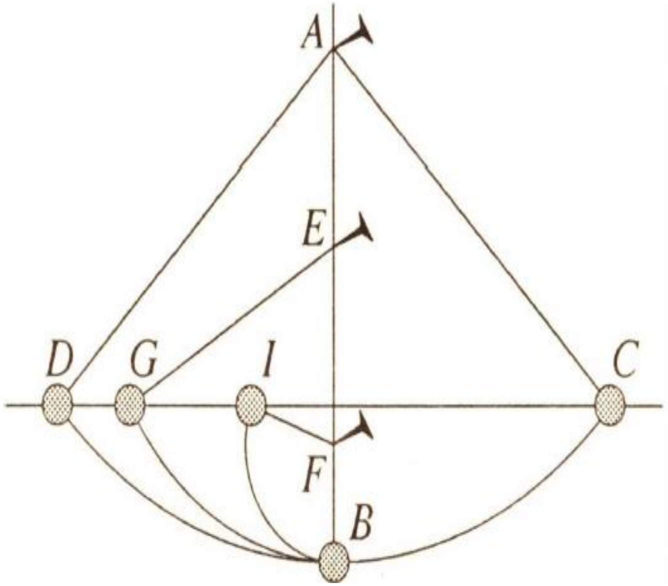
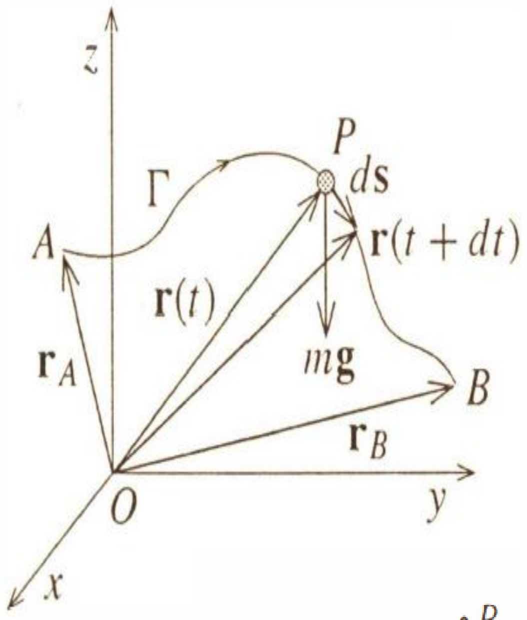
La conservazione dell'energia meccanica: un esperimento di Galileo

Galileo fu il primo a stabilire sperimentalmente che la velocità acquistata da un corpo che scende sotto l'azione del peso dipende solo dal dislivello tra il punto di partenza e quello d'arrivo e non dalla distanza totale percorsa. Nei Discorsi Galileo dimostra che le velocità acquistate da corpi che scendano da diversi piani inclinati con la stessa elevazione e diverse inclinazioni sono uguali. "Rimossi tutti i contrasti ed impedimenti … una palla grave e perfettamente rotonda, scendendo per le linee CA, CD, CB giungerebbe ne i termini A, D, B con impeti uguali" (con riferimento alla figura 2.11.1, riprodotta dai *Discorsi*).



La conservazione dell'energia meccanica: il lavoro della forza peso.



Il lavoro elementare per la (2.10.2) è $dW = m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$, cioè il prodotto della forza per la proiezione dello spostamento $d\mathbf{s}$ su di essa. In questo caso ci conviene pensare al prodotto interno in questo modo perché la forza ha direzione costante. Questa direzione è la verticale verso il basso, quindi la proiezione dello spostamento non è altro che $-dz$, cioè la diminuzione di quota del punto. Quindi $dW = -mg\,dz$. Il lavoro relativo al percorso completo si ha integrando, come prescritto dalla (2.10.3)

$$W_{AB:\Gamma} = \int_{A:\Gamma}^{B} m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{A:\Gamma}^{B} mg\,dz = mgz_A - mgz_B$$

Il risultato di questo integrale non dipende dal cammino ma solo dagli estremi A e B.

Se, per esempio, consideriamo una forza costante parallela allo spostamento ma con verso opposto

$$W_{AB:\Gamma} = \int_{A:\Gamma}^{B} \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{s} = -\int_{A:\Gamma}^{B} F_a\,ds = -F_a s_{AB}(\Gamma)$$

ci rendiamo conto di come la proprietà che il lavoro fatto da una forza dipenda solo dal punto finale e dal punto iniziale sia specifica di forze particolari.

La conservazione dell'energia meccanica: le forze conservative.

Una forza per cui il lavoro dipenda solo dall'origine e dal termine della traiettoria si dice conservativa
Dimostriamo che per una forza conservativa esiste una funzione scalare delle sole coordinate spaziali U(x, y, z) tale che:

$$U_p(\mathbf{r}_B) - U_p(\mathbf{r}_A) = -W_{AB} = -\int_{A:\Gamma}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$$

Per una forza conservativa

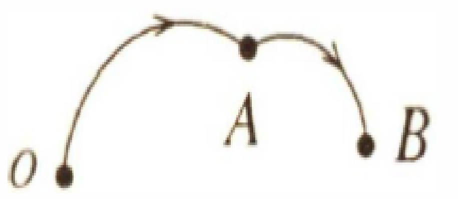
$$W_{AB:\Gamma} = \int_{A:\Gamma}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B)$$

Dove f è una funzione generica di (x_A, y_A, z_A) e di (x_B, y_B, z_B)

$$W_{OA} = f(\mathbf{r}_O, \mathbf{r}_A)$$

$$W_{OB} = f(\mathbf{r}_O, \mathbf{r}_B)$$

Se scelgo questo cammino particolare



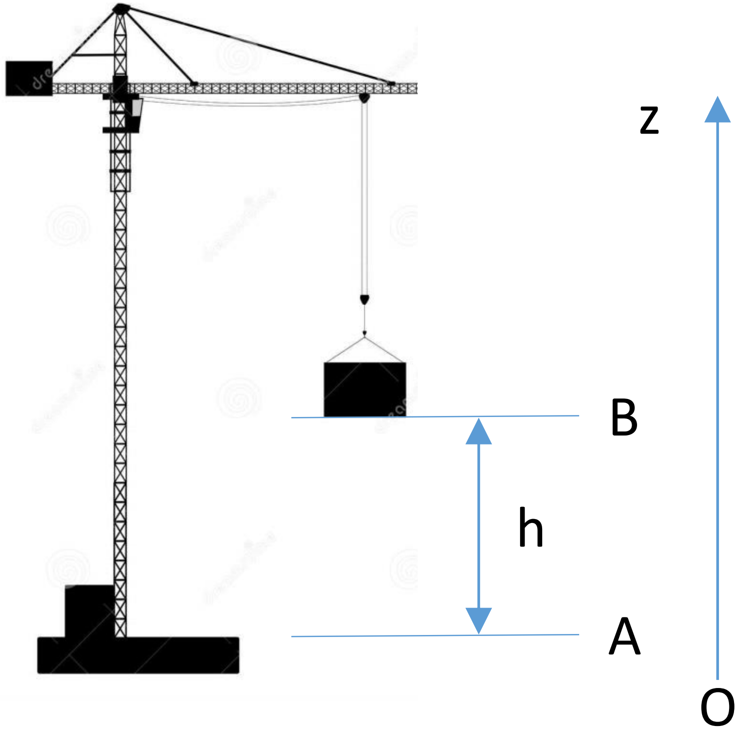
$$W_{OA} + W_{AB} = f(\mathbf{r}_O, \mathbf{r}_B)$$

$$W_{AB} = f(\mathbf{r}_O, \mathbf{r}_B) - f(\mathbf{r}_O, \mathbf{r}_A)$$

Otteniamo così il risultato cercato ponendo $U_p(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}_O, \mathbf{r})$.

La conservazione dell’energia meccanica: le forze conservative.

La funzione U(x, y, z) si chiama energia potenziale della forza.



Segno meno nella definizione: la differenza di energia potenziale fra due punti B ed A è il lavoro contro la forza che noi dobbiamo fare per portare il corpo da un punto A ad un punto B.

Lavoro della forza peso = $-m \cdot g \cdot h$

Lavoro della gru = $m \cdot g \cdot h$

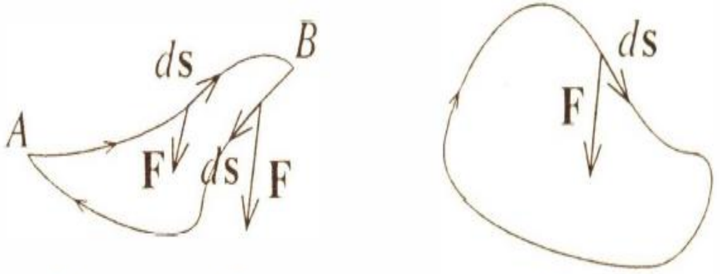
U(B)-U(A) = $m \cdot g \cdot h$

Si noti che abbiamo definito solo le *differenze* di energia potenziale. L’energia potenziale risulta quindi definita a meno di una costante additiva. Se pongo pari a zero l’energia potenziale della forza peso nell’origine ottengo:

$$U_p(z) = mgz$$

La conservazione dell'energia meccanica: le forze conservative.

Abbiamo detto che, per definizione, una forza **F** è conservativa, se e solo se il suo lavoro su di un percorso che colleghi la posizione A con la B dipende solo dall'origine e dal termine e non dal particolare percorso. Ci sono altri due modi equivalenti per stabilire se una forza è conservativa, che son spesso utili (figura 2.13.2).



$W_{BA} = -W_{AB}$ $\qquad$ $W = 0$

FIGURA 2.13.2

(1) Se una forza è conservativa il lavoro per andare da A a B lungo un percorso qualunque è uguale e contrario a quello fatto per andare da B ad A lungo un percorso qualunque. Questo segue immediatamente dalla (2.13.6).

$$U_p(\mathbf{r}_B) - U_p(\mathbf{r}_A) = -W_{AB} = -\int_{A:\Gamma}^{B} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \tag{2.13.6}$$

La conservazione dell'energia meccanica: le forze conservative.

(2) Se una forza è conservativa, il lavoro su di un qualsiasi percorso chiuso è nullo.

Riassumendo, le proprietà (tra loro equivalenti) di una forza conservativa sono:

(1) il suo lavoro non dipende dal percorso;

(2) ammette energia potenziale;

(3) il lavoro all'andata è opposto al lavoro al ritorno;

(4) il lavoro su di un percorso chiuso è nullo.

La conservazione dell'energia meccanica.

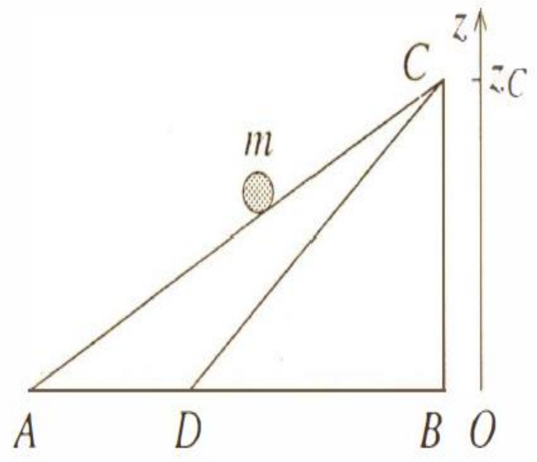
$$W_{AB;\Gamma} = U_k(B) - U_k(A)$$ Teorema dell'energia cinetica

$$W_{AB;\Gamma} = U_p(A) - U_p(B)$$ Proprietà delle forze conservative

$$U_k(B) + U_p(B) = U_k(A) + U_p(A)$$

La somma dell'energia cinetica più l'energia potenziale in un punto è una costante del moto. Essa è la stessa per tutti i punti di una traiettoria.

Esempio: la forza peso



$$mgz_C = \frac{1}{2}mv_A^2$$