



Corso di Laurea in Chimica Industriale
Chimica Fisica II

Lezione 2

**Richiami sul campo dei numeri complessi
e sulla rappresentazione analitica dei segnali periodici**

A.A. 2022-2023

Marco Ruzzi



Dipartimento di Scienze Chimiche
Università degli Studi di Padova
Via Marzolo 1 35129 Padova
E-mail: marco.ruzzi@unipd.it

Richiami sul campo dei numeri complessi [1]

Sommario

Richiami sul campo dei numeri complessi \mathbb{C} :

- rappresentazione in forma algebrica;
- rappresentazione in forma trigonometrica;
- rappresentazione in forma esponenziale.

Richiami sulla rappresentazione analitica dei segnali periodici:

- funzioni circolari;
- serie di Fourier.

Richiami sul campo dei numeri complessi [2]

Il campo \mathbb{C}

Il *campo dei numeri complessi* \mathbb{C} è storicamente introdotto nell'ambito della teoria delle equazioni algebriche. Successivamente si rivela fondamentale nell'ambito della rappresentazione di funzioni di variabili reali.

Un numero complesso, espresso in *forma algebrica* si scrive: $z = a + ib$
con: $a = \operatorname{Re}(z)$ e $b = \operatorname{Im}(z)$ numeri reali ($a, b \in \mathbb{R}$).

Il simbolo i indica l'unità immaginaria e per definizione vale $i^2 = -1$.

L'insieme dei numeri complessi formano un campo:

se $z = (a + ib)$, $w = (c + id) \in \mathbb{C}$

valgono:

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \quad \text{con: } a + c, b + d \text{ numeri reali;}$$

$$z w = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \quad \text{con: } ac - bd, ad + bc \text{ numeri reali;}$$

con:

elemento neutro rispetto alla somma: $z = 0 + i0$

elemento neutro rispetto alla moltiplicazione: $z = 1 + i0$

elemento inverso rispetto alla somma: $z = -a - ib$

elemento inverso rispetto alla moltiplicazione: $(a + ib)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$

Richiami sul campo dei numeri complessi [3]

Il sottocampo di numeri complessi della forma $(a, 0)$, cioè: $\{ z \text{ t.c. } \text{Im}(z) = 0 \}$, è isomorfo al campo reale \mathbb{R} .

Un'operazione importante su \mathbb{C} è l'operazione di *coniugazione*.

z^* è complesso coniugato di z se valgono:

$$\text{Re}\{z^*\} = \text{Re}\{z\}$$

$$\text{Im}\{z^*\} = -\text{Im}\{z\}.$$

$z^* = a - ib$ è complesso coniugato di $z = a + ib$.

Valgono:

$$(z + w)^* = z^* + w^*$$

$$(z w)^* = z^* w^*$$

$$(z / w)^* = z^* / w^* .$$

Inoltre la somma e il prodotto di numeri complessi coniugati (z e z^*) sono sempre numeri reali:

$$z + z^* = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2 \text{Re}\{z\}$$

$$z z^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab + b^2 = a^2 + b^2$$

Il coniugato di z è indicato spesso anche con la notazione \bar{z} .

Richiami sul campo dei numeri complessi [4]

Il piano di Gauss

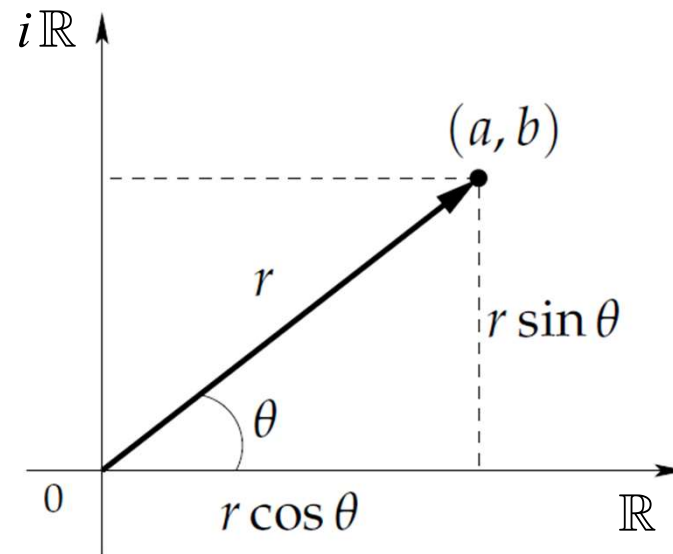
Analogia:

i numeri reali trovano rappresentazione geometrica nei punti della retta reale;
i numeri complessi trovano rappresentazione nei punti del piano di Gauss.

Valgono :

$$\operatorname{Re}\{z\} = a = r \cos \theta$$

$$\operatorname{Im}\{z\} = b = r \sin \theta$$



da cui si ricava la *forma trigonometrica* di z :

$$z = a + ib = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

con:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\operatorname{Re}\{z\})^2 + (\operatorname{Im}\{z\})^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}}\right)$$

detti rispettivamente modulo e argomento del numero complesso.

Richiami sul campo dei numeri complessi [5]

A partire dalla forma trigonometrica:

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

applicando la relazione di Eulero:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

si trova la *forma polare* di z :

$$z = r e^{i\theta}$$

con modulo e argomento:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\operatorname{Re}\{z\})^2 + (\operatorname{Im}\{z\})^2}$$

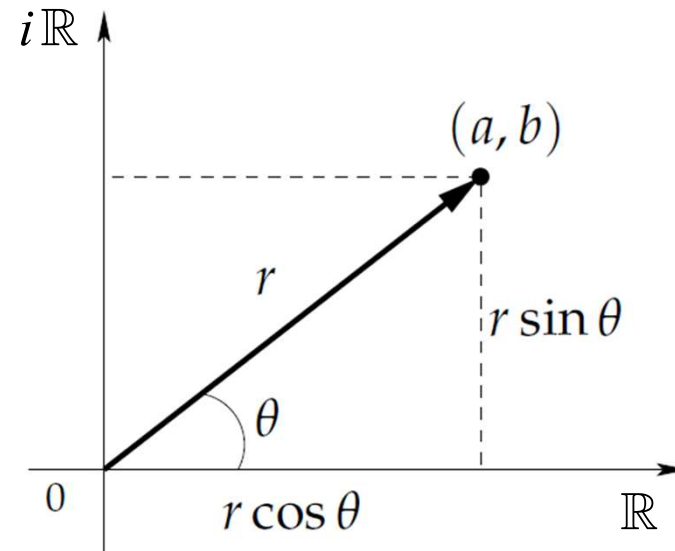
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}}\right)$$

Dati: $z = r_1 e^{i\theta}$, $w = r_2 e^{i\phi}$

valgono:

$$u = z w = r_1 r_2 e^{i(\theta+\phi)} = r e^{i\varphi}$$

con: $r = r_1 r_2$ e $\varphi = \theta + \phi$.



$$u = z / w = (r_1 / r_2) e^{i(\theta - \phi)} = r e^{i\varphi}$$

con: $r = r_1 / r_2$ e $\varphi = \theta - \phi$.

Richiami sul campo dei numeri complessi [5]

A partire dalla forma trigonometrica:

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

applicando la relazione di Eulero:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

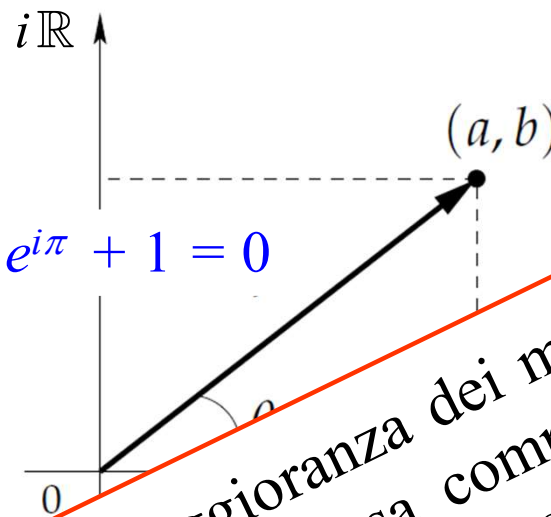
si trova la *forma polare* di z :

$$z = r e^{i\theta}$$

con modulo e argomento:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\operatorname{Re}\{z\})^2 + (\operatorname{Im}\{z\})^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}}\right)$$



Dati:

$u = z/w = r e^{i\varphi}$

con: $r = r_1/r_2$ e $\varphi = \theta - \phi$.

$$u = z/w = (r_1/r_2) e^{i(\theta - \phi)} = r e^{i\varphi}$$

con: $r = r_1/r_2$ e $\varphi = \theta - \phi$.

L'**identità di Eulero** è definita dalla stragrande maggioranza dei matematici la più bella formula matematica di tutti i tempi. In essa compaiono due numeri irrazionali trascendenti fondamentali, l'identità immaginaria e gli elementi neutri delle due operazioni definite sul campo dei reali.

Richiami sul campo dei numeri complessi [6]

La *potenza n-esima* di $z = r e^{i\theta}$ è il numero $w = \rho e^{i\varphi}$ tale che valga $w = z^n$.

La potenza n -esima può essere calcolata a partire dall'equazione :

$$w = z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

ossia:

$$w = \rho e^{i\varphi} \text{ con modulo } \rho = r^n \text{ e argomento } \varphi = n\theta .$$

La *radice n-esima* di $z = r e^{i\theta}$ è il numero $w = \rho e^{i\varphi}$ tale che valga $w^n = z$.

La radice n -esima può essere calcolata a partire dall'equazione:

$$w^n = \rho^n e^{in\varphi} = r e^{i\theta}$$

ossia:

$$\rho^n = r$$

$$n\varphi = \theta + k2\pi \quad \text{con } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

da cui:

$$\rho = r^{1/n}$$

$$\varphi = \theta/n + k2\pi/n \quad \text{con } k = 0, \dots, n-1.$$

Si noti che le radici ottenute ponendo $k = n, n+1, \dots$ coincidono con le radici ottenute ponendo $k = 0, 1, 2, \dots$. L'equazione $w = z^n$ ammette dunque al più n radici.

Segnali periodici e loro rappresentazione analitica [1]

Le funzioni circolari

Considerando le due equazioni:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$$

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta)$$

la seconda delle quali è derivata dalla prima usando:

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$$

è immediato ricavare le note *relazioni di Eulero*:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \operatorname{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

E' stato dimostrato che le funzioni seno e coseno possono essere rappresentate come combinazioni lineari a coefficienti complessi di funzioni esponenziali complesse...

In tal caso combinazioni lineari a coefficienti reali di funzioni seno e coseno trovano tramite le relazioni di Eulero una rappresentazione sul campo complesso...

Segnali periodici e loro rappresentazione analitica [2]

La rappresentazione di una combinazione lineare di funzioni seno e coseno, con a e b reali non nulli, risulta:

$$\begin{aligned} a \cos(\theta) + b \operatorname{sen}(\theta) &= a \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} + b \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= (a - ib) \frac{e^{i\theta}}{2} + (a + ib) \frac{e^{-i\theta}}{2} \\ &= \rho e^{i\varphi} \frac{e^{i\theta}}{2} + \rho e^{-i\varphi} \frac{e^{-i\theta}}{2} \\ &= \rho \left(\frac{e^{i(\theta+\varphi)}}{2} + \frac{e^{-i(\theta+\varphi)}}{2} \right) \\ &= \rho \cos(\theta + \varphi) \end{aligned}$$

$$\text{con: } \rho = |a - ib| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

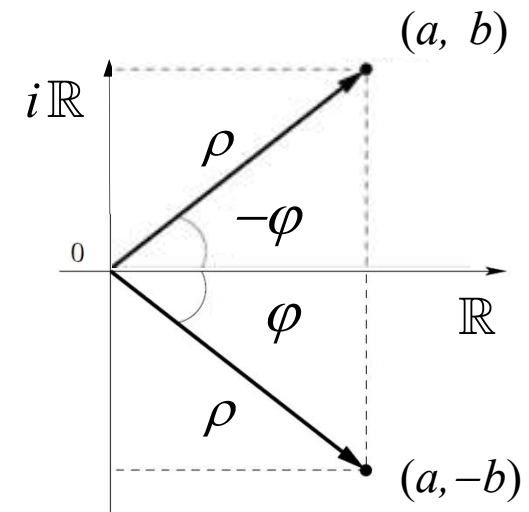
$$\varphi = \arg(a - ib)$$

$$-\varphi = \arg(a + ib)$$

Ossia nella rappresentazione : $a \cos(\theta) + b \operatorname{sen}(\theta) = \rho \cos(\theta + \varphi)$

ρ e θ sono, rispettivamente, il modulo e l'argomento del numero complesso $z = a - ib$, con a e b coefficienti della combinazione lineare iniziale.

$a, b \in \mathbb{R}$



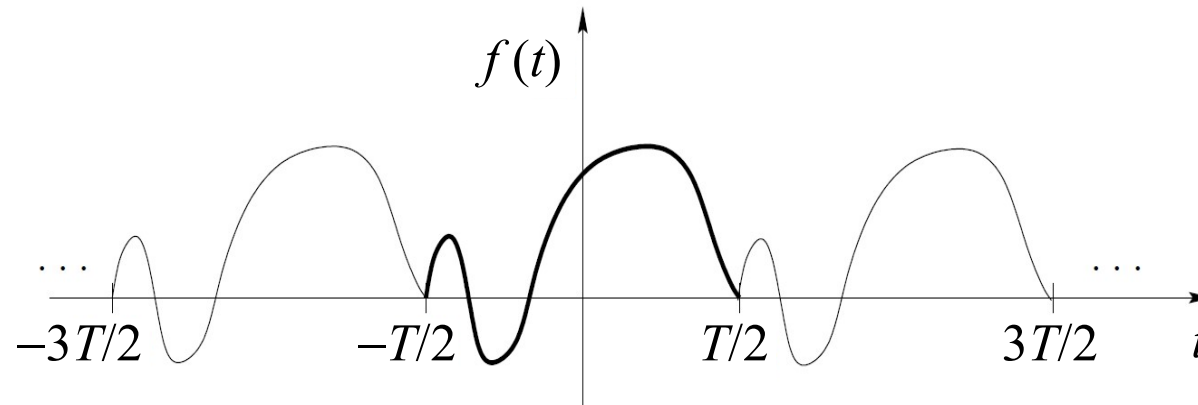
Segnali periodici e loro rappresentazione analitica [3]

Segnali periodici nel tempo

Un segnale è periodico nel tempo se è rappresentato da una funzione $f(t)$ periodica ossia se esiste un periodo T (con $T > 0$) tale che valga:

$$f(t) = f(t + T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Un funzione $f(t)$ periodica di periodo T risulta individuata univocamente dalla sua restrizione su $-T/2 \leq t \leq T/2$.



Segnali periodici $f(t)$ con periodo T ($T > 0$) possono essere sviluppati in **serie di Fourier** ossia rappresentati tramite opportune combinazioni lineari di un numero sufficientemente grande di termini del tipo: $\text{sen}(n\omega t)$ e $\text{cos}(n\omega t)$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ e $\omega = 2\pi/T$. Per lo sviluppo in serie di Fourier vale:

$$f(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t) \right]$$

con a_n e b_n parametri determinabili a partire dalla funzione $f(t)$ analitica.

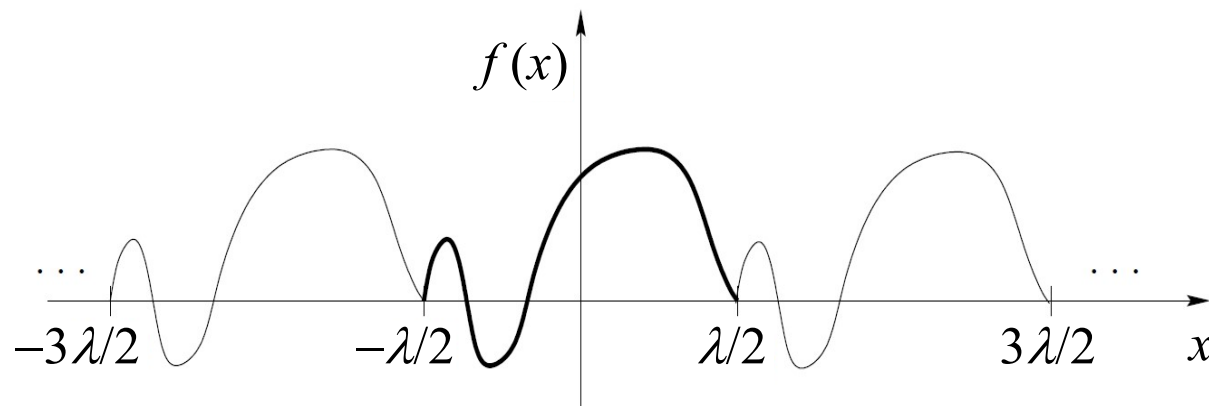
Segnali periodici e loro rappresentazione analitica [4]

Segnali periodici nello spazio

Un segnale è periodico nello spazio se è rappresentato da una funzione $f(x)$ periodica ossia se esiste una lunghezza d'onda λ (con $\lambda > 0$) tale che valga:

$$f(x) = f(x + \lambda) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Un funzione $f(x)$ periodica di lunghezza d'onda λ risulta individuata univocamente dalla sua restrizione su $-\lambda/2 \leq x \leq \lambda/2$.



Segnali periodici $f(x)$ con periodo λ ($\lambda > 0$) possono essere sviluppati in **serie di Fourier** ossia rappresentati tramite opportune combinazioni lineari di un numero sufficientemente grande di termini del tipo: $\text{sen}(nkx)$ e $\text{cos}(nkx)$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ e $k = 2\pi/\lambda$. Per lo sviluppo in serie di Fourier vale:

$$f(x) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nkx) + b_n \text{sen}(nkx) \right]$$

con a_n e b_n parametri determinabili a partire dalla funzione $f(x)$ analitica.

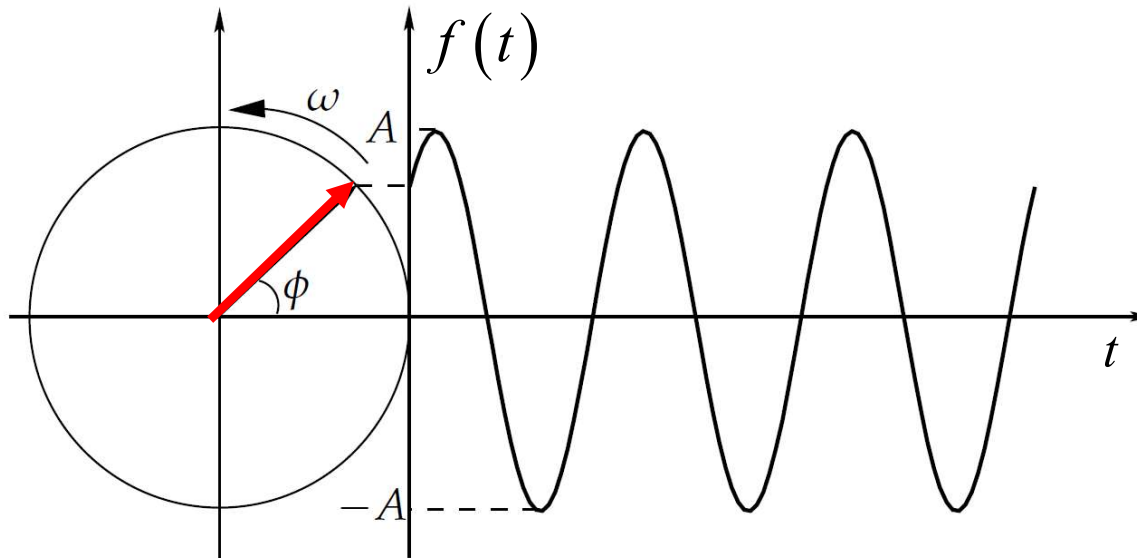
Segnali periodici e loro rappresentazione analitica [5]

Segnali sinusoidali ed esponenziali complessi

Un *segnale sinusoidale nel tempo* si ottiene per dilatazione/compressione e/o traslazione di una funzione seno con un angolo del tipo $(\omega t + \phi)$:

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad -\infty < t < +\infty$$

Il segnale sinusoidale può essere rappresentato geometricamente sul piano cartesiano (t, f) come la proiezione sull'asse verticale del vettore di modulo A rotante in senso antiorario con velocità angolare ω e con fase iniziale ϕ .



Un *segnale cosinusoidale* è rappresentato dalla proiezione sull'asse orizzontale dello stesso vettore rotante:

$$f(t) = A \operatorname{cos}(\omega t + \phi) \quad -\infty < t < +\infty$$

Segnali sinusoidali e cosinusoidali hanno uno sfasamento reciproco pari a $\pi/2$.

Segnali periodici e loro rappresentazione analitica [6]

Un segnale *esponenziale complesso*, detto anche *fasore*, è un segnale della forma:

$$f(t) = C e^{i\omega t} \quad -\infty < t < +\infty \quad C \in \mathbb{C}$$

Il fasore non ha senso fisico: è un segnale che assume valori complessi e non trova rappresentazione in funzione del tempo sul diagramma cartesiano (t, f) .

Il fasore (tuttavia) è esprimibile come combinazione di segnali reali cosinusoidali e sinusoidali. Valgono:

$$C e^{i\omega t} = A e^{i\phi} e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \phi)} = A \cos(\omega t + \phi) + i A \sin(\omega t + \phi)$$

$$C^* e^{-i\omega t} = A e^{-i\phi} e^{-i\omega t} = A e^{-i(\omega t + \phi)} = A \cos(\omega t + \phi) - i A \sin(\omega t + \phi)$$

Viceversa, *più importante*, valgono:

$$A \cos(\omega t + \phi) = \frac{A}{2} \left(e^{i(\omega t + \phi)} + e^{-i(\omega t + \phi)} \right) = \frac{1}{2} C e^{i\omega t} + \frac{1}{2} C^* e^{-i\omega t}$$

$$A \sin(\omega t + \phi) = \frac{A}{2i} \left(e^{i(\omega t + \phi)} - e^{-i(\omega t + \phi)} \right) = \frac{1}{2i} C e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} C^* e^{-i\omega t}$$

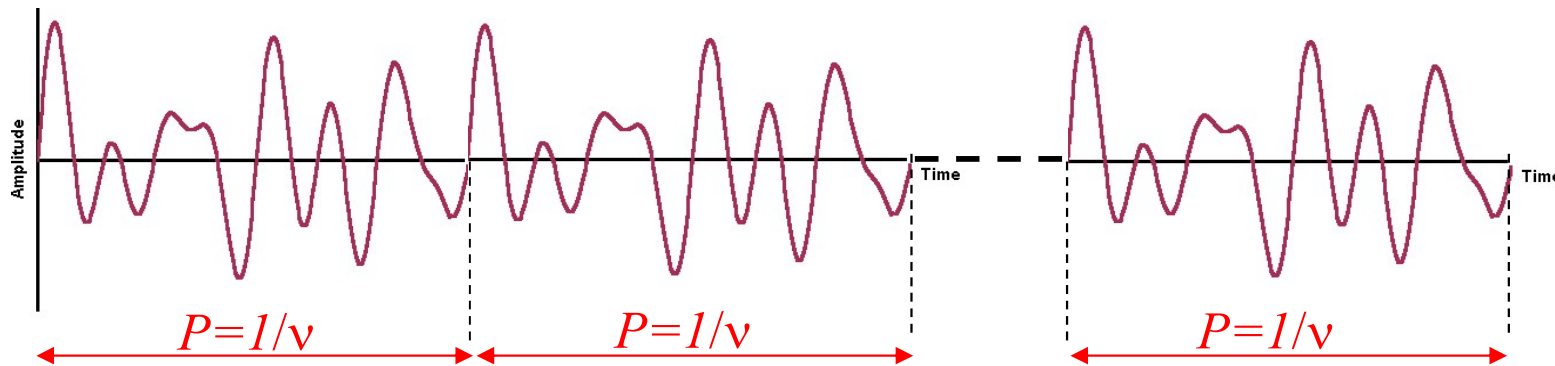
Le funzioni cosinusoidali e sinusoidali reali sono esprimibili come combinazioni lineari di due esponenziali complessi coniugati (fasori) aventi ugual modulo e velocità angolari $\pm\omega$ opposte.

Segnali periodici e loro rappresentazione analitica [7]

Sviluppo in serie di Fourier di funzioni periodiche nel tempo

La teoria dello sviluppo in serie di Fourier tratta essenzialmente di come un segnale periodico, sotto opportune condizioni di regolarità, possa essere rappresentato tramite combinazione lineare di segnali esponenziali complessi.

Sia $f(t)$ una Funzione periodica di periodo P :



Vale:

$$f(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t)]$$

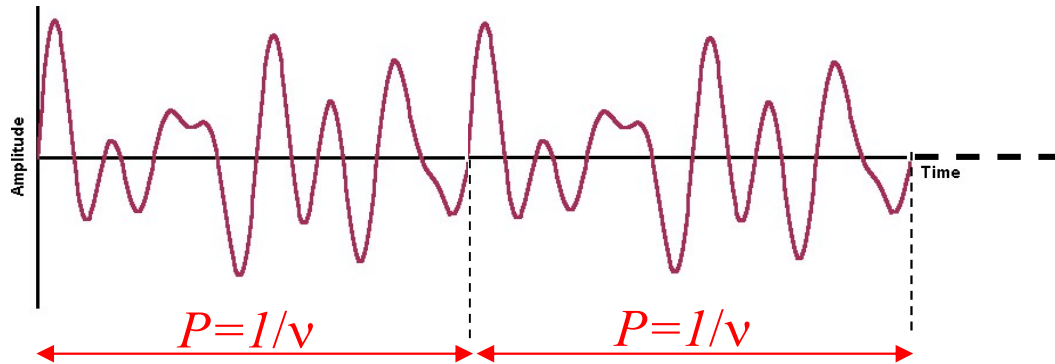
con a_n e b_n parametri determinabili a partire dalla funzione $f(t)$ analitica.

L'analisi di Fourier di una funzione $f(t)$ periodica fornisce dunque il contributo spettrale per ricostruire la funzione su un dominio discreto di frequenze $\omega_n = n \omega$ con n grande quanto necessario per riprodurre correttamente la funzione $f(t)$.

Serie di Fourier [1]

L'analisi di Fourier di segnali periodici costituisce il primo passo verso la teoria della Trasformata di Fourier per l'analisi spettrale di segnali non periodici...

$f(t)$ periodica



Analisi di Fourier
(dominio discreto delle v_n)



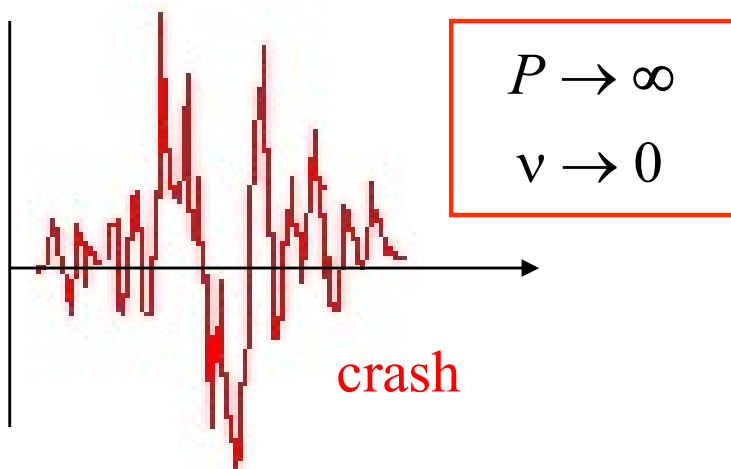
$$P \rightarrow \infty$$
$$v \rightarrow 0$$



Teoria
delle Trasformate di Fourier
(dominio continuo delle v)



$f(t)$ non periodica



Serie di Fourier [2]

Sia $f(t)$ un segnale T - periodico che soddisfi le seguenti condizioni di Diriclet:

1. $f(t)$ deve avere al più un numero finito di discontinuità nel periodo;
2. $f(t)$ deve avere al più un numero finito di massimi e minimi nel periodo;
3. $f(t)$ deve risultare assolutamente integrabile, ossia deve soddisfare:

$$\int_T |f(t)| dt < +\infty$$

e siano :

$$e^{in\omega_0 t} = e^{in(2\pi/T)t} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

funzioni periodiche esponenziali caratterizzate da frequenze angolari $\omega_n = n\omega$.

In tal caso $f(t)$ può essere sviluppato in serie di Fourier ed espresso come la sovrapposizione di n (con al limite n infinito) armoniche di frequenza ω_n .

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

con coefficienti:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

Serie di Fourier [3]

Sotto le ipotesi viste, vale lo sviluppo in serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

con coefficienti:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

I termini corrispondenti a $n = \pm k$, entrambi con frequenza angolare $\omega_k = k\omega$, costituiscono le *armoniche di ordine k*.

Osservazione 1

Il coefficiente c_0 è la media temporale del segnale $f(t)$ calcolata sul periodo T :

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt$$



Osservazione 2

Se $f(t)$ è una funzione reale, il coefficiente generale c_n è complesso ed è uguale al coniugato di c_{-n} , vale cioè la relazione:

$$c_n = c_{-n}^*$$



Serie di Fourier [4]

Se $f(t)$ è reale, a partire da:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

riarrangiando la somma e sostituendo c_{-n} con \bar{c}_n si ottiene:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t} \right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{in\omega t} + \bar{c}_n e^{-in\omega t} \right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{in\omega t} + \overline{c_n e^{in\omega t}} \right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ c_n e^{in\omega t} \right\} \end{aligned}$$

Esprimendo c_n in forma polare $c_n = r_n e^{i\theta_n}$ si ottiene:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ r_n e^{i(n\omega t + \theta_n)} \right\} = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n\omega t + \theta_n)$$

che costituisce la *forma trigonometrica combinata della serie di Fourier*.

Serie di Fourier [5]

Sviluppando la somma nell'espressione trovata:

$$f(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(n\omega t + \theta_n)$$

e riscrivendo i coefficienti nella forma algebrica:

$$c_n = a_n - ib_n, \quad (a_n \text{ e } b_n \text{ non nulli e reali})$$

$$\begin{aligned} \text{con: } a_n &= r_n \cos \theta_n \\ b_n &= -r_n \sin \theta_n \end{aligned}$$

si ottiene la *forma trigonometrica della serie di Fourier* :

$$f(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)]$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \text{sen}(n\omega t) dt$$

che coincide con la formulazione originale data da Fourier.

Serie di Fourier [6]

Dalle espressioni trovate per la forma trigonometrica:

$$f(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega t)]$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega t) dt$$

è immediato verificare che:

nel caso $f(t)$ sia dispari risulta $a_n = 0$ e la serie è costituita da soli seni:

$$f(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \operatorname{sen}(n\omega t)]$$

nel caso $f(t)$ sia pari risulta $b_n = 0$ e la serie è costituita da soli coseni:

$$f(t) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t)]$$