01-GeoAffine-T02[Sottospazi Affini, fasci, trasversali]

Esercizio 0 - Grassman affine più nel dettaglio

1. Si enunci la disuguaglianza di Grassmann.
2. Si osservi che date due varietà affini $\mathbb{L} = L + V_{\mathbb{L}}$ e $\mathbb{M} = M + V_{\mathbb{M}}$, si verifica una e una sola delle seguenti tre posizioni reciproche:

   (a) $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono incidenti (questo caso include il caso di inclusione);

   (b) $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono sghembe;

   (c) $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono disgiunte e non sghembe.

   Nota: Questo punto è ovvio, ma è una osservazione utile da sapere e serve da appoggio per il punto successivo.
3. Mostrare, per ciascuno dei tre casi descritti, se c'è uguaglianza o disuguaglianza stretta.

Esercizio 1 - Esame 12.07.2021 ex2

1. In un generico spazio affine di dimensione 5 sono dati due piani complementari π e σ. Mostrare che per ogni punto P non appartenente a nessuno dei due piani esiste una unica retta r_P passante per P e incidente o parallela con π e σ, specificando per quali punti P la retta r_P è incidente entrambi, e per quali risulta parallela a π o a σ o a entrambi. Discutere le posizioni reciproche di tali rette al variare del punto P.
2. In $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ siano dati

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ ed i punti } P(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ 1+\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Calcolare le rette $r_{P(\lambda)}$ e descrivere tramite equazioni cartesiane l'unione di tali rette al variare di λ.

Svolgimento guidato per il punto "1.":

1. *Mostrate quali sono le uniche combinazioni di incidenza/parallelismo di r_P con π e σ che possono verificarsi.*

2. *Mostrare, per ciascuno dei casi individuati precedentemente, che una retta r_P con le proprietà descritte (se esiste) deve appartenere alla varietà lineare $(\pi \vee P) \wedge (\sigma \vee P)$.*

3. *Calcolare la dimensione della varietà $(\pi \vee P) \wedge (\sigma \vee P)$.*

4. *Con le cose appena dimostrate si deducano esistenza e unicità della retta r_P cercata.*

5. *Si deduca, sfruttando l'unicità dimostrata e un po' di intuito, quando si ha parallelismo/incidenza con π e σ.*

Esercizio 2

1. Si consideri, nel piano affine, un triangolo di vertici A, B, C.
   Siano a, b, c le lunghezze dei lati BC, CA, AB.
   Si esprima, in termini di a, b, c, una terna di coordinate baricentriche per ciascuno dei piedi delle bisettrici.
   Nota: può essere utile ricordare il teorema della bisettrice.

2. Si consideri $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Siano

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Sia $r := A \vee B$.
   Si scrivano:

   - un sistema di equazioni cartesiane per la retta r.
   - Delle coordinate baricentriche per A e B nel sistema di riferimento baricentrico canonico.
   - l'equazione della retta r in coordinate baricentriche, nel sistema di riferimento baricentrico canonico.
   - Le coordinate del punto

$$P := \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \in r$$

     Nel sistema di riferimento baricentrico di r dato da A e B.