DIARIO DEL TUTORATO

TRACCE DI SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI SVOLTI

Settimana 1

1.4. M è un paraboloide ellittico con minimo dell'origine, N è la falda superiore di un iperboloide ellittico, con minimo in $(0,0,1)$, P è un ellissoide con centro nell'origine e semiassi di lunghezza $1/\sqrt{2}$, $1/2$, 1.

Definendo $f_M(x,y,z) := x^2+y^2-z$, $f_N(x,y,z) := \sqrt{1+x^2+y^2}-z$ e $f_P(x,y,z) := 2x^2+4y^2+z^2-1$, notiamo che $M=\{f_M=0\}$, $N=\{f_N=0\}$ e $P=\{f_P=0\}$. Il piano $\pi_{M,p}$ tangente a M in un suo punto $p=(x_0,y_0,z_0)$ è dunque il piano parallelo allo spazio tangente $T_pM = \ker \mathrm{d}f_M(p) = \nabla f_M(p)^\perp$ e passante per p, ossia

$$\pi_{M,p} = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ \langle \nabla f_M(x_0,y_0,z_0), (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\rangle = 0\big\}.$$

1.5. Identifichiamo $\mathbb{R}^4$ con $\mathbb{C}^2$ tramite la biezione $\mathbb{R}^4 \ni (a,b,c,d) \leftrightarrow (a+\mathrm{i}b, c+\mathrm{i}d) = (z,w)\in\mathbb{C}^2$. I punti di M soddisfano allora $a^2-b^2+\mathrm{i}2ab = c^3-3cd^2+\mathrm{i}(3c^2d-d^3)$, quindi secondo l'identificazione sopra

$$M = \big\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 :\ (a^2-b^2, 2ab) = (c^3-3cd^2, 3c^2d-d^3)\big\} = \big\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 :\ a^2-b^2 = c^3-3cd^2,\ 2ab = 3c^2d-d^3\big\},$$

e vediamo che $M=\{f=0\}$ con $f\in C^\infty(\mathbb{R}^4;\mathbb{R}^2)$ definita come $f(a,b,c,d) := (a^2-b^2-c^3+3cd^2, 2ab-3c^2d+d^3)$. La sua matrice jacobiana è

$$Jf(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} 2a & -2b & 3(d^2-c^2) & 6cd \\ 2b & 2a & -6cd & 3(d^2-c^2) \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\begin{vmatrix} 2a & -2b \\ 2b & 2a \end{vmatrix} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad a=b=0,$$

sappiamo subito che $\operatorname{rk} Jf(a,b,c,d) = 2$ (massimo) se almeno uno tra a e b è non nullo. Altrimenti, abbiamo

$$Jf(0,0,c,d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3(d^2-c^2) & 6cd \\ 0 & 0 & -6cd & 3(d^2-c^2) \end{pmatrix},$$

dove

$$\begin{vmatrix} 3(d^2-c^2) & 6cd \\ -6cd & 3(d^2-c^2) \end{vmatrix} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad c=d=0,$$

dunque $\operatorname{rk} Jf(a,b,c,d) = 2$ (massimo) su $M\setminus\{(0,0,0,0)\}$. D'altronde $Jf(0,0,0,0)$ è la matrice nulla, quindi concludiamo che $C=\{(0,0,0,0)\}$ e $M\setminus C$ è sottovarietà di $\mathbb{R}^4$ di dimensione $4-2=2$.

1.6. $M=\{f=0\}$ con $f(x,y,z) := \big(\sqrt{x^2+y^2}-R\big)^2 + z^2 - r^2$. Definiamo la retta $\ell := \{(0,0,z) :\ z\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^3$; chiaramente $f\in C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\ell)$. D'altronde, $f(0,0,z) = z^2+R^2-r^2>0$ per ogni $z\in\mathbb{R}$, quindi $M\cap\ell=\emptyset$. Allora se M è sottovarietà, è di classe C^∞. Ora, il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y,z) = 2\left(\big(\sqrt{x^2+y^2}-R\big)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \big(\sqrt{x^2+y^2}-R\big)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z\right).$$

Osserviamo che se $\sqrt{x^2+y^2}-R=0$, allora su M vale $z^2=r^2$, quindi $z\neq 0$, il che implica che $\nabla f(x,y,z)\neq 0$; se invece $\sqrt{x^2+y^2}-R\neq 0$, $\nabla f(x,y,z)=0$ se e solo se $x=y=z=0$, ma abbiamo già mostrato che $(0,0,0)\notin M$. Questo mostra che $\nabla f\neq 0$ su M, che è quindi sottovarietà di dimensione $3-1=2$.

Per disegnare M, notiamo che, per ogni $\theta\in[0,2\pi)$ fissato,

$$\begin{aligned} M \cap \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\ \rho\in[0,+\infty),\ z\in\mathbb{R}\big\} \\ = \big\{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\in\mathbb{R}^3 :\ (\rho-R)^2+z^2-r^2=0,\ \rho\in[0,+\infty),\ z\in\mathbb{R}\big\} \end{aligned}$$

Ultimo aggiornamento: 22 giugno 2023.

Per comunicare refusi o errori, scrivere a `redaelli@math.unipd.it`.

è una circonferenza con centro in $(\rho, z) = (R, 0)$ e raggio $r < R$ (quindi non interseca l'asse z); allora M e la superficie che si ottiene dalla rotazione di una tale circonferenza attorno all'asse z.

1.7 (non orientabilità). Mostriamo che non esiste un campo normale N globalmente definito in modo continuo su M. Supponiamo per assurdo che esista $N \in C^0(M; \mathbb{S}^2)$ campo normale. Sia $p := \varphi(R, 0) = \varphi(R, 2\pi) = (R, 0, 0)$; poiché

$$J\varphi(R, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lo spazio tangente a M in p sarà $T_pM = \operatorname{im} J\varphi(R, 0) = \operatorname{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$. Quindi $N(p)$, dovendo essere unitario e ortogonale a tale spazio, potrà valere solo $\pm(0, 0, 1)$.[1] Supponiamo che $N(p) = (0, 0, 1)$ (la dimostrazione nell'altro caso è analoga). Costruiamo quindi la matrice quadrata 3×3

$$\mathfrak{A}(u, v) = \left(\; J\varphi(u, v) \; \middle| \; N(\varphi(u, v)) \; \right).$$

Poiché $J\varphi$ ha rango massimo su M (da dimostrare per la prima parte dell'esercizio) e N sta nel suo nucleo, $\mathfrak{A}$ ha rango massimo, ossia $\det \mathfrak{A} \neq 0$; poiché φ è liscia e N è continuo, la funzione $\det \mathfrak{A} \colon (R - r, R + r) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua. D'altronde però

$$\det \mathfrak{A}(R, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{e} \quad \det \mathfrak{A}(R, 2\pi) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} < 0.$$

Abbiamo dunque ottenuto che la funzione $F := \det \mathfrak{A}$ è continua sul connesso $S := (R - r, R + r) \times \mathbb{R}$ con immagine sconnessa (perché si può scrivere $F(S) = (F(S) \cap (-\infty, 0)) \cup (F(S) \cap (0, +\infty))$, con $F(S) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset \neq F(S) \cap (0, +\infty)$). Ciò è assurdo, e quindi l'ipotesi che esistesse N normale continuo globale su M è falsa.

Settimana 2

2.11. Come prima cosa osserviamo che $f \geqslant 0$ su M, e che nel punto $(0, 1, 1) \in M$ abbiamo $f(0, 1, 1) = 0$; quindi esiste $\min_M f = 0$. Per determinare che esiste $\max_M f$ e il suo valore, osserviamo che dalla disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica abbiamo $f(x, y, z)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leqslant \frac{xy+xz+yz}{3}$, quindi $f \leqslant (1/3)^{3/2}$ su M; d'altronde il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ appartiene a M ed è tale che $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (1/3)^{3/2}$, quindi esiste $\max_M f = (1/3)^{3/2}$.

2.12 (caso $mnp \neq 0$). Sappiamo che esistono il massimo e il minimo di f sulla sfera $\mathbb{S}^2$ visto che f è continua e $\mathbb{S}^2$ è compatta (teorema di Weiestraß). Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che i punti in cui f assume tali massimo e minimo soddisfano il sistema

$$\begin{cases} mx^{m-1}y^nz^p = 2\lambda x \\ nx^my^{n-1}z^p = 2\lambda y \\ px^my^nz^{p-1} = 2\lambda z\,. \end{cases}$$

Supponiamo che $xyz \neq 0$; allora il sistema sopra è equivalente a

$$\begin{cases} mf(x, y, z) = 2\lambda x^2 \\ nf(x, y, z) = 2\lambda y^2 \\ pf(x, y, z) = 2\lambda z^2\,, \end{cases}$$

da cui ricaviamo, sommando le equazioni, che $(m + n + p)f(x, y, z) = 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 2\lambda$, dove abbiamo usato che $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$. Sostituendo questo valore di λ nel sistema ricaviamo

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{m^{\frac{1}{2}}}{(m + n + p)^{\frac{1}{2}}} =: \pm\bar{x} \\ y = \pm\dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{(m + n + p)^{\frac{1}{2}}} =: \pm\bar{y} \\ z = \pm\dfrac{p^{\frac{1}{2}}}{(m + n + p)^{\frac{1}{2}}} =: \pm\bar{z}. \end{cases}$$

[1] N.B. In classe ho scritto in modo impreciso la jacobiana di φ, per cui risultava che N doveva avere una direzione differente rispetto a quella scritta in questa soluzione; tuttavia, *mutatis mutandis*, la dimostrazione è la stessa.

Se invece $xyz = 0$, ci limitiamo ad osservare che allora $f(x, y, z) = 0$.

Distinguiamo ora due casi. Se m, n, p sono tutti pari, allora $f \geqslant 0$; quindi, dato che $f(0, 0, 1) = 0$ abbiamo che $\min_{\mathbb{S}^2} f = 0$, mentre $\max_{\mathbb{S}^2} f = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} p^{\frac{p}{2}} / (m + n + p)^{\frac{m+n+p}{2}} =: M$. Se invece almeno uno tra m, n, p è dispari, sia esso senza perdita di generalità m, e osserviamo che $0 \neq f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = -f(-\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$; dunque f assume su $\mathbb{S}^2$ valori sia positivi che negativi, e di conseguenza il valore 0 non è né massimo né minimo di f su $\mathbb{S}^2$. Tutti e soli gli estremanti cercati allora soddisfano il sistema dei moltiplicatori di Lagrange con la condizione $xyz \neq 0$, sotto cui l'abbiamo risolto; concludiamo che $\min_{\mathbb{S}^2} f = f(-\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = -M$ e $\max_{\mathbb{S}^2} f = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = M$.[2]

2.6. Chiaramente la disuguaglianza vale per qualsiasi scelta di $C_{\alpha\beta}$ se $xy = 0$. Per gli altri casi, consideriamo la funzione $g(x, y) := x^\alpha y^\beta / (x^{\alpha+\beta} + y^{\alpha+\beta})$, definita su $\Omega := [0, \infty) \times [0, +\infty) \setminus \{(0, 0)\}$; essa è rapporto tra funzioni omogenee dello stesso grado $\alpha + \beta$, dunque per ogni $(x, y) \in \Omega$, ponendo $\hat{x} = x/\sqrt{x^2 + y^2}$ e $\hat{y} = y/\sqrt{x^2 + y^2}$, osserviamo che $f(\hat{x}, \hat{y}) = f(x, y)$, con $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{S}^1 \cap \Omega$. Ciò dimostra che $g(\Omega) = g(\mathbb{S}^1 \cap \Omega)$, e poiché $\mathbb{S}^1 \cap \Omega$ è compatto esisterà $C_{\alpha\beta} := \max_{\mathbb{S}^1 \cap \Omega} g$ che realizza la disuguaglianza voluta.

Per costruzione tale costante è anche quella ottimale. Per trovarla quindi si può massimizzare g vincolata a $\mathbb{S}^1 \cap \Omega$; un modo più semplice è però il seguente. Sia $f(x, y) := x^\alpha y^\beta$ e, fissato $k \in \mathbb{R}_+$ arbitrario, sia $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^{\alpha+\beta} + y^{\alpha+\beta} = k,\ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$. Dimostrare la disuguaglianza voluta, data l'arbitrarietà di k, equivale quindi a mostrare che $\max_M f = C_{\alpha\beta} k$ per qualche costante $C_{\alpha\beta}$, che sarà anche quella ottimare per costruzione (per la definizione di massimo). Il teorema del moltiplicatori di Lagrange ci dà

$$\begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} y^\beta = \lambda(\alpha + \beta) x^{\alpha+\beta-1} \\ \beta x^\alpha y^{\beta-1} = \lambda(\alpha + \beta) y^{\alpha+\beta-1} \,. \end{cases}$$

Osserviamo che visto che se $xy = 0$ la ogni costante positiva rende vera l'uguaglianza, questo caso non ci dà informazioni su quale sia quella ottimale, quindi nel risolvere il sistema possiamo supporre che $xy \neq 0$. Adottiamo quindi la stessa strategia utilizzata per l'esercizio **2.12**. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \alpha f(x, y) = \lambda(\alpha + \beta) x^{\alpha+\beta} \\ \beta f(x, y) = \lambda(\alpha + \beta) y^{\alpha+\beta} \,, \end{cases}$$

e poiché $(x, y) \in M$ otteniamo $(\alpha + \beta) f(x, y) = \lambda(\alpha + \beta)(x^{\alpha+\beta} + y^{\alpha+\beta}) = \lambda(\alpha + \beta)$, da cui $\lambda = k^{-1} f(x, y)$; sostituendo il valore di λ nel sistema,

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha + \beta} k \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} =: \bar{x} \\ y = \left(\dfrac{\beta}{\alpha + \beta} k \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} =: \bar{y} \,. \end{cases}$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ è il punto di massimo cercato (non è punto di minimo perché sappiamo che è chiaro che $\min_M f = 0$), e abbiamo che $f(\bar{x}, \bar{y}) = \big((\alpha^\alpha \beta^\beta)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} / (\alpha + \beta) \big) k$, dunque la costante ottimale sarà $C_{\alpha\beta} = (\alpha^\alpha \beta^\beta)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} / (\alpha + \beta)$.

2.1. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ sono le lunghezze dei lati del triangolo. Dalla formula di Erone, la sua area sarà $\mathcal{A}(a, b, c) = \frac{1}{4}\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}$. Il problema consiste dunque nel determinare che il minimo della funzione perimetro $2p(a, b, c) := a + b + c$ vincolata a $M := \{(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+)^3 :\ \mathcal{A}(a, b, c)^2 = K^2\}$, per qualche $K > 0$ fissato, si ottiene quando $a = b = c$.

Iniziamo osservando quanto segue. M non è compatto (infatti non è limitato perché i punti $\big(2Kn, 1/n, \sqrt{4K^2n^2 + 1/n^2}\big)$ appartengono a M, per ogni $n \in \mathbb{N}$), tuttavia definendo il compatto $M_t := M \cap \{a, b, c, \leqslant t\}$, $t > 0$, notiamo che su $M \setminus M_t$ si ha $2p > t$. D'altronde il punto $\big(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{K}, \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{K}, \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{K}\big) \in M$ è tale che $2p\big(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{K}, \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{K}, \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{K}\big) = \frac{6}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{K}$, quindi se $t > \frac{6}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{K}$, si ha $\min_{M_t} 2p \leqslant 4\sqrt{3}K \leqslant \inf_{M_t \setminus M} 2p$; questo dimostra che esiste il minimo di $2p$ su M (ed esso coincide col minimo di $2p$ sul compatto M_t, con t sufficientemente grande).

[2] N.B. Se almeno uno tra m, n, p è invece nullo, la soluzione è analoga, seppur non identica. Faccio però notare che i valori massimo e minimo trovati per il caso $mnp \neq 0$ degenerano nei massimi e minimi che si trovano in tutti gli altri casi, con la convezione $0^0 = 1$ (cioè, ad esempio, se $m = 0$, $np \neq 0$, e n, p sono pari, allora $\min_{\mathbb{S}^2} f = 0$ e $\max_{\mathbb{S}^2} f = (n^{n/2} p^{p/2}) / (n + p)^{n\,+\,p/2}$, se $m = n = 0$ e p è dispari, allora $\min_{\mathbb{S}^2} f = -1 = -\max_{\mathbb{S}^2} f \ldots$).

Dal teorema dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 1 = \lambda a(b^2 + c^2 - a^2) \\ 1 = \lambda b(a^2 + c^2 - b^2) \\ 1 = \lambda c(a^2 + b^2 - c^2)\,, \end{cases}$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Osserviamo ora che $(b^2 + c^2 - a^2)^2 = -16\mathcal{A}(a, b, c)^2 + 4b^2c^2 = -16K^2 + 4b^2c^2$, e analogamente $(a^2 + c^2 - b^2) = -16K^2 + 4a^2c^2$, $\quad (a^2 + b^2 - c^2) = -16K^2 + 4a^2b^2$; quindi elevando al quadrato il sistema e notando che $\lambda \neq 0$, otteniamo che l'unica soluzione in M deve soddisfare $a = b = c$ (e dall'equazione di M troviamo $a = b = c = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{K}$). Visto che sappiamo che esiste $\min_M f$ (e che ogni estremante di f su M deve soddisfare al sistema del moltiplicatori di Lagrange), tale unico punto dovrà essere necessariamente il punto di minimo per f su M. Questo conclude la dimostrazione.

Settimana 3

3.1. Poiché $|\dot\gamma|^2 = \rho^2 + \dot\rho^2$, abbiamo che $L(\gamma) = \int_0^\infty \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2}\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}$. Per trovare la riparametrizzazione a lunghezza d'arco, procediamo come nella dimostrazione del Teorema 2.9 degli appunti del corso: l'inversa φ della mappa $\psi(t) := \int_0^t |\dot\gamma|\,\mathrm{d}\theta$ sarà tale che la curva $k := \gamma \circ \varphi\colon [0, \sqrt{2}) \to \mathbb{R}^2$ è parametrizzata a lunghezza d'arco (e ha lo stesso supporto di γ). In questo caso, $\psi(t) = \sqrt{2}(1 - e^{-t})$, dunque la sua inversa è $\varphi(s) = -\log(1 - s/\sqrt{2})$, e si avrà $k(s) = (e^{-\theta}\cos\theta, e^{-\theta}\sin\theta)|_{\theta=\varphi(s)}$.

3.3. Per verificare che γ è semplice osserviamo che $\gamma(s) = \gamma(t)$ se e solo se $t = s$; infatti tale uguaglianza equivale al sistema

$$\begin{cases} s^2 = t^2 \\ \frac{2}{3}s^3 - s^2 = \frac{2}{3}t^3 - t^2 \end{cases} \iff \begin{cases} s^2 = t^2 \\ s^3 = t^3 \end{cases} \iff s = t.$$

Invece, $\dot\gamma(t) = 2t(1, t - 1) \neq (0, 0)$ se e solo se $t \neq 0$, quindi γ non è regolare (solo) in 0. Per $t \neq 0$, il campo unitario tangente a γ è

$$T(t) := \frac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|} = \frac{t}{|t|}\frac{(1, t-1)}{\sqrt{2 - 2t + t^2}} = \operatorname{sgn} t\,\frac{(1, t-1)}{\sqrt{2 - 2t + t^2}}.$$

I suoi limiti destro e sinistro nell'origine sono $\lim_{t\to 0^\pm} T(t) = \pm\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$. Infine, per disegnare il supporto di γ, poniamo $(x, y) = (t^2, \frac{2}{3}t^3 - t^2)$, da cui

$$\begin{cases} \sqrt{x} = -t \\ y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x \\ t \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} \sqrt{x} = t \\ y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x \\ t \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Dunque $\operatorname{spt}\gamma$ sarà l'unione dei grafici delle due funzioni $y_-, y_+\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definite da $y_-(x) := -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x$, $y_+(x) := \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x$. In particolare, disegnando i due grafici osserviamo che $\operatorname{spt}\gamma$ ha una cuspide nell'origine, con retta tangente $y = -x$.

4.1. Ricordiamo che per definizione, se $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ e $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j\,\mathrm{d}x^j$, allora $\int_\gamma \omega = \int_I \sum_{j=1}^n (\omega_j \circ \gamma)\dot\gamma_j$. Quindi abbiamo:

(i) $\int_\gamma \omega = \int_{-1}^1 (2t^5 + t^3)\,\mathrm{d}t = 0$ perché l'integranda è dispari e l'insieme di integrazione è simmetrico rispetto all'origine;

(ii) $\int_\gamma \omega = \int_0^1 \big((t - t^3) + 2t(1 - t^3) + 3t^4\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t^4 - t^3 + 3t)\,\mathrm{d}t = \frac{29}{20}$;

(iii) ricordando che $\gamma(\theta) = (k\theta\cos\theta, k\theta\sin\theta)$ per definizione di equazione polare,

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{\pi/2} \Big(2k^3\theta^2\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \theta\sin\theta) + 2k^3\theta^2\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)(\sin\theta + \theta\cos\theta)\Big)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2k^3\int_0^{\pi/2} \theta^2(\sin\theta + \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\sqrt{2}k^3\int_0^{\pi/2} \theta^2\sin(\theta + \pi/4)\,\mathrm{d}\theta,$$

e integrando due volte per parti otteniamo

$$\int_\gamma \omega = 2\sqrt{2}k^3\left((2 - \theta^2)\cos(\theta + \pi/4) + 2\theta\sin(\theta + \pi/4)\right)\Big|_0^{\pi/2} = k^3\left(\frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 8\right).$$

4.2. Scriviamo $\omega = \omega_1(x,y)\mathrm{d}x + \omega_2(x,y)\mathrm{d}y$. Le condizioni di esistenza delle funzioni ω_i sono $x+y>0$ e $x+y\neq 0$, dunque $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x+y>0\}$. È poi immediato verificare che $\frac{\partial\omega_1}{\partial y} = 1/(x+y) - x/(x+y)^2 = \frac{\partial\omega_2}{\partial x}$, dunque ω è chiusa. Per mostrare se è esatta, cerchiamo se esiste un potenziale, ossia $f\in C^1(A)$ che tale che $\frac{\partial f}{\partial x} = \omega_1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \omega_2$. Integrando in y la seconda equazione, ricaviamo, in A, $f(x,y) = x\log(x+y)+c$, per qualche c costante in y (quindi $c = c(x)$); derivando in x una tale f e sostituendo nella prima equazione, otteniamo $c'(x) = 0$, da cui c costante anche in x (quindi $c\in\mathbb{R}$). Allora un potenziale di ω su A esiste ed è dato da (scegliendo ad esempio $c=0$) $f(x,y) = x\log(x+y)$, e conseguentemente ω è esatta in A.

Settimana 4

4.6. Scrivendo $\omega = g_{\alpha,\beta}\,\mathrm{d}x + g_{\gamma,\delta}\,\mathrm{d}y$, sappiamo che ω è chiusa se e solo se $\partial g_{\alpha,\beta}/\partial y = \partial g_{\gamma,\delta}/\partial x$, che è equivalente a $(\beta+\gamma)x^2 - (\beta+\gamma)y^2 + 2(\delta-\alpha)xy = 0$. Quindi ω è chiusa se e solo se $\beta = -\gamma$ e $\alpha = \delta$. In questo caso possiamo scrivere $\omega = \alpha\omega_1 + \gamma\omega_2$, dove $\omega_1 := \frac{1}{x^2+y^2}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)$ e $\omega_2 := \frac{1}{x^2+y^2}(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$. Chiaramente $f_1(x,y) := \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ è un potenziale di ω_1, che quindi è esatta, mentre è facile verificare che ω_2 non lo è; infatti, data la curva chiusa $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$, con $t\in[0,2\pi]$, si calcola che $\int_\gamma \omega_2 = 2\pi \neq 0$. Quindi $\int_\gamma \omega = \alpha\int_\gamma\omega_1 + \gamma\int_\gamma\omega_2 = 2\gamma\pi \neq 0$ se $\gamma\neq 0$; di conseguenza ω può essere esatta solo se $\gamma = 0$, e in tal caso $\omega = \alpha\omega_1$ è in effetti esatta (ammette αf_1 come potenziale).

4.5. Su A possiamo considerare la 1-forma $\tilde{\omega}_2 = \omega_2 + 0\cdot\mathrm{d}z$, con ω_2 come nella soluzione precedente. È facile verificare che, poiché ω_2 è chiusa su $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, allora $\tilde{\omega}_2$ è chiusa su A, ma, poiché ω_2 non è esatta su $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, allora $\tilde{\omega}_2$ non è esatta su A; infatti, basta considerare la curva chiusa data da $\tilde{\gamma}(t) := (\cos t, \sin t, 0)$, $t\in[0,2\pi]$, e osservare che, con la notazione dell'esercizio precedente, $\int_{\tilde{\gamma}}\tilde{\omega}_2 = \int_\gamma \omega_2 \neq 0$. Quindi concludiamo che A non può essere contraibile.

Osserviamo che B è radiale, cioè $x_0\in B \implies \partial B(0,|x_0|)\subset B$, in quanto la disuguaglianza definente B dipende solo dalla norma di $x\in\mathbb{R}^n$. Detto altrimenti, $x_0\in B$ se e solo se $\rho_0 := |x_0| \in \tilde{B}$, dove $\tilde{B} := \{\rho\in[0,+\infty) :\ \log(1+\rho)\geqslant \rho/2\}$. Disegnando le funzioni che compaiono nella disuguaglianza definente $\tilde{B}$ si vede che $\tilde{B} = [0,\alpha]$, per qualche $\alpha>0$; dunque $x_0\in B \iff |x_0|\leqslant\alpha$, cioè $B = \overline{B}(0,\alpha)$ è contraibile.

Riscrivendo C secondo le coordinate $(z,w) = (x+y, xy)$, osserviamo che $C = \{(z,w)\in\mathbb{R}^2 :\ z^2 - 2w \leqslant 1\}$ è l'epigrafo della funzione convessa $z\mapsto \frac{1}{2}(z^2-1)$, dunque è convesso, dunque è contraibile.

4.3. Se ω è esatta in $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, cioè se esiste $f\in C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ tale che $\omega = \mathrm{d}f$, allora $\int_\gamma\omega = f(\gamma(\pi/2)) - f(\gamma(0))$, dove $\gamma(\theta) = (e^\theta\cos\theta, e^\theta\sin\theta)$. Mostriamo dunque che un tale potenziale f esiste, ossia che il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,x \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,y \end{cases}$$

ha soluzione. Siccome $x/\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}$, possiamo integrare la prima equazione rispetto a x ottenendo $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \cos\sqrt{x^2+y^2} + c(y)$, e sostituendo nella seconda equazione abbiamo $c'(y) = 0$; quindi $c\in\mathbb{R}$ è costante e $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \cos\sqrt{x^2+y^2}$ è un potenziale di ω su $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

4.7. Siano $f,g\in C^1(A)$ due potenziali di ω su A (cioè tali che $\mathrm{d}f = \omega = \mathrm{d}g$). Per linearità del differenziale, $\mathrm{d}(f-g) = 0$, dunque la funzione $h := f-g$ ha differenziale nullo su A. Osserviamo che $\mathrm{d}h = 0$ come 1-forma se e solo se $\nabla h = 0$ come vettore di $\mathbb{R}^n$. Allora $h\in C^1(A)$ ha gradiente nullo su A, dunque è costante.[3]

3.4 (due suggerimenti). Per calcolare i limiti $\lim_{t\to1^\pm} T(t)$ è comodo usare lo sviluppo $\log t = 1 - t + o(1-t)$ per $t\to 1$. Per disegnare il supporto di γ si può porre $(x,y) = (\frac{t^3}{3} - t, \log^2 t)$, da cui in particolare $|\log t| = \sqrt{y}$; dunque la porzione di supporto corrispondente a $t\in(0,1]$ sarà il grafico della funzione $x_-(y) = \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_{t=e^{-\sqrt{y}}}$, mentre la porzione di supporto corrispondente a $t\in[1,\infty)$ sarà il grafico della funzione $x_+(y) = \left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_{t=e^{\sqrt{y}}}$.

[3] Il fatto che $\nabla h = 0$ su A aperto connesso implica che h è costante, è un risultato classico che generalizza quello unidimensionale: $h' = 0$ su un intervallo aperto implica h costante. Gli ingredienti per dimostrarlo sono essenzialmente due: la generalizzazione a più variabili del teorema del valor medio, e il fatto che un aperto connesso euclideo è connesso per archi.

Settimana 5

- Esercizio **1** dello scritto del 21/11/2022.
- Esercizio **2** dello scritto del 21/11/2022.
- Esercizio **2** dello scritto del 13/2/2023.

Settimana 6

5.10. Mostriamo che $K = \bigcap_{k\geqslant 0} K_k$, dove $K_k := \bigcup_{j=0}^{\frac{3^k-1}{2}} \left[\frac{2j}{3^k}, \frac{2j+1}{3^k}\right]$. A tal fine, basta provare che per ogni $N \geqslant 0$

$$\bigcap_{k=0}^{N} K_k = \left\{x \in [0,1] :\ x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{3^n} \text{ con } a_0 = 0,\ a_n \in \{0,2\}\ \forall\, n = 1,\dots,N\right\}.$$

Procediamo per induzione: se $N = 0$, allora $K_0 = [0,1]$ e ogni $x \in [0,1]$ si può scrivere come $x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{3^n}$ (basta osservare che al massimo $x = 1 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{3^n}$), quindi in base 3 con $a_0 = 0$. Supponiamo ora la tesi vera per N e mostriamola per $N+1$. Sia $x \in \bigcap_{k=0}^{N+1} K_k$. Per definizione di K_{N+1}, si ha che $x \in K_{N+1}$ se e solo se esiste $j \in \left\{0,\dots,\frac{3^{N+1}-1}{2}\right\}$ tale che $3^{N+1}x \in [2j, 2j+1]$; scrivendo $x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{3^n}$ in base 3, ciò è equivalente a dire che

$$3^{N+1}x = \underbrace{\sum_{m=1}^{N} a_{N+1-m}3^m}_{=:S} + a_{N+1} + \underbrace{\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+N+1}}{3^n}}_{=:s} \in [2j, 2j+1].$$

Per ipotesi induttiva $x \in \bigcap_{k=0}^{N} K_k$ se e solo se possiamo supporre che $a_n \in \{0,2\}$ per ogni $n = 1,\dots,N$, quindi S è pari. Ora, se $s \neq 0$, deduciamo che $S + a_{N+1} = 2j$, e quindi a_{N+1} è pari. Se invece $s = 0$ (cioè $a_{n+N+1} = 0$ per ogni $n \geqslant 1$), allora $S + a_{N+1} = 2j+1$, quindi $a_{N+1} = 1$ (perché deve essere dispari e compreso tra 0 e 2); in questo caso possiamo scrivere come nel passo base $a_{N+1} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{3^n}$, in modo che $3^{N+1}x = \sum_{m=1}^{N} a_{N+1-m}3^m + \sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{3^n}$, il che equivale a dire $x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\tilde{a}_n}{3^n}$ con

$$\tilde{a}_n := \begin{cases} a_n & \text{se } n = 1,\dots,N \\ 0 & \text{se } n = N+1 \\ 2 & \text{se } n > N+1. \end{cases}$$

Questo conclude la dimostrazione del passo induttivo.

A questo punto la dimostrazione delle varie proprietà di K è facile.

Ogni K_k è unione disgiunta di un numero finito di intervalli compatti, quindi è compatto; inoltre ogni intersezione finita $\bigcap_{k=0}^{N} K_k$ è non vuota. Quindi K è compatto e non vuoto.[4] Inoltre, $\operatorname{int} K = \emptyset$ perché K_k non contiene intervalli di lunghezza maggiore di 3^{-k}, e quindi per ogni $x \in K$ e ogni intervallo aperto $I \ni x$ esisterà $\bar{k}$ tale che U non può essere contenuto in $K_{\bar{k}}$ (basta scegliere $\bar{k} > -\log_3 \operatorname{diam} I$).

La mappa

$$K \ni \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{3^n} \longleftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n/2}{2^n} \in [0,1]$$

è una corrispondenza biunivoca tra K e $[0,1]$, quindi $\operatorname{Card} K = \operatorname{Card} \mathbb{R}$.

Infine, $\bigcap_{k=0}^{N} K_k$ è l'unione di 2^N intervalli chiusi disgiunti di lughezza 3^{-N},[5] quindi $\mathscr{L}^1\big(\bigcap_{k=0}^{N} K_k\big) = (2/3)^N$, da cui, sfruttando la monotonia della misura, $\mathscr{L}^1(K) = \mathscr{L}^1\big(\bigcap_{N\geqslant 0}\bigcap_{k=0}^{N} K_k\big) = \lim_{N\to\infty}(2/3)^N = 0$.

5.5. Fissiamo $s \geqslant 0$ e $\delta > 0$. Sia $\{E_k\}_k$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che compete per l'estremo inferiore nella definizione di $\mathscr{H}^s_\delta(A)$; cioè $A \subset \bigcup_k E_k$ e $\operatorname{diam} E_k \leqslant \delta$. Osserviamo che, dato $E \subset \mathbb{R}^n$ abbiamo che

$$\operatorname{diam} F(E) = \sup_{z,w\in F(E)} |z-w| = \sup_{x,y\in E} |F(x)-F(y)| \leqslant \operatorname{Lip}(F) \sup_{x,y\in E} |x-y| = \operatorname{Lip}(F) \operatorname{diam} E,$$

[4] Qui usiamo questo risultato classico di topologia: *uno spazio topologico è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*

[5] In classe l'abbiamo visto usando la costruzione più classica dell'insieme di Cantor come intersezione di compatti inscatolati tramite il processo di rimozione del "terzo medio" di un intervallo. Provate a dimostrarlo (per induzione) anche col formalismo di quest'altra costruzione, ossia usando la definizione dei K_k.

usando che F è lipschitziana con costante di Lipschitz $\mathrm{Lip}(F)$. Allora $F(E_k) \subset R^n$, $F(A) \subset \bigcup_k F(E_k)$, e $\operatorname{diam} F(E_k) \leqslant \mathrm{Lip}(F)\delta$; ossia la famiglia $\{F(E_k)\}_k$ compete per l'estremo inferiore nella definizione di $\mathscr{H}^s_{\mathrm{Lip}(F)\delta}(F(A))$. Segue che

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^s_{\mathrm{Lip}(F)\delta}(F(A)) &\leqslant \inf\left\{\omega_s \sum_k \left(\frac{\operatorname{diam} F(E_k)}{2}\right)^s : E_k \subset \mathbb{R}^n,\ A \subset \bigcup_k E_k,\ \operatorname{diam} E_k \leqslant \delta\right\} \\ &\leqslant \mathrm{Lip}(F)^s \inf\left\{\omega_s \sum_k \left(\frac{\operatorname{diam} E_k}{2}\right)^s : E_k \subset \mathbb{R}^n,\ A \subset \bigcup_k E_k,\ \operatorname{diam} E_k \leqslant \delta\right\} = \mathrm{Lip}(F)^s \mathscr{H}^s_\delta(A),\end{aligned}$$

e passando al limite per $\delta \to 0^+$ si ottiene la disuguaglianza desiderata.

Settimana 7

5.9. Esiste N di misura nulla tale che f è continua su $\mathbb{R}\setminus N$. Sia A aperto; allora $f^{-1}(A) = (f^{-1}(A)\cap(\mathbb{R}\setminus N))\cup(f^{-1}(A)\cap N)$. L'insieme $f^{-1}(A)\cap N$ è misurabile avendo misura nulla; per continuità di $f|_{\mathbb{R}\setminus N}$, l'insieme $f^{-1}(A)\cap(\mathbb{R}\setminus N)$ è aperto in $\mathbb{R}\setminus N$, ossia $f^{-1}(A)\cap(\mathbb{R}\setminus N) = U\cap(R\setminus N) = U\cap N^{\mathrm{c}}$ per qualche aperto U, quindi è misurabile perché intersezione di due insiemi misurabili. Concludiamo che $f^{-1}(A)$ è misurabile.

6.3. Per $x\in(s,r)$ si ha $A^x_{r,s} = \{(y,z)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 < r^2-x^2\}$, altrimenti $A^x_{r,s}=\emptyset$. Per il teorema di riduzione, $\mathscr{L}^3(A_{r,s}) = \int_s^r \mathscr{L}^2(A^x_{r,s})\,\mathrm{d}x = \int_s^r \pi(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x = \pi(r-s)\left(r^2-\frac{1}{3}(r^2+rs+s^2)\right)$.

6.4. Usando il teorema di Tonelli possiamo calcolare l'integrale come

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \log\left(1+\sqrt{1-x^2}\,\right)\mathrm{d}x \overset{x=\sin\theta}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\log\left(1+\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta \overset{\text{per parti}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi-2.$$

- Esercizio **2** dello scritto del 22/9/2022.

Settimana 8

6.6. Per il teorema di Tonelli, possiamo calcolare l'integrale come

$$\int_0^1\left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \arctan\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\bigg|_{x=0}^{\infty}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y \overset{y=\sinh t}{=} \frac{\pi}{2}\operatorname{settsinh} 1.$$[6]

Questo contemporaneamente prova che l'integrale converge e ne esibisce il valore. Osserviamo che in generale vale l'identità $\operatorname{settsinh}\alpha = \log\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\,\right)$, quindi in particolare $\operatorname{settsinh} 1 = \log\left(1+\sqrt{2}\,\right)$. Per dedurre il valore del secondo integrale, consideriamo che sempre per il teorema di Tonelli sappiamo anche che

$$\frac{\pi}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\,\right) = \int_0^\infty\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\sin t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

6.5. Per il teorema di Tonelli, possiamo calcolare l'integrale come

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^{1-z}\left(\int_0^{1-y-z} x(y+z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-z}(1-y-z)^2(y+z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \\ &\overset{y+z=w}{=} \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_z^1 \underbrace{(1-w)^2 w}_{=(w-1)^3+(w-1)^2}\,\mathrm{d}w\right)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{(z-1)^4}{4}+\frac{(z-1)^3}{3}\right)\mathrm{d}z = \frac{9}{40}.\end{aligned}$$

7.6.[7] Disegnando A vediamo che è strettamente contenuto nel primo quadrante del piano cartesiano, dunque $x\wedge y>0$ per ogni $(x,y)\in A$; possiamo dunque riscrivere $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{2}<xy<1,\ \frac{1}{3}<\frac{x^2}{y}<\frac{1}{2}\right\}$. Consideriamo quindi la mappa

[6] settsinh, che sta per *settore seno iperbolico*, è una notazione equivalente ad arcsinh, *arcoseno iperbolico*, per indicare la funzione inversa del seno iperbolico.

[7] N.B. C'è un refuso nel testo dell'esercizio: la definizione corretta di A è $A=\{\cdots\ y<3x^2\}$ anziché $A=\{\cdots\ y<3y^2\}$.

$\phi\colon A \to \mathbb{R}^2$ data da $\phi(x,y) := (xy, x^2/y)$, e poniamo $(u,v) = \phi(x,y)$; essa è una biezione liscia sulla sua immagine $\phi(A) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{2} < u < 1,\ \frac{1}{3} < v < \frac{1}{2}\}$, con inversa $\phi^{-1}(u,v) = \big((uv)^{\frac{1}{3}}, (u^2/v)^{\frac{1}{3}}\big)$, il cui jacobiano è $\det J\phi^{-1}(u,v) = -1/(3v)$. Per il teorema di cambio di variabili, e poi usando il teorema di Tonelli,

$$\int_A \frac{x^2}{y} e^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\phi(A)} ve^u \frac{1}{3v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^u\,\mathrm{d}u \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}v = \frac{e-\sqrt{e}}{18}.$$

Settimana 9

7.2. Consideriamo la trasfomazione $T(x,y) := (y,x)$ e osserviamo che A è invariante per T, mentre $f \circ T = -f$; allora, se $f \in L^1(A)$ dovrà necessariamente valere $\int_A f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.[8] Per verificare se f è integrabile, osserviamo che il cambio di variabili $(u,v) = L(x,y) := (x+y, x-y)$ trasforma A nell'insieme $L(A) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{2}(|u+v| + |u-v|) < 1\}$, dove abbiamo $\big(\frac{1}{2}(|u+v|+|u-v|)\big)^2 = \frac{1}{2}\big(u^2+v^2-|u^2-v^2|\big) = u^2 \vee v^2$, e quindi $L(A) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ |u| \vee |v| < 1\} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : |u| < 1,\ |v| < 1\}$. Inoltre, $(f \circ L^{-1})(u,v) = v\log(1+u)$, e lo jacobiano di L^{-1} vale $-\frac{1}{2}$. Per il teorema di cambio di variabili e il teorema di Tonelli,

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |v|\,\mathrm{d}v \int_{-1}^{1} |\log(1+u)|\,\mathrm{d}u,$$

che è dunque finito perché $\log(1+u)$ è integrabile in un intorno destro di $u=-1$ (unico punto singolare delle integrande sopra).

7.3. Osserviamo che la superficie $z = \sqrt{x^2+y^2} \wedge \sqrt{1-x^2-y^2}$ coincide con una semisfera se $x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{2}$, e con un $\boxed{\text{cono}}$ se $\frac{1}{2} \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$. È dunque facile disegnare A (saranno i punti con coordinata z positiva e al di sotto di tale superficie), e notare che, in coordinate sferiche, $A = \{(\rho,\theta,\varphi) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi] :\ \rho < 1,\ \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$. Passando quindi alle coordinate sferiche e usando il teorema di Tonelli,

$$\int_A (x^2+y^2+z^2)^\alpha\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^{2\alpha+2}\,\mathrm{d}\rho = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\pi}{2\alpha+3} & \text{se } \alpha > -\frac{3}{2} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Esercizio **2** dello scritto del 20/7/2022.

6.8 (soluzione con suggerimenti). Questo esercizio mostra con un controesempio che la condizione $f \in L^1(A)$ che permette di applicare il teorema di Fubini è solo una condizione sufficiente. Infatti, esibiamo una funzione f su un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ non sommabile su A ma tale che i suoi due integrali iterati convergono allo stesso valore. Tale funzione è $f(x,t) := e^{-tx^2}\sin t$, su $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Per il teorema di Tonelli,

$$\int_A |f|\,\mathrm{d}\mathscr{L}^2 = \int_0^\infty |\sin t| \int_0^\infty e^{-tx^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$$

dove abbiamo usato che $\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Per mostrare che l'ultimo integrale diverge,[9] osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$ per periodicità vale che $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = 2$, e che $1/\sqrt{t} \geqslant 1/\sqrt{(k+1)\pi}$ su $[k\pi, (k+1)\pi]$; dunque

$$\int_0^\infty \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k\geqslant 0} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{k}},$$

dove la serie diverge per noti criteri di (non) convergenza di serie. Questo dimostra che $f \notin L^1(A)$.

Il primo integrale iterato è

$$I_1 := \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \overset{t=u^2}{=} \sqrt{\pi}\int_0^\infty \sin u^2\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

---

[8] Per il teorema di cambio di variabili, $\int_A f = -\int_A f$, da cui $\int_A f = 0$.

[9] N.B. In classe l'ho motivato minorandolo con una serie di aree di triangoli; ciò è possibile, ma non immediato, in quanto non è vero che l'integranda è concava su ciascun intervallo "completo" $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{N}$ (occorre restringere un po' questi intervalli affinché sia vero). Propongo qui quindi un altro modo più facile.

L'integrale $\mathcal{I} := \int_0^\infty \sin u^2 \, du$ si può calcolare sfruttando il seguente suggerimento, ispirato alla tecnica per calcolare $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du$: definendo, per $\lambda \geqslant 0$, $\mathcal{I}_\lambda := \int_0^\infty e^{-\lambda u^2} \sin u^2 \, du$ e $\mathcal{J}_\lambda := \int_0^\infty e^{-\lambda u^2} \cos u^2 \, du$, osserviamo che per $\lambda > 0$ abbiamo

$$\mathcal{J}_\lambda^2 - \mathcal{I}_\lambda^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(u^2+v^2)} \cos u^2 \cos v^2 \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v - \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(u^2+v^2)} \sin u^2 \sin v^2 \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \rho \, e^{-\lambda\rho^2} \cos(\rho^2) \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4} \frac{\lambda}{1+\lambda^2},$$

e

$$\mathcal{J}_\lambda \mathcal{I}_\lambda = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(u^2+v^2)} \cos u^2 \sin v^2 \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \rho \, e^{-\lambda\rho^2} \sin(\rho^2) \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8} \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Il valore dei due integrali in $\mathrm{d}\rho$ si ricava integrando due volte per parti, e si ottiene quindi un sistema da cui è possibile ricavare $\mathcal{I}_\lambda$ e $\mathcal{J}_\lambda$, e poi (o prima) mandare $\lambda \to 0^+$ per ottenere il valore di $\mathcal{I} = \sqrt{\pi/8}$ (perché non può essere $\mathcal{I} = -\sqrt{\pi/8}$?).

Il secondo integrale iterato è

$$I_2 := \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathcal{I}(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \mathcal{I}(x) := \int_0^\infty f(x,t) \, \mathrm{d}t.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}_+$ fissato, integrando due volte per parti rispetto a t si ottiene $\mathcal{I}(x) = 1 - x^4 \mathcal{I}(x)$, ossia $\mathcal{I}(x) = 1/(1+x^4)$. A questo punto si può trovare con tecniche elementari una primitiva di $\mathcal{I}(x)$,

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \Big(\arctan(1 + \sqrt{2}\,x) - \arctan(1 - \sqrt{2}\,x) \Big),$$

dunque $I_2 = \int_0^\infty \mathcal{I}(x) \, \mathrm{d}x = \pi/(2\sqrt{2})$, e possiamo osservare che $I_1 = I_2$.

Settimana 10

8.2. La parametrizzazione φ di M è iniettiva non su tutto A ma su $A \setminus \{v = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$; però l'immagine dei due segmenti $A \cap \{v = \frac{\pi}{2}\}$ e $A \cap \{v = \frac{3\pi}{2}\}$ tramite φ sono i due punti $(0, \frac{\pi}{2}, 0)$ e $(0, \frac{3\pi}{2}, 0)$, rispettivamente, i quali hanno quindi misura $\mathscr{H}^2$ nulla. Possiamo quindi affermare che $\mathcal{A}(\varphi) = \mathscr{H}^2(M) = \mathcal{A}(M)$. Allora

$$\mathcal{A}(M) = \int_A |\varphi_u \wedge \varphi_v| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} |\cos v| \sqrt{1 + \sin^2 v} \, \mathrm{d}v \overset{(\star)}{=} 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \sqrt{1 + \sin^2 v} \, \mathrm{d}v \overset{\sin v = t}{=} 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + t^2} \, \mathrm{d}t$$

$$\overset{t = \sinh s}{=} 2 \int_{\log(\sqrt{2}-1)}^{\log(\sqrt{2}+1)} \cosh^2 s \, \mathrm{d}s = \int_{\log(\sqrt{2}-1)}^{\log(\sqrt{2}+1)} (1 + \cosh(2s)) \, \mathrm{d}s = \log(3 + 2\sqrt{2}\,) + 2\sqrt{2}.$$

Per il passaggio $(\star)$ si sfrutta che l'integranda al membro sinistro è π-periodica, mentre per l'ultimo passaggio si usa l'identità $\sinh(2\log(\sqrt{2} \pm 1)) = \pm 2\sqrt{2}$, che si può dimostrare a partire dalla definizione di sinh.[10] Abbiamo anche usato che $\operatorname{settsinh}(\pm 1) = \log(\sqrt{2} \pm 1)$, come dimostrato nella soluzione dell'esercizio **6.6**.

8.3. Supponiamo che φ sia una parametrizzazione di M, iniettiva[11] su $\operatorname{int} A = (0, 2\pi) \times (0,1)$ (stiamo trascurando un insieme con immagine tramite φ di misura $\mathscr{H}^2$ nulla, quindi ininfluente per il calcolo dell'area di M). Allora $\mathcal{A}(M) = \mathcal{A}(\varphi)$, e si calcola facilmente $|\varphi_u \wedge \varphi_v| = f(v)\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2}$, da cui la tesi.

Su questa formula osserviamo due fatti: dalla dimostrazione si nota anche che se f, g sono definite su $[a, b]$ anziché $[0, 1]$, allora possiamo sostituire gli estremi di integrazione nella formula con a, b; in generale φ parametrizza la superficie ottenuta da una rotazione attorno all'asse z della curva nel piano $\{x = 0\}$ (o analogamente $\{y = 0\}$) parametrizzata da $\gamma(v) := (0, f(v), g(v))$.[12]

[10] In generale, si può dimostrare che $\sinh(2 \operatorname{settsinh}(\alpha)) = 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 1}$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

[11] Se φ non è iniettiva, la formula calcola $\mathcal{A}(\varphi)$, che a priori maggiore o uguale a $\mathcal{A}(M)$. Se ad esempio $f \equiv 1$ e $g = |x - \frac{1}{2}|$, φ parametrizza un cilindro di raggio 1 e altezza $\frac{1}{2}$ "contato due volte", quindi $\mathcal{A}(\varphi) = 2\mathcal{A}(M) > \mathcal{A}(M)$.

[12] Un altro fatto interessante che si può notare è il seguente: supponiamo che $\gamma(v) = (f(v), g(v))$, $v \in [0, L]$ sia una parametrizzazione iniettiva a lunghezza d'arco di una curva piana Γ (quindi $L = \mathscr{H}^1(\Gamma)$); allora $\sqrt{f'(v)^2 + g'(v)^2} = |\dot\gamma(v)| = 1$, e dunque dalla formula dimostrata deduciamo che l'area della superficie di rotazione M ottenuta ruotando Γ (immersa nel piano $\{x = 0\}$) attorno all'asse z è $\mathscr{H}^2(M) = 2\pi \int_0^L f(v) \, \mathrm{d}v = 2\pi R \, \mathscr{H}^1(\Gamma)$, dove R è il valor medio di f su $[0, \mathscr{H}^1(\Gamma)]$...

Il toro dell'esercizio **1.6** è ottenuto da una rotazione attorno all'asse z della circonferenza $\{x = 0,\ (y - R)^2 + z^2 = r^2\}$ che si può parametrizzare in coordinate polari (traslate) come $(0, R + r\cos v, r\sin v)$, con $v \in [0, 2\pi]$; quindi possiamo applicare la formula appena dimostrata con $f(v) = R + r\cos v$ e $g(v) = r\sin v$. Otteniamo $\mathcal{A}(M) = 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r\cos v)\,\mathrm{d}v = 4\pi^2 Rr$.

8.4. M è ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z del ramo di iperbole $\{x = 0,\ y = \sqrt{1+z^2},\ -1 < z < 1\}$. Una parametrizzazione iniettiva di tale curva è data semplicemente da $\gamma(v) = (0, \sqrt{1+v^2}, v)$, con $v \in (-1, 1)$. Quindi usando la formula dimostrata nell'esercizio precedente, con $f(v) = \sqrt{1+v^2}$ e $g(v) = v$ otteniamo

$$\mathcal{A}(M) = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+2v^2}\,\mathrm{d}v = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+2v^2}\,\mathrm{d}v \overset{2v=\sinh t}{=} 2\pi \int_0^{\operatorname{settsinh} 2} \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \pi\big(\log(\sqrt{5}+2) + 4\sqrt{5}\,\big).$$

Settimana 11

9.6. Dato che Q ha frontiera liscia a tratti, possiamo applicare il teorema di Gauss–Green, ottenendo

$$\int_\gamma \frac{x}{1+y}\,\mathrm{d}x - \big(\sin y + x^2 y\big)\,\mathrm{d}y = \int_Q \left(-2xy + \frac{x}{(1+y)^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{4},$$

dove il secondo integrale si calcola facilmente usando il teorema di Tonelli.

9.2. Consideriamo il campo vettoriale liscio su $\mathbb{R}^2$ dato da $F := \frac{1}{2}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.[13] Poiché $\operatorname{div} F \equiv 1$ su $\mathbb{R}^2$, dal teorema della divergenza segue che $\mathscr{L}^2(A) = \int_A \mathrm{d}\mathscr{L}^2 = \int_A \operatorname{div} F\,\mathrm{d}\mathscr{L}^2 = \int_{\partial A} \langle F, N\rangle\,\mathrm{d}\mathscr{H}^1$. Dato che la curva $\gamma(\theta) := (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$ parametrizza in senso antiorario la frontiera di A, il campo N normale a ∂A e uscente sarà ortogonale al campo T tangente a ∂A e tale che $\det(\,N \mid T \mid N \wedge T\,) > 0$.[14] Quindi, poiché $T = \dot\gamma/|\dot\gamma| = (\dot\gamma_1, \dot\gamma_2)/|\dot\gamma|$, abbiamo $N = (\dot\gamma_2, -\dot\gamma_1)/|\dot\gamma|$, e

$$\int_{\partial A} \langle F, N\rangle\,\mathrm{d}\mathscr{H}^1 = \frac{1}{2}\int_{\partial A} (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\dot\gamma_2 - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\dot\gamma_1)\,\frac{\mathrm{d}\mathscr{H}^1}{|\dot\gamma|} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\gamma_1\dot\gamma_2 - \gamma_2\dot\gamma_1)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1,$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla formula dell'area (o, equivalentemente, dalla formula di integrazione su curve). Sostituendo ora le espressioni di γ e $\dot\gamma$ otteniamo dalla catena di uguaglianze sopra $\mathscr{L}^2(A) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1$, come si voleva.

9.3 (un suggerimento). Dalla soluzione dell'esercizio precedente si deduce che, per qualsiasi parametrizzazione γ di ∂A "sufficientemente buona" vale la formula

$$\mathscr{L}^2(A) = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} (\gamma_1\dot\gamma_2 - \gamma_2\dot\gamma_1)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^1\right|,$$

dove il valore assoluto è presente perché non stiamo specificando l'orientazione della parametrizzazione.

9.9. Generalizziamo il problema in dimensione generica n, in modo tale che risolvendolo avremo una soluzione sia di questo esercizio, sia dell'esercizio **3.11**. Dato un aperto limitato $A \subset \mathbb{R}^n$ con "frontiera regolare", e due funzioni convesse $f, F \in C^2(\bar{A})$ tali che $f \leqslant F$ in A e $f = F$ su ∂A, vogliamo mostrare che $\mathscr{H}^n(\mathrm{gr}(F)) \leqslant \mathscr{H}^n(\mathrm{gr}(f))$.

Osserviamo che, data una funzione $G\colon \bar{A} \to \mathbb{R}$ sufficientemente regolare, abbiamo $\mathscr{H}^n(\mathrm{gr}(G)) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla G|^2}\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n$, ossia $\mathscr{H}^n(\mathrm{gr}(G)) = \int_A \varphi(\nabla G)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n$, con $\varphi(x) := \sqrt{1 + |x|^2}$.

Tale funzione φ è a sua volta convessa (su $\mathbb{R}^n$). Per verificarlo, serve mostrare che la sua hessiana è semidefinita positiva in ogni punto, i.e. $\mathcal{H}\varphi \geqslant 0$ su $\mathbb{R}^n$. Per calcolarla, osserviamo che φ è radiale, ossia esiste $\phi\colon [0 + \infty) \to \mathbb{R}$ (in questo caso

[13] La scelta di questo campo vettoriale non è "magica", ma come discusso in classe è addirittura essenzialmente obbligata. Riassumo qui perché, con la notazione di questa soluzione. Volendo usare il teorema della divergenza, occorre un campo con divergenza costante 1 almeno su A; posto che si abbia un tal campo F, formalmente la tesi può essere vera per ogni equazione polare ρ solo se $\dot\rho$ non appare nell'espressione $\langle F, N\rangle$; calcolando $\dot\gamma$, osserviamo che per questo serve che $F(\gamma(\theta)) \perp (-\sin\theta, \cos\theta)$, quindi $F(\gamma(\theta)) = \lambda(\cos\theta, \sin\theta)$ per qualche $\lambda = \lambda(\theta) \in \mathbb{R}$; sostituendo questa forma per $F \circ \gamma$, si vede che la tesi è vera solo se $\lambda = \frac{1}{2}\rho$. Concludiamo quindi che serve un campo tale che $\operatorname{div} F \equiv 1$ su A e $F \circ \gamma = \frac{1}{2}\gamma$; il più semplice (l'unico?) campo $F \in C^1(\bar{A}; \mathbb{R}^2)$ che soddisfa queste condizioni sufficienti è proprio $F = \frac{1}{2}\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

[14] Questa è una formalizzazione della *regola della mano destra*.

$\phi(t) := \sqrt{1+t^2}$) tale che $\varphi(x) = \phi(|x|)$; per una funzione radiale è facile dimostrare usando la regola della catena che, per $x \neq 0$, si ha $\nabla\varphi(x) = \phi'(|x|)\frac{x}{|x|}$ e

$$\mathcal{H}\varphi(x) = \frac{\phi'(|x|)}{|x|}\, I + \left(\phi''(|x|) - \frac{\phi'(|x|)}{|x|}\right)\frac{x \otimes x}{|x|^2}\,,$$

dove I è la matrice identità $n \times n$ e $x \otimes x$ è il prodotto tensoriale di x con se stesso, definito da $(x \otimes x)y = \langle x, y\rangle x$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$.[15]. Osserviamo che, con la notazione $P_x := \frac{x\otimes x}{|x|^2}$, $P_{x^\perp} := I - P_x$, possiamo riscrivere

$$\mathcal{H}\varphi(x) = \frac{\phi'(|x|)}{|x|} P_{x^\perp} + \phi''(|x|)P_x,$$

dove P_x è la proiezione sulla retta di x e $P_{x^\perp}$ è la proiezione sull'iperpiano ortogonale a x. Si vede allora che per ogni $y \perp x$ abbiamo $\mathcal{H}\varphi(x)y = \frac{\phi'(|x|)}{|x|}\, y$, e per ogni $y \parallel x$ abbiamo $\mathcal{H}\varphi(x)y = \phi''(|x|)y$; dunque gli autovalori di $\mathcal{H}\varphi(x)$ saranno $\frac{\phi'(|x|)}{|x|}$, con molteplicità $n-1$, e $\phi''(|x|)$, con molteplicità 1. Sostituendo l'espressione delle derivate di ϕ nel nostro caso vediamo che

$$\frac{\phi'(|x|)}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}, \qquad \phi''(|x|) = \frac{1}{(1+|x|^2)^{3/2}},$$

dunque $\mathcal{H}\varphi > 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e la formula trovata per ϕ generica in questo caso si estende (perché $\frac{\phi'(|x|)}{|x|}$ non è singolare nell'origine) nell'origine in modo tale che $\mathcal{H}\varphi > 0$ su $\mathbb{R}^n$. Questo conclude la dimostrazione della (stretta) convessità di φ.

Ora, poiché φ è convessa, un qualsiasi iperpiano tangente al suo grafico giace al di sotto del grafico stesso, ossia

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(y) + \langle\nabla\varphi(y), x - y\rangle \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$ [16]

Valutando questa espressione per $x = \nabla f$ e $y = \nabla F$ e integrando su A abbiamo

$$\mathscr{H}^n(\mathrm{gr}(f)) \geqslant \mathscr{H}^n(\mathrm{gr}(F)) + \int_A \langle\nabla\varphi(\nabla F), \nabla f - \nabla F\rangle \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n,$$

quindi la tesi è verificata se mostriamo che l'ultimo integrale è non negativo. Dalla formula di integrazione per parti in più variabili otteniamo[17]

$$\int_A \langle\nabla\varphi(\nabla F), \nabla f - \nabla F\rangle \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n = \int_{\partial A} \langle\nabla\varphi(\nabla F), \nu\rangle(f - F)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} + \int_A \mathrm{tr}(\mathcal{H}\varphi(\nabla F)\,\mathcal{H}F)(F - f)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n,$$

dove ν è il versore normale uscente dalla frontiera di A. Il primo integrale al membro destro è nullo perché $f - F = 0$ su ∂A, il secondo è non negativo perché $F - f \geqslant 0$ in A e $\mathrm{tr}(\mathcal{H}\varphi(\nabla F)\,\mathcal{H}F) \geqslant 0$ in A in quanto in ogni punto è traccia del prodotto di due matrici simmetriche semidefinite positive.[18]

Settimana 12

7.8. Sia f l'integranda, $I_\alpha := \int_A f\,\mathrm{d}\mathscr{L}^2$ l'integrale da calcolare, con $A = A_\alpha$. Osserviamo che, per ogni $\beta \in [1, \infty)$, il cambio di variabili $\varphi(x, y) = (x^{1/\beta}, y^{1/\beta})$ fornisce l'identità $I_\alpha = \int_{\tilde{A}} f\,\mathrm{d}\mathscr{L}^2$, dove $\tilde{A} = A_{\alpha\beta} \setminus A_\beta$. Dunque, $I_\alpha = I_{\alpha\beta} - I_\beta$. Inoltre $\alpha \mapsto I_\alpha$ è monotona; infatti, se $\alpha \leqslant \alpha'$, allora $A_\alpha \subseteq A_{\alpha'}$, e dunque il fatto che $f \geqslant 0$ implica che $I_\alpha \leqslant I'_\alpha$. Una funzione

---

[15] Quindi la matrice $\frac{x\otimes x}{|x|^2}$ è la matrice di proiezione sulla retta $\mathbb{R}x$.

[16] Visto che φ è strettamente convessa, possiamo dire che vale l'uguaglianza se e solo se $x = y$. Dai passi successivi si ottiene quindi una tesi più forte: $\mathscr{H}^n(\mathrm{gr}(F)) \leqslant \mathscr{H}^n(\mathrm{gr}(f))$, con uguaglianza se e solo se $f = F$ in A.

[17] Infatti, $\langle\nabla\varphi(\nabla F), \nabla f - \nabla F\rangle = \sum_{j=1}^n \partial_j\varphi(\nabla F)(\partial_j f - \partial_j F)$, e integrando per parti

$$\int_A \partial_j\varphi(\nabla F)(\partial_j f - \partial_j F)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n = \int_{\partial A} \partial_j\varphi(\nabla F)\nu_j(f - F)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^n - \int_A \partial_j(\partial_j\varphi(\nabla F))\,(f - F)\,\mathrm{d}\mathscr{L}^n,$$

dove per la regola della catena $\partial_j(\partial_j\varphi(\nabla F)) = \langle\nabla\partial_j\varphi(\nabla F), \partial_j\nabla F\rangle = \sum_{k=1}^n \partial^2_{kj}\varphi(\nabla F)\partial^2_{jk}F$. Sommando su j si riconosce che si può scrivere il tutto in maniera compatta come proposto.

[18] Questo fatto di algebra lineare si può dimostrare come segue. Come prima cosa non è vero che il prodotto di matrici simmetriche semidefinite positive A, B rimane semidefinito positivo (provate a costruirne due il cui prodotto abbia un autovalore negativo), quindi non possiamo usare direttamente che $A \geqslant 0 \implies \mathrm{tr}\, A \geqslant 0$. Sia però $\{u_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormale di autovettori di B, e siano λ_i, $i = 1, \ldots, n$, i rispettivi autovalori; allora $\langle ABu_i, u_i\rangle = \lambda_i\langle Au_i, u_i\rangle \geqslant 0$ perché $A, B \geqslant 0$. Sommando su i otteniamo $\mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$; infatti, se U è la matrice dei vettori colonna u_i, allora U è ortogonale e dunque $\sum_{i=1}^n\langle ABu_i, u_i\rangle = \mathrm{tr}(U^{\mathrm{t}}ABU) = \mathrm{tr}(ABUU^{\mathrm{t}}) = \mathrm{tr}(AB)$.

monotona tale che $I_\alpha + I_\beta = I_{\alpha\beta}$ deve essere della forma $I_\alpha = c\log\alpha$, per qualche $c \in \mathbb{R}$.[19] Per determinare c procediamo come segue. Per il teorema di Tonelli

$$I_\alpha = \int_0^1 \int_{1-x}^{(1-x^\alpha)^{1/\alpha}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x\log x} \arctan \frac{\log y}{\log x}\bigg|_{y=1-x}^{(1-x^\alpha)^{1/\alpha}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x\log x}\left(\arctan\frac{\log(1-x^\alpha)}{\alpha\log x} - \arctan\frac{\log(1-x)}{\log x}\right)\mathrm{d}x;$$

ossia, chiamando $g(\alpha,x)$ l'ultima integranda, abbiamo $c\log\alpha = \int_0^1 g(\alpha,x)\,\mathrm{d}x$. Derivando ora in $\alpha = 1$, si ha $c = \frac{\partial}{\partial\alpha}\big|_1 I_\alpha = \frac{\partial}{\partial\alpha}\big|_1 \int_0^1 g(\alpha,x)\,\mathrm{d}x \overset{\star}{=} \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial\alpha}(1,x)\,\mathrm{d}x$, dove l'uguaglianza $\star$ è delicata da dimostrare. Non è difficile a questo punto accorgersi che $\frac{\partial g}{\partial\alpha}(1,x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan\frac{\log(1-x)}{\log x}$, dunque $c = \frac{\pi}{2}$.

8.4. L'iperboloide M è ottenuto dalla rotazione attorno all'asse z della curva $\{x = 0,\ y^2 - z^2 = 1,\ -1 < z < 1\}$, la quale si può parametrizzare tramite $\gamma(v) = (0, \sqrt{1+v^2}, v)$, con $v \in (-1,1)$. Dalla formula dimostrata nell'esercizio **8.3** segue che $\mathcal{A}(M) = 2\pi\int_{-1}^1 \sqrt{1+2v^2}\,\mathrm{d}v$, dove l'integrale si può calcolare partendo dal cambio di variabile $\sqrt{2}\,v = \sinh t$.

6.2. Il cono A su B è definito come l'unione dei segmenti che congiungono il vertice $v = (0,0,h)$ ai punti di B, ossia $A = \{p \in \mathbb{R}^3 :\ p = (1-\lambda)\hat{q} + \lambda v,\ \hat{q} \in \hat{B},\ \lambda \in [0,1]\}$, dove $\hat{B} = B \times \{0\}$. Mostriamo che la sezione $A^z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x,y,z) \in A\}$ è $A^z = \left(1 - \frac{z}{h}\right) B$. Poiché $\hat{q} \in \hat{B}$, abbiamo $\hat{q} = (q,0)$ con $q \in B$; allora i punti di A sono quelli della forma $((1-\lambda)q, \lambda h)$, e sono a loro volta della forma (x,y,z) se $\lambda h = z$ e $(1-\lambda)q = (x,y)$; cioè i punti di A^z sono quelli della forma $(1 - z/h)q$, con $q \in B$. Dalle proprietà della misura di Lebesgue, $\mathscr{L}^2(A^z) = (1-z/h)^2\mathscr{L}^2(B)$, e dal teorema di riduzione segue la tesi.

5.8. Sia $A_k(t) := f^{-1}(\{t\}) \cap [-k,k]$, $k \in \mathbb{N}$; chiaramente $A_k(t) \cap A_k(t') = \emptyset$ se $t \neq t'$. Posto $P_k := \{t \in \mathbb{R} :\ \mathscr{L}^1(A_k(t)) > 0\}$, abbiamo $P = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} P_k$; infatti l'inclusione $\supset$ è banale, e se esistesse $t \in P$ tale che $\mathscr{L}^1(A_k(t)) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, allora per monotonia della misura di Lebesgue $\mathscr{L}^1(f^{-1}(\{t\})) = 0$, contraddicendo che $t \in P$. È sufficiente dunque mostrare che $\operatorname{Card} P_k \leqslant \aleph_0$. Supponiamo per assurdo che P_k sia più che numerabile; allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathscr{L}^1(A_k(t)) > \frac{1}{n}$ per infiniti $t \in P_k$; infatti, se così non fosse, per ogni $n \in \mathbb{N}$ avremmo $P_{k,n} := \{t \in P_k :\ \mathscr{L}^1(A_k(t)) > \frac{1}{n}\}$ finito per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque $P_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_{k,n}$ al più numerabile. Allora $\bigcup_{t\in P_{k,n}} A_k(t)$ avrebbe misura infinita, contraddicendo che $\bigcup_{t\in P} A_k(t) \subset [-k,k]$.

[19] Questo deriva da risultati sulla cosiddetta *equazione funzionale di Cauchy*.