Note Title

$$\underset{\substack{\wr\\ \text{punti}}}{(\mathbb{A}},\ \underset{\substack{\wr\\ \text{sp. vett.}\\ \dim n}}{V},\ +)\quad \text{spazio affine}\qquad \mathbb{A}\times V \xrightarrow{+} \mathbb{A}$$
$$(P, v) \mapsto P+v$$

In generale per gli esercizi si considera sp. affine standard

$\mathbb{A} = K^n$, $V = K^n$, $+$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1+y_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

coordinata ausiliaria quando voglio sottolineare se parlo di punti o vettori

$$\sum \alpha_i \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{x_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sum \alpha_i \underline{x_i} \end{pmatrix}$$

$\sum \alpha_i = 1.$ $\qquad \underline{x_i} = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}$

$$\mathbb{A} = (\mathbb{A}, V, +)\quad \text{s. d. rif}\quad \mathcal{R} = \{ \underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{A}}}{P_0},\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{base di } V}}{\mathcal{V}} = \{v_1,\dots,v_n\} \}$$

Fissato $\mathcal{R}$ ogni punto P di $\mathbb{A}$ è individuato univocam. da una $\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in K^n$ dove $\underline{\alpha}$ sono le coord. del vettore $\underbrace{P - P_0}_{\in V}$ risp. alla base $\mathcal{V}$

$$P = P_0 + \sum \alpha_i v_i$$

Dare un s.d. rif. $\mathcal{R}$ $\overset{\text{è equivalente a dare}}{\longleftrightarrow}$ $n+1$ pt. $P_0, \dots, P_n$ in $\underbrace{\text{posizione generale}}$

$\mathcal{R} = \{P_0, v_1, \dots v_n\} \rightsquigarrow P_0, P_1 = P_0 + v_1, \dots, P_n = P_0 + v_n$ ($P_1 - P_0, \ \dots \ P_n - P_0$ formano base di $\mathcal{V}$)

$$\{P_0, \underbrace{P_1 - P_0, \dots P_n - P_0}_{\text{vettori}}\} \longleftarrow \{P_0, \dots P_n\}$$

NB Detto $\alpha_{\mathcal{R}}(P) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ le coord. di P risp. a $\mathcal{R}$, talvolta scriveremo $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_{\mathcal{R}}(P)$ dove 1 è una coordinata ausiliaria che serve per motivi tecnici.

<u>Ricordo</u>: Una applicaz. $f : \mathbb{A} = (\mathbb{A}, V, +) \longrightarrow \mathbb{B} = (\mathbb{B}, W, +)$ tra sp. affini si dice <u>affine</u> se esiste una appl. lineare $\varphi : V \longrightarrow W$ t.c. $f(P + v) = f(P) + \varphi(v)$ $\forall\ P \in \mathbb{A}$ e $\forall\ v \in V$

<u>Osservo</u> che f è lineare se $f(P_0 + v) = f(P_0) + \varphi(v)$ $\forall v \in V$

fissato $P_0 \in \mathbb{A}$. Infatti: $\forall Q \in \mathbb{A}$ $Q = P_0 + v_Q$ $\exists!\, v_Q$

$$f(Q) = f(P_0 + v_Q) = f(P_0) + \varphi(v_Q)$$

$$f(Q + w) = f(P_0 + v_Q + w) = \underbrace{f(P_0) + \varphi(v_Q}_{f(Q)} + w)$$
$$\varphi(v_Q + w) = \varphi(v_Q) + \varphi(w)$$

affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ biettive

Esercizio Una trasformazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ con $\dim \mathbb{A} = n = \dim V$ è univocamente determinata dall'immagine di $\underbrace{n+1 \text{ punti in posizione generale}}_{\text{formano un sistema di riferimento}}$.

Svolg.

Siano $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ affine e $\varphi : V \to W$ lineare associata a f

in posiz. generale
$$\begin{cases} P_0 \longmapsto Q_0 \\ \vdots \\ P_n \longmapsto Q_n \end{cases}$$

$\mathcal{V}$ base $\mathcal{V} = \{ P_1 - P_0, \dots P_n - P_0 \}$, $v_1 = P_1 - P_0$, $v_n = P_n - P_0$

$f(P_0) = Q_0$

$f(P_i) = Q_i$ $1 \le i \le n$

Sarà $\varphi(v_1) = f(P_1) - f(P_0) = Q_1 - Q_0$

$\varphi(v_j) = Q_j - Q_0$ $1 \le j \le n$

Suppongo di avere 2 appl. affini f, g t.c. $f(P_i) = g(P_i) = Q_i$

φ appl. lineare, ψ appl. lin. associata

$$\varphi(v_i) = \varphi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0 = \psi(P_i - P_0) \overset{!}{=} \psi(v_i) \implies \psi = \varphi$$

inoltre $f(P_0) = g(P_0) \implies f = g$

Viceversa

Suppongo dati $n+1$ punti $Q_0, \dots Q_n$ in $\mathbb{B}$

Mostro che esiste $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ affine t.c. $f(P_i) = Q_i$

Definisco $\varphi : V \to W$ NB $v_1, \dots v_n$ è base di V

mandando $v_i = P_i - P_0 \longmapsto Q_i - Q_0$

Inoltre da $f(P_0) = Q_0$ deduco poi tutti gli altri $f(P)$

Infatti $f(P) := \underset{\substack{\| \\ Q_0}}{f(P_0)} + \varphi(\underset{\substack{\uparrow \\ V}}{P - P_0})$. La f così costruita è affine $\square$

Esempio $\mathbb{A}^3 = \mathbb{A}(K^3) = (K^3, K^3, +)$ " $K = \mathbb{R}$ "

esiste $f : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3$ con $\varphi : K^3 \longrightarrow K^3$?

$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{\text{non sono l. indip}} \begin{matrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

e le immagini non rispettano la dipendenza.

NO

esiste $f : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3$?

$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Q_0$

$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Q_1$

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Q_2$

$P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Q_3$

? sono in posiz. generale? sì

$v_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_2 = P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_3 = P_3 - P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

l. indip formano base di K^3

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{?}{\neq} 0$$

$\varphi : K^3 \longrightarrow K^3$ è ben definita

$v_1 \longmapsto Q_1 - Q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_2 \longmapsto Q_2 - Q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_3 \longmapsto Q_3 - Q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

In questo caso φ è automorf.

$\Rightarrow f : P \longmapsto Q_0 + \varphi(P - P_0)$ è affinità

NB f biettiva $\Leftrightarrow$ φ biettiva

§ Matrice associata a trasf. affine.

Sia $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ trasf. affine e siano fissati

$\mathcal{R} = \{P_0, v_1, \dots v_n\}$ s. d. rif su $\mathbb{A}$ ($P_0 = O$)

$\mathcal{S} = \{Q_0, w_1, \dots w_m\}$ . . . . . $\mathbb{B}$ ($Q_0 = O'$)

Esiste matrice
$$\alpha_{\mathcal{R}\mathcal{S}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b & \underbrace{A}_{m \times n} \end{array}\right) \qquad (m+1) \times (n+1)$$

t.c. se un pto P ha coord. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ risp. al s.d.r. $\mathcal{R}$,

ossia $P = P_0 + \sum x_i v_i$ e $f(P)$ ha coord $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ risp. a $\mathcal{S}$

allora
$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

← Da qui si capisce perché è utile usare la coordinata ausiliaria 1 e scrivere $\alpha_{\mathcal{R}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Si costruisce prendendo

- $A = \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(\varphi)$ con φ l'applicaz. lineare $V \longrightarrow W$ associata a f e

  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V indicata in $\mathcal{R}$

  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots w_m\}$ . . . W . . . in $\mathcal{S}$

- $b = \alpha_{\mathcal{S}}(f(P_0))$ coordinate di $f(P_0)$ nel s.d.r. $\mathcal{S}$

<u>Osserva</u>: Fissato $\mathcal{R} = \{P_0, v_1 \dots v_n\}$ in $\mathbb{A}$

Coord. $\alpha_{\mathcal{R}}(P_0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{coordinate "vere"}}$ $\qquad \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ — b: coordinate di $f(P_0)$ risp. al s.d.r. $\mathcal{S}$

$P_0 = P_0 + 0v_1 + \dots 0v_n$

me scrivo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ per i calcoli

Analogamente $\alpha_{\mathcal{R}}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ me scriverò $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Osserva</u> $f(P) = f(P_0 + \sum x_i v_i) = \overbrace{f(P_0)} + \sum x_i \varphi(v_i) = Q_0 + \sum b_j w_j + \underbrace{\sum x_i \varphi(v_i)}_{= \sum y_j' w_j}$

$= Q_0 + \sum y_j w_j$ Dunque $y_j = b_j + y_j'$ con $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix}$

<u>Esempio</u> Traslazione in $\mathbb{A}^3$ di vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = v$ fissato

$f: P \longmapsto P+v \qquad \varphi = id_{K^3}$

Fisso s.d.r. su $\mathbb{A}^3$ $\quad \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, e_1, e_2, e_3 \right\} = \mathcal{R}$

$$\alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & & 0 \\ -2 & & 1 & \\ 4 & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

coordinate di $f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ risp. a $\mathcal{R}$

$= \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\;0\;0 \\ \hline 1 & \\ -2 & \mathbb{1} \\ 4 & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 1+x_1 \\ -2+x_2 \\ 4+x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

coordinate $\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ risp. a $\mathcal{R}$

Cambiando il s.d. rif ?

Ad esempio se considero $\mathcal{R}' = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, e_3, e_2, e_1 \right\}$

Provare a scrivere matrice associata alla traslazione sopra.

$$\alpha_{\mathcal{R}'\mathcal{R}'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline ? & \mathbb{1} \end{array}\right)$$

§ Proiezioni e simmetrie in $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, V, +)$

Sia $\mathbb{L} = P_0 + U$ con $P_0 \in \mathbb{A}$, $U \leq V$
giacitura
sottovar. affine

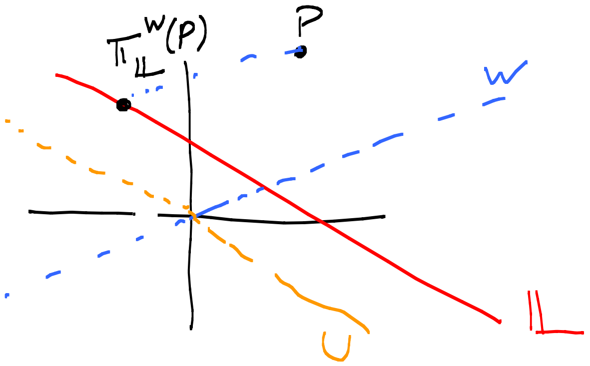
complementare di U in V
e sia $U \oplus W = V$.

definisco $\pi_{\mathbb{L}}^W : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ ponendo $P \longmapsto P$ se $P \in \mathbb{L}$ $\quad$ $\boxed{\text{proiezione su } \mathbb{L} \text{ nella direz. di } W}$

affinità $\Leftrightarrow$ $W = 0$

l'appl. lineare associata sia π_U^W

NB se $P = P_0 + u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$ $\Rightarrow \pi_{\mathbb{L}}^W(P) = P_0 + u$



Definisco poi $\sigma_{\mathbb{L}}^W$ simmetria di asse $\mathbb{L}$ e direzione W l'applicazione affine che manda P in P se $P \in \mathbb{L}$ avente appl. lineare associata π_U^W

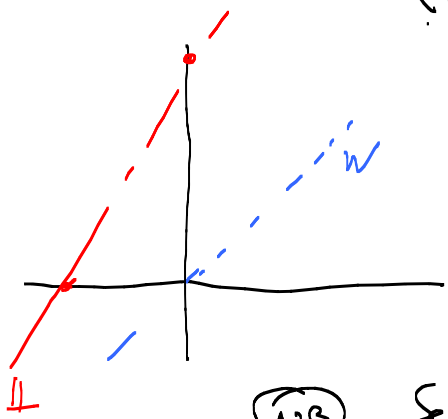
affinità

automorf.

Esercizio Determinare la matrice di $\pi_{\mathbb{L}}^W$ rispetto al s.d.r.

canonico ove $\mathbb{L}$ è la retta in $\mathbb{A}^2$ di eq. $2X-Y+3=0$

e $W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ $\boxed{x=y}$ eq cart. di W



$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{soluz } 2X-Y=0} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + U$$

$$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\pi^W_{\mathbb{L}}) = ? \qquad \mathcal{E} = \{\underset{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{O}, e_1, e_2\}$$

NB Se scelgo $\mathcal{R} = \left\{ \underset{\text{pto}}{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}}, \underbrace{\underset{v_1 \in U}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}, \underset{v_2 \in W}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}}_{\text{base di } K^2} \right\}$

$\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$

$$\alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\pi^W_{\mathbb{L}}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Infatti $\pi^W_{\mathbb{L}}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ che ha coord. $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{R}$

$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$ è in $\oplus$ con W e $\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}}(\pi^W_U) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

I metodo

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

generico punto di $\mathbb{A}$

NB $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ sono le sue coord nel s.d.r. $\mathcal{R}$

$$\Big\downarrow \pi^W_{\mathbb{L}}$$

$$? = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\in \mathbb{L}} + 0$$

Dobbiamo conoscere $a \in K$

$$b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}}_{\text{vettore}} - \underbrace{a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\text{vettore}} \in W$$

ossia $\begin{pmatrix}x-a\\y-3-2a\end{pmatrix} \in W$

deve soddisfare eq. di W

Dunque $(x-a) = (y-3-2a)$

$$\Rightarrow \boxed{a = -x+y-3}$$

$$\pi^W_{\mathbb{L}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + (-x+y-3)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+y-3\\3-2x+2y-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3-x+y\\-3-2x+2y\end{pmatrix}$$

$$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\pi_{\mathbb{L}}^W) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -3 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

verifico moltiplicandola per $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

II Metodo: prima trovo $\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\pi_U^W)$ [lo diamo per fatto dal I semestre]
poi impongo che un punto di $\mathbb{L}$ sia unito (= fisso)
ad es. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$. ossia $\pi_{\mathbb{L}}^W\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. In coordinate:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline \alpha & -1 & 1 \\ \beta & -2 & 2 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha + 3 \\ \beta + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -3 \\ \beta = -3 \end{array}$$

stesso risultato del primo metodo

$\boxed{\text{NOTO}}$ che $\pi_{\mathbb{L}}^W \circ \pi_{\mathbb{L}}^W = \pi_{\mathbb{L}}^W$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = B$$

risultato generale

III metodo

Uso matrici di cambio di s.d.rif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{\mathcal{R}} \arrow[r, "\pi_{\mathbb{L}}^W"] \arrow[d, phantom, ""] & \mathbb{A}^{\mathcal{R}} \arrow[d, "id"', "M"] \\ \mathbb{A}_{\mathcal{E}} \arrow[u, "id", "M^{-1}"'] \arrow[r, "\pi_{\mathbb{L}}^W"'] & \mathbb{A}_{\mathcal{E}} \end{tikzcd}$$

Mi basta trovare le matrici di cambio di s.d.r.

$$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\pi_{\mathbb{L}}^W) = \boxed{MBM^{-1}} \qquad \text{con } B = \alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\pi_{\mathbb{L}}^W)$$

$$M = \alpha_{\mathcal{R}\mathcal{E}}(id) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right), \text{ ricavo } M^{-1}, \ldots$$

Esercizio In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ sia dato il piano $\mathbb{L}$ di eq.
$X - 2Z - 1 = 0$ e il vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
determinare la matrice di $\sigma_{\mathbb{L}}^W$ rispetto al s.d.r. canonico
$(W = \langle w \rangle)$ eq cart. $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\mathbb{L}: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\langle \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \rangle}_{\text{soluz } X - 2Z = 0}$$

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1, v_2, w \right\} \qquad \alpha_{\mathcal{R}\mathcal{R}}(\sigma_{\mathbb{L}}^W) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = B$$

$\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\sigma^W_{\mathbb{L}}) = \, ?$ $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\;0\;0 \\ \hline b & A \end{array}\right)$

matrice simmetria σ^W_U rispetto alla base v_1, v_2, w

s.d. rif canonico

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1, e_2, e_3 \right\}$

II metodo analogo al caso precedente

Determino la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\sigma^W_U)$ e poi impongo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sia unito per trovare b.

III metodo analogo al caso precedente

La matrice cercata sarà MBM^{-1} con M matrice di cambio di s.d.r da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{E}$.

I metodo (quasi) analogo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a v_1 + b v_2}_{\downarrow \text{ sé}} + \underbrace{c w}_{\downarrow\, -cw}$$

$$\Big\downarrow \sigma^W_{\mathbb{L}}$$

$$? = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a v_1 + b v_2 - c w$$

Determino a, b imponendo che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - a v_1 - b v_2 \in W$, $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x-1-2a \\ y-b \\ z-a \end{pmatrix} \in W \iff \begin{cases} x-1-2a+y-b=0 \\ z-a=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = x+y-2z-1 \\ a = z \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x-c \\ y+c \\ z \end{pmatrix}} \in \mathbb{L} \iff (x-c)-2z-1=0 \iff c = x-2z-1$$

Dunque

$$\sigma^W_{\mathbb{L}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (x+y-2z-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (x-2z-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-x+4z \\ -2+2x+y-4z \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\alpha_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\sigma^W_{\mathbb{L}})} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Osservo che bastava trovare c

Infatti: $\sigma^W_{\mathbb{L}}(P) = P - 2cw = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2(x-2z-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dots$