Soluzione Esercizio 1

(a): Le due varietà sono sghembe.

Dei sistemi di equazioni cartesiane sono

$$\mathbb{L} = \begin{cases} x_1 + 2(x_2 - 1) = 0 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

e

$$\mathbb{M} = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 - 1 = 0. \end{cases}$$

Per il procedimento e i passaggi guardare il video del tutorato.

(b): Vi propongo una soluzione di questo punto in un caso che è completamente generale. Ovvero si considerino due varietà lineari $\mathbb{L} = L + V_{\mathbb{L}}$ e $\mathbb{M} = M + V_{\mathbb{M}}$ in $\mathbb{A}^n(K)$. Cerco i punti P tali che esista una retta per P parallela a una delle due varietà e incidente con l'altra.

Si ha che

$$\begin{aligned}
\exists r \text{ retta per } P \quad & \text{incidente a } \mathbb{L} \text{ e parallela a } \mathbb{M} \\
& \Leftrightarrow \exists v \in K^n : P + \langle v \rangle \text{ è una retta parallela a } \mathbb{L} \text{ e incidente a } \mathbb{M} \\
& \Leftrightarrow \exists v \in V_{\mathbb{L}} : (P + \langle v \rangle) \cap \mathbb{M} \neq \varnothing \\
& \Leftrightarrow \exists v \in V_{\mathbb{L}},\ \exists M' \in \mathbb{M} : P \in M' + \langle v \rangle \\
& \Leftrightarrow \exists v \in V_{\mathbb{L}}, \exists w \in V_{\mathbb{M}} \text{ (in particolare } w = M' - M) \text{ tali che } P = M + v + w \\
& \Leftrightarrow P \in M + \big(V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}\big)
\end{aligned}$$

Nota: se qualcuna delle doppie implicazioni non vi convincesse così su due piedi, dimostrate i due versi dell'implicazione separatamente

Similmente si mostra il caso simmetrico (cioè per quali punti si ha una retta parallela a $\mathbb{M}$ e incidente con $\mathbb{L}$). I passaggi sono esattamente gli stessi, solo scambiando tutte le "L" con delle "M" e viceversa. Si arriva a dimostrare che una retta con le proprietà richieste esiste se e solo se $P \in L + \big(V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}\big)$.

Nota: Se qualcuno di voi ha parametrizzato i punti di una varietà e i vettori ammissibili come direzione per poi descrivere i punti cercati come quelli che si trovano con qualche opportuno parametro di quelli introdotti, allora ha fatto bene. Di fatto ha scritto la stessa dimostrazione che ho fatto qua sopra, solo che nel caso specifico di questo esercizio.

(c): Usando la descrizione dell'insieme di punti P fatta qui sopra e il fatto che le due varietà considerate sono per ipotesi sghembe, si deduce che ci sono $2q^{\dim(V_{\mathbb{L}}+V_{\mathbb{M}})} = 2q^3$ punti ammissibili.

Per contare le rette parallele a $\mathbb{L}$ e incidenti a $\mathbb{M}$ si:

- Moltiplica il numero di punti ammissibili (q^3) per il numero di vettori direzione possibile ($q^{\dim(\mathbb{L})} = q^1$)
- Conta quante volte, in questo modo, si è contata ogni retta. Ogni retta $P + \langle v \rangle$ si conta una volta per ogni punto base che le si mette (ce ne sono q) e una volta per ogni vettore direzione che è parallelo a v (ce ne sono q).

Si conclude che il numero totale di rette in questo caso è $\frac{q^4}{q^2} = q^2$.

Nell'altro caso il ragionamento è lo stesso ma cambiano gli esponenti. Si trova che il numero di rette in quel caso è $\frac{q^5}{q^2} = q^3$.