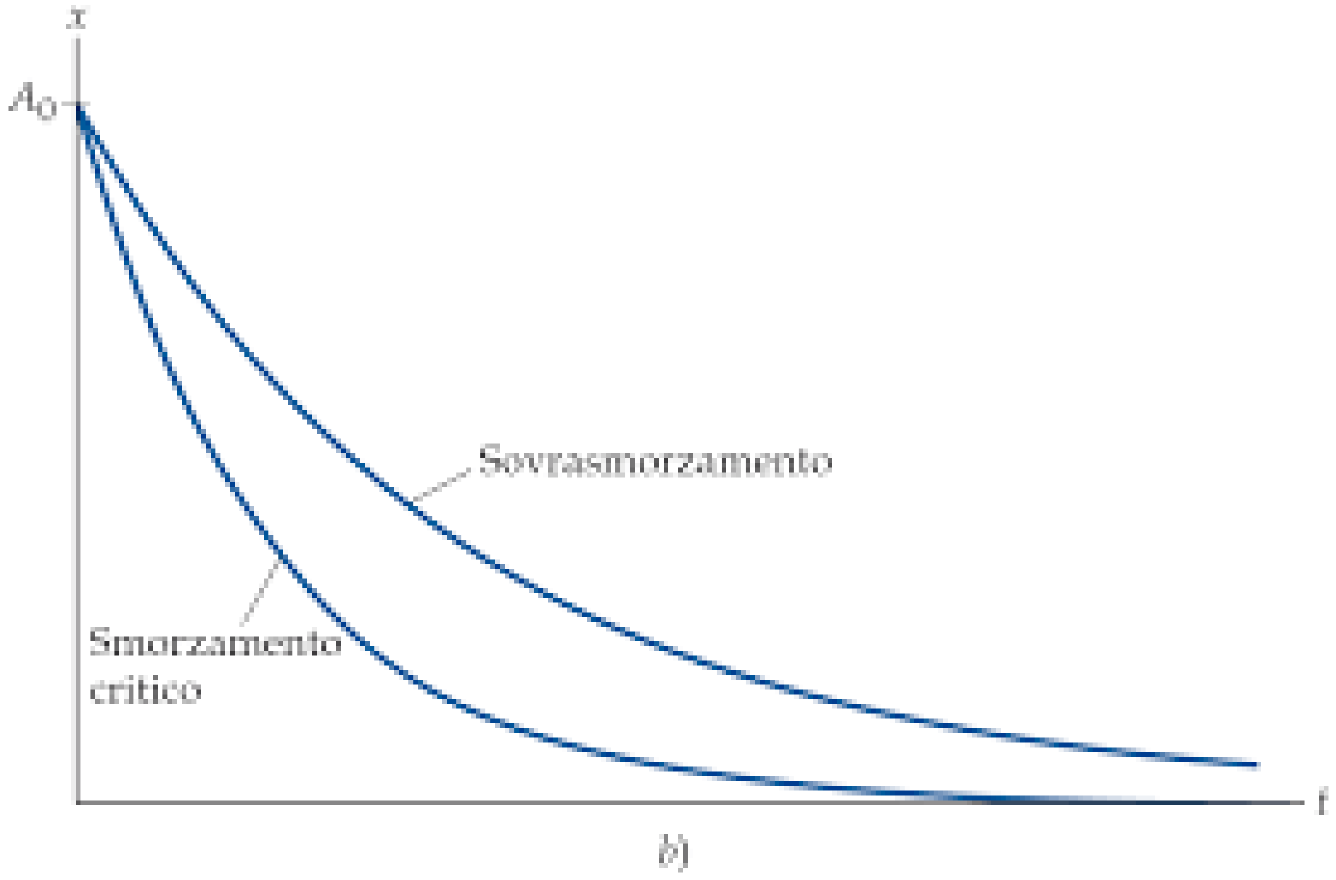
$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Oscillazioni smorzate, grande smorzamento: $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$$r_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$$r_1 < 0; \qquad r_2 < 0$$



Domina la soluzione con il segno più, cioè r_1

$$x(t) = C_1 e^{-|r_1| t} + C_2 e^{-|r_2| t}$$

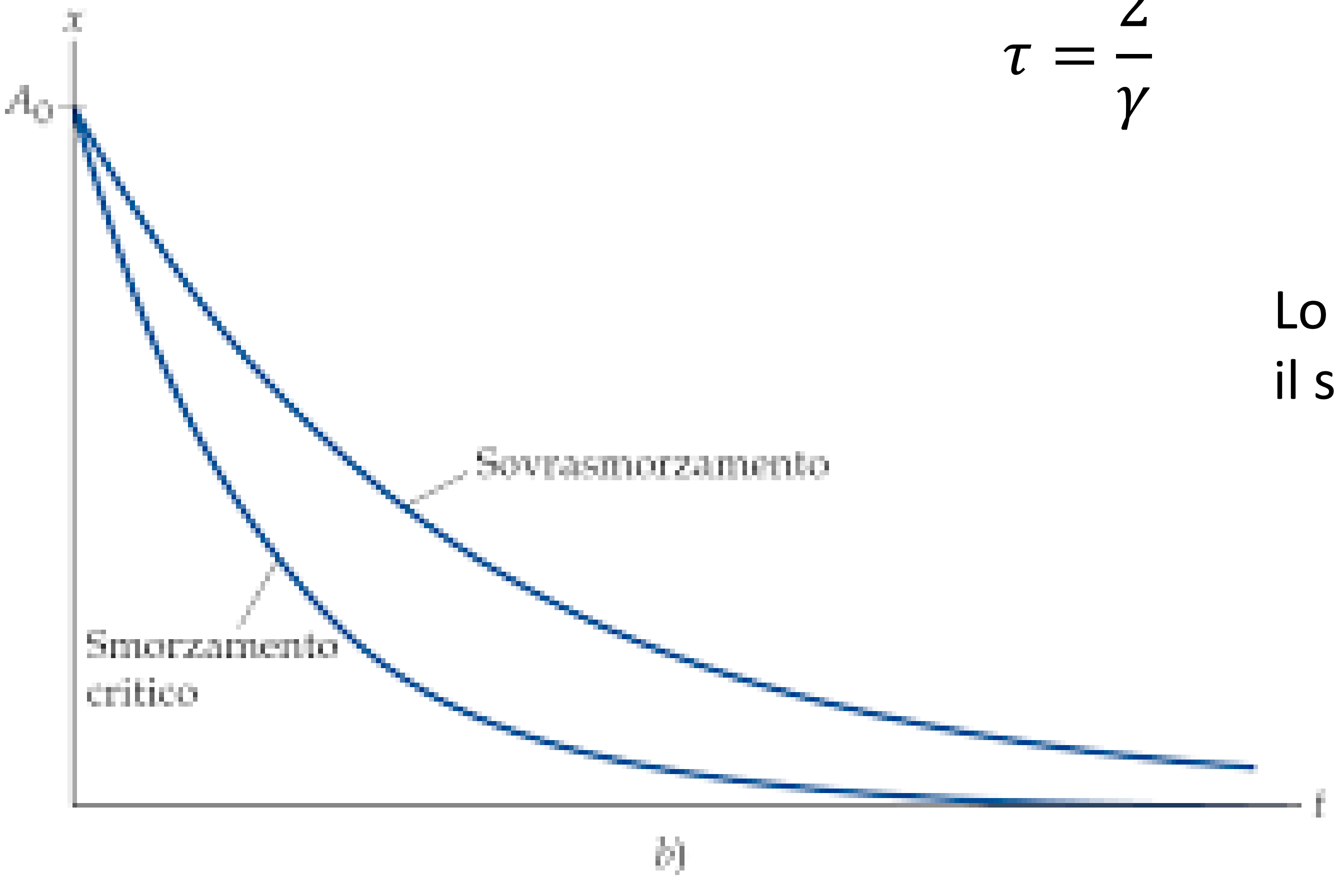
$$\frac{1}{|r_1|} = \tau_1 > \tau_2 = \frac{1}{|r_2|}$$

Oscillazioni smorzate, smorzamento critico: $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$r_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \qquad r_1 = r_2$$

$$\tau = \frac{2}{\gamma}$$



Lo smorzamento critico è quello in cui il sistema si ferma in un tempo minimo

Oscillazioni smorzate, piccolo smorzamento: $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

$$r_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$r_{1,2} \in C$

$$x = C_1 e^{-(\gamma/2)t} e^{+i\omega_1 t} + C_2 e^{-(\gamma/2)t} e^{-i\omega_1 t}$$

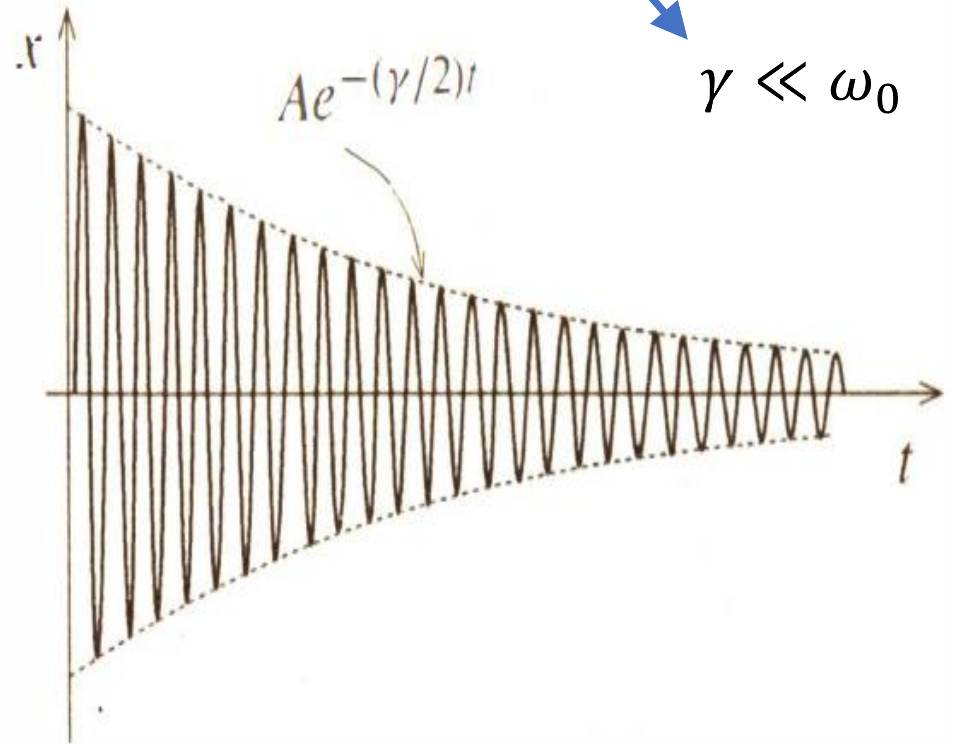
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2} = \omega_0 - \frac{\gamma^2}{8\omega_0}$$

$\gamma \ll \omega_0$

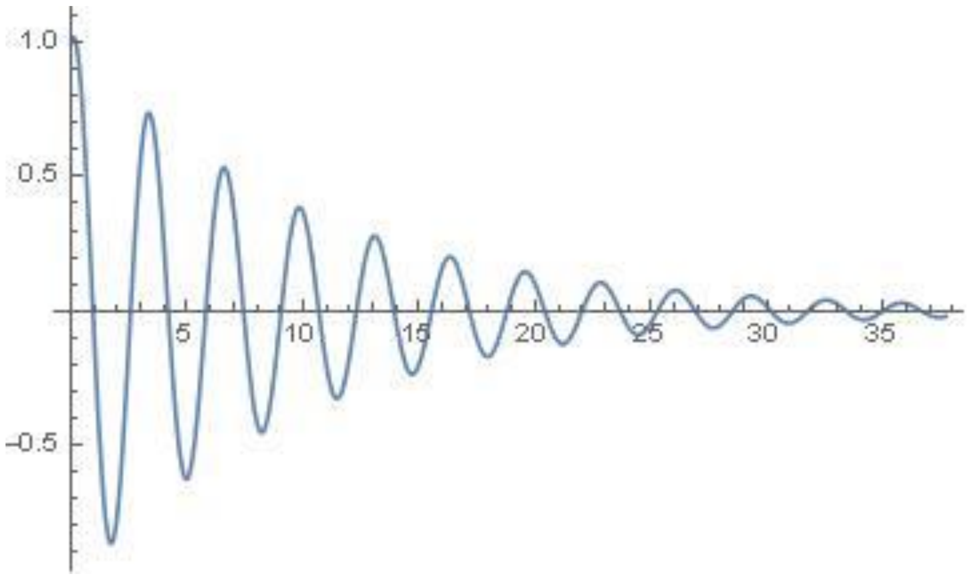
Si sceglie la parte reale di questa soluzione:

$$x = e^{-(\gamma/2)t}(a\cos\omega_1 t + b\sin\omega_1 t)$$

$$x(t) = Ae^{-(\gamma/2)t}\cos(\omega_1 t + \phi)$$



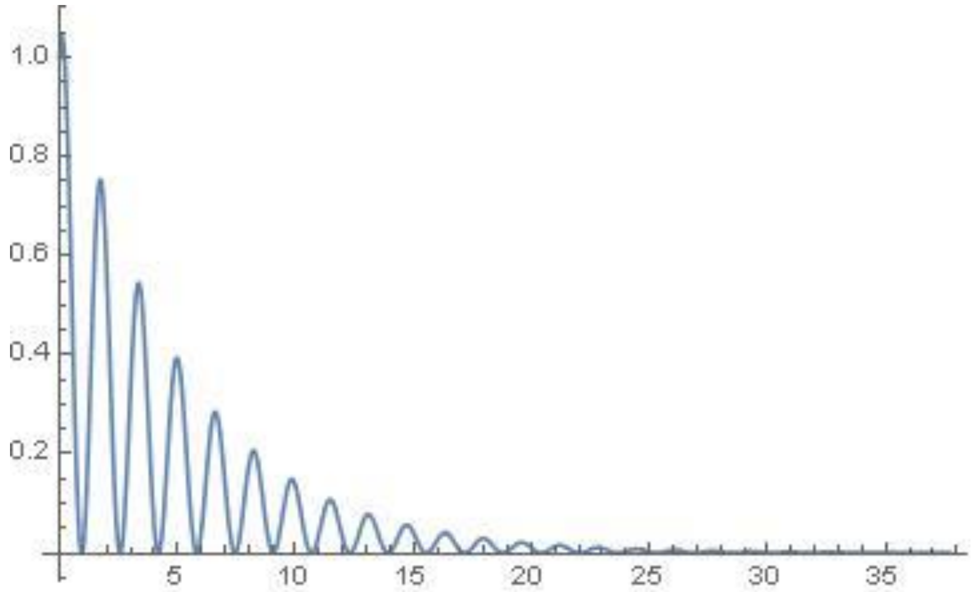
Oscillazioni smorzate, ampiezza dell'oscillazione e oscillazione dell'energia totale



$$Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

L'ampiezza dell'oscillazione si riduce di un fattore e^{-1} dopo un tempo τ

Siamo in presenza di un moto dissipativo in cui l'energia non si conserva. Nei punti di massima ampiezza di oscillazione l'energia totale è tutta di tipo potenziale elastico. Essa è proporzionale al quadrato dell'ampiezza in quei punti



$$U_{tot}(t) \propto A^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} = A^2 \, e^{-\frac{t}{\tau_e}} \quad \text{dove:} \quad \tau_e = \frac{\tau}{2} = \frac{1}{\gamma}$$

L'energia dell'oscillazione si riduce di un fattore e^{-1} dopo un tempo $\tau/2$