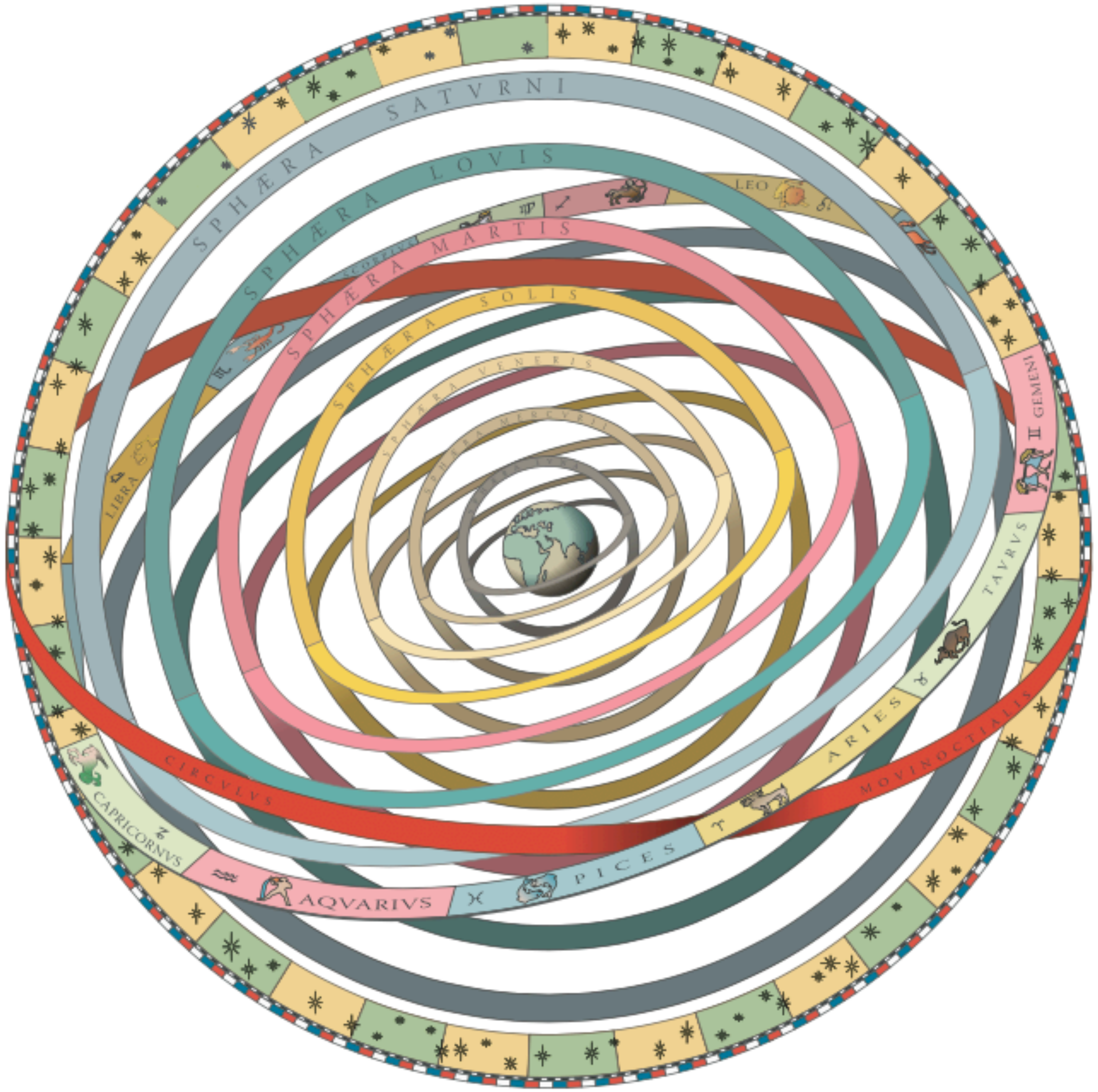
Università degli Studi di Padova

Meccanica celeste

Argomento 2

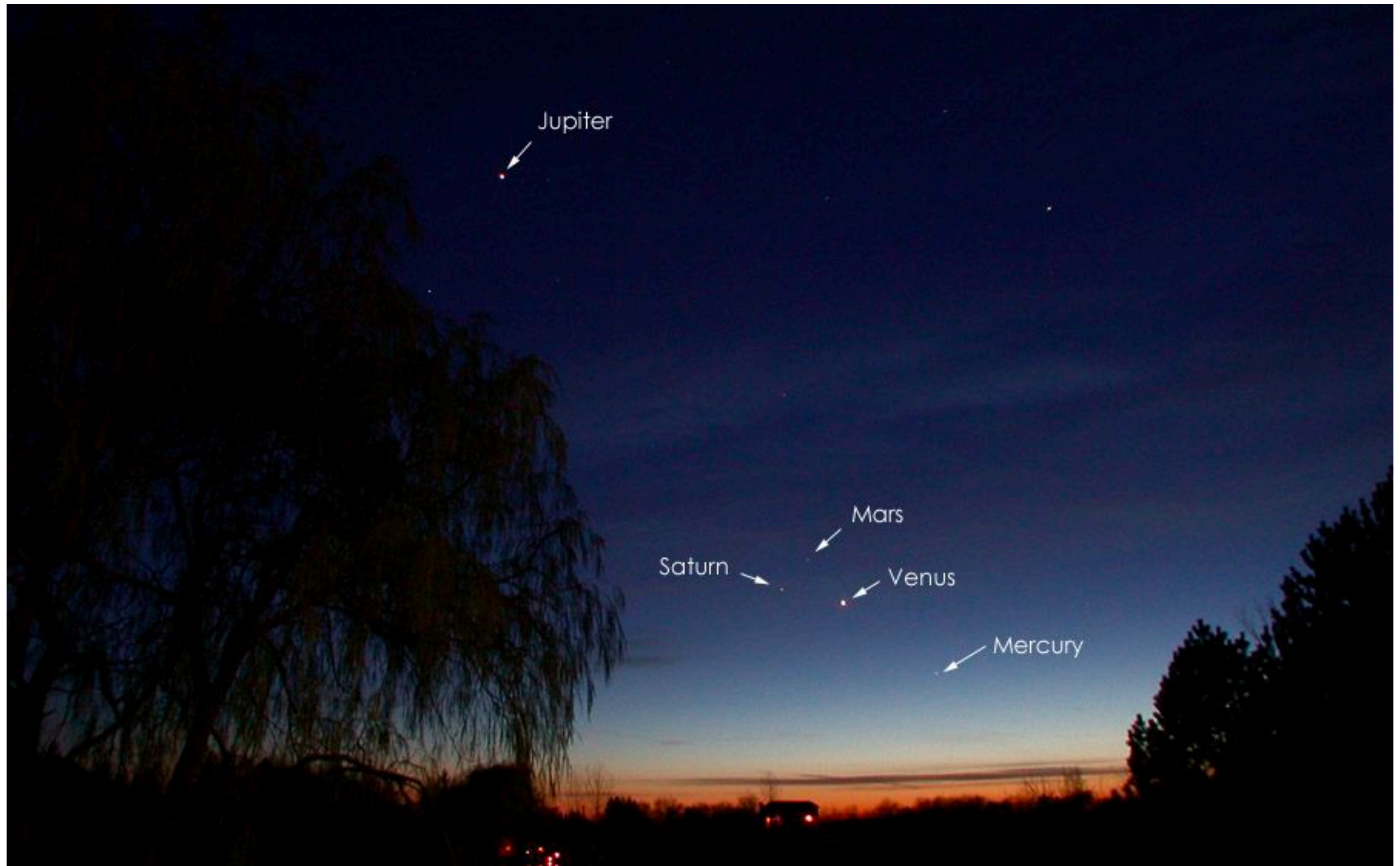
Materiale da
Cap. 6 “Fundamental Astronomy” edition, by H. Karttunen, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner
Cap. 3&4 “The cosmic perspective”, by J. O. Bennett, M. O. Donahue, N. Schneider & M. Voit

La sfera celeste



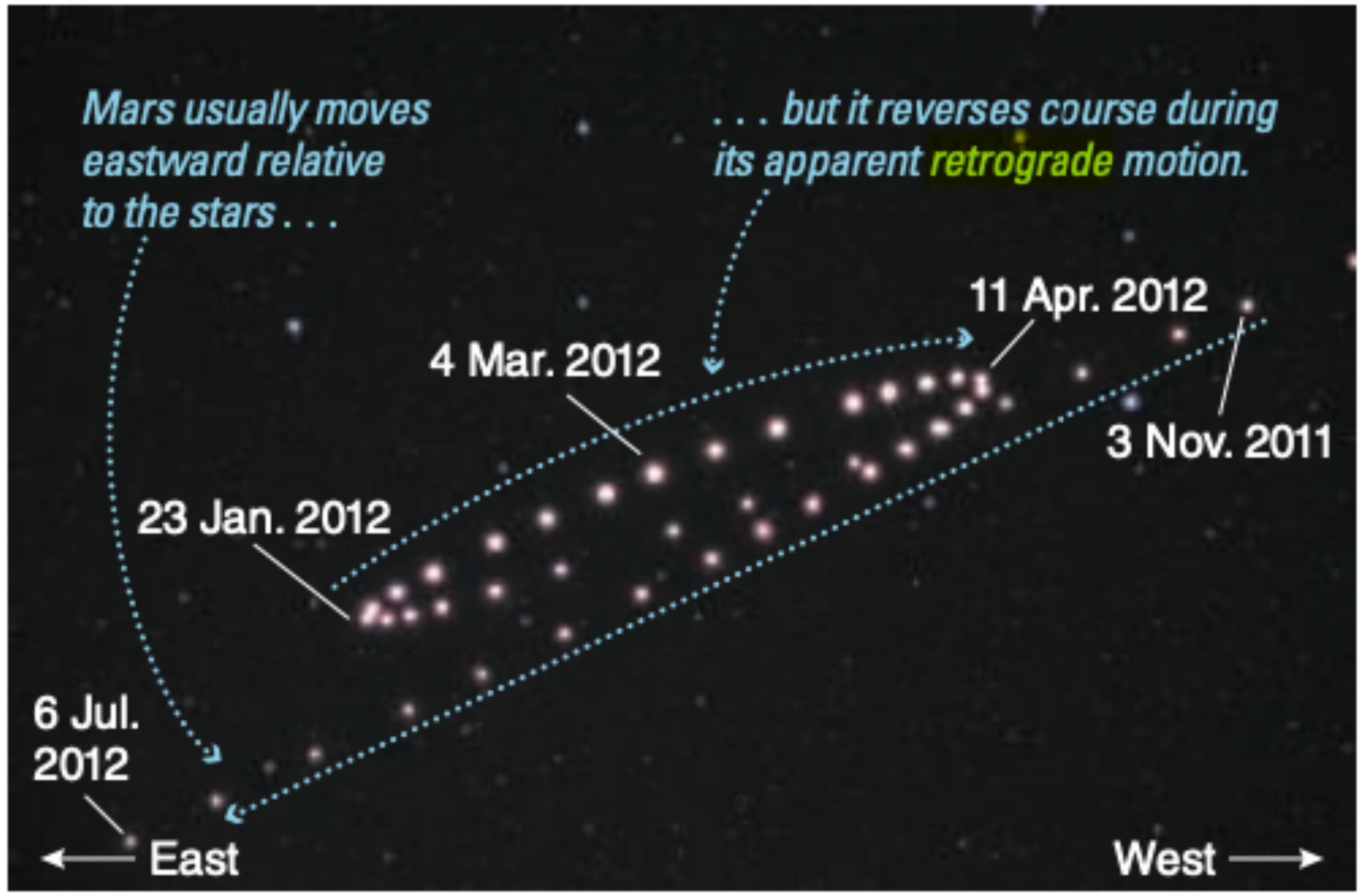
Modello tolemaico

- Modello greco (400 A.C.) delle sfere celesti
- Luna, Sole e pianeti si muovono ciascuno su una sfera
- La sfera più esterna contiene le “stelle fisse”

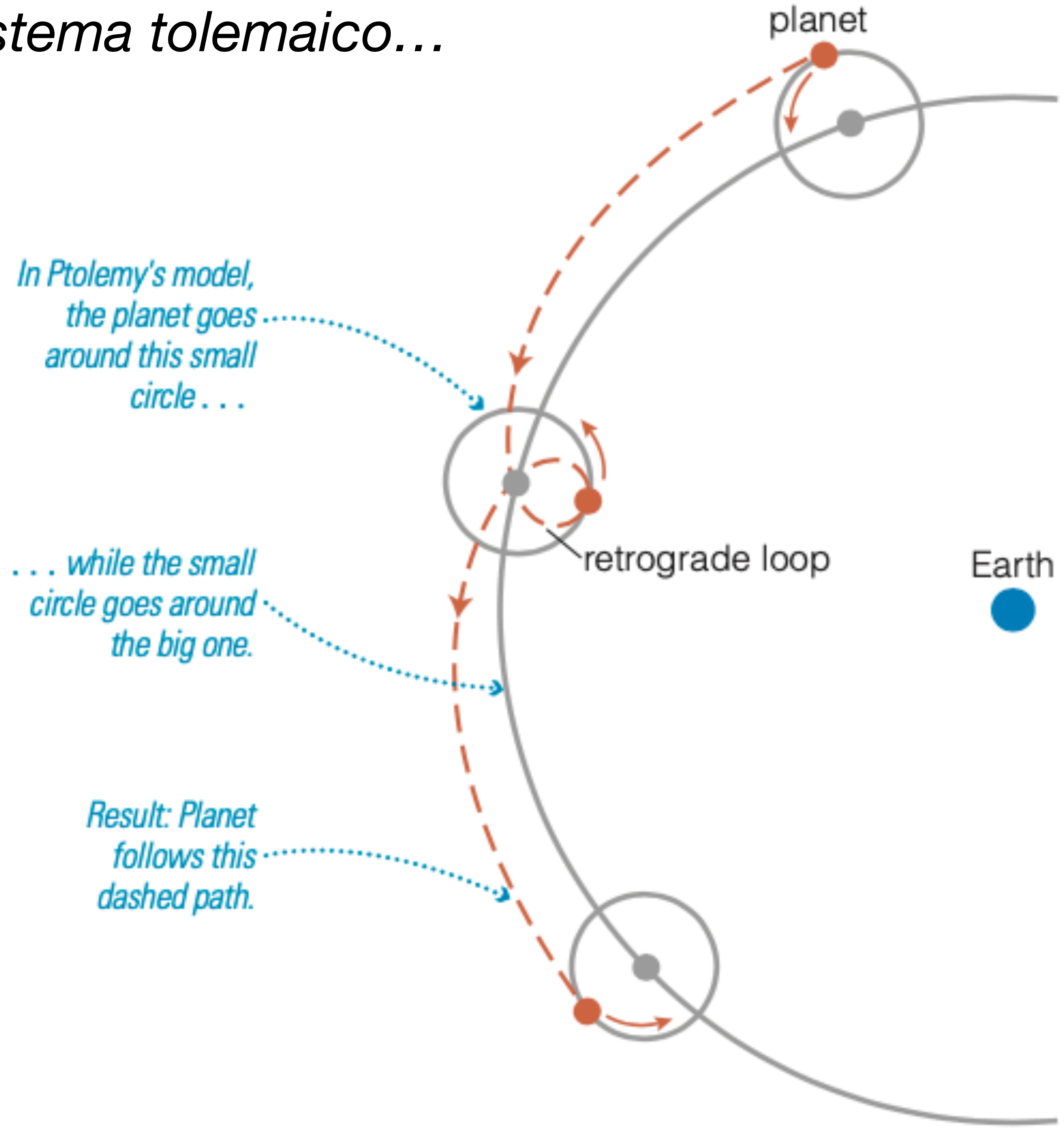


Planetary Alignment of 2002
©2002 Lauri A. Kangas

Sistema tolemaico



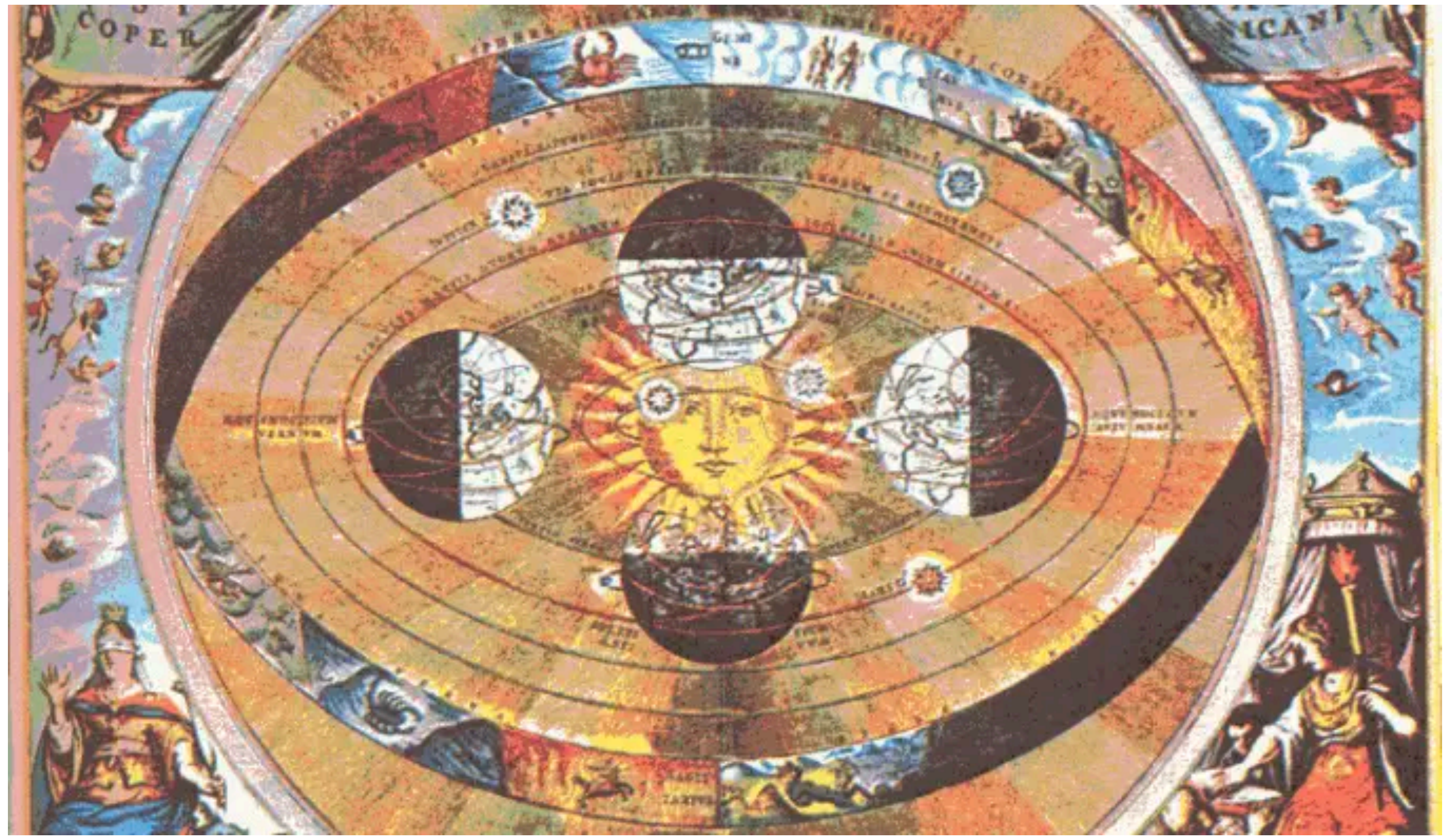
Difficile da spiegare nel sistema tolemaico…



Moto retrogrado

I pianeti nel corso dell'anno generalmente si muovono verso est rispetto alle stelle, a parte per periodi di qualche settimana/mese in cui sembrano muoversi in direzione opposta (retrograda).

La sfera celeste

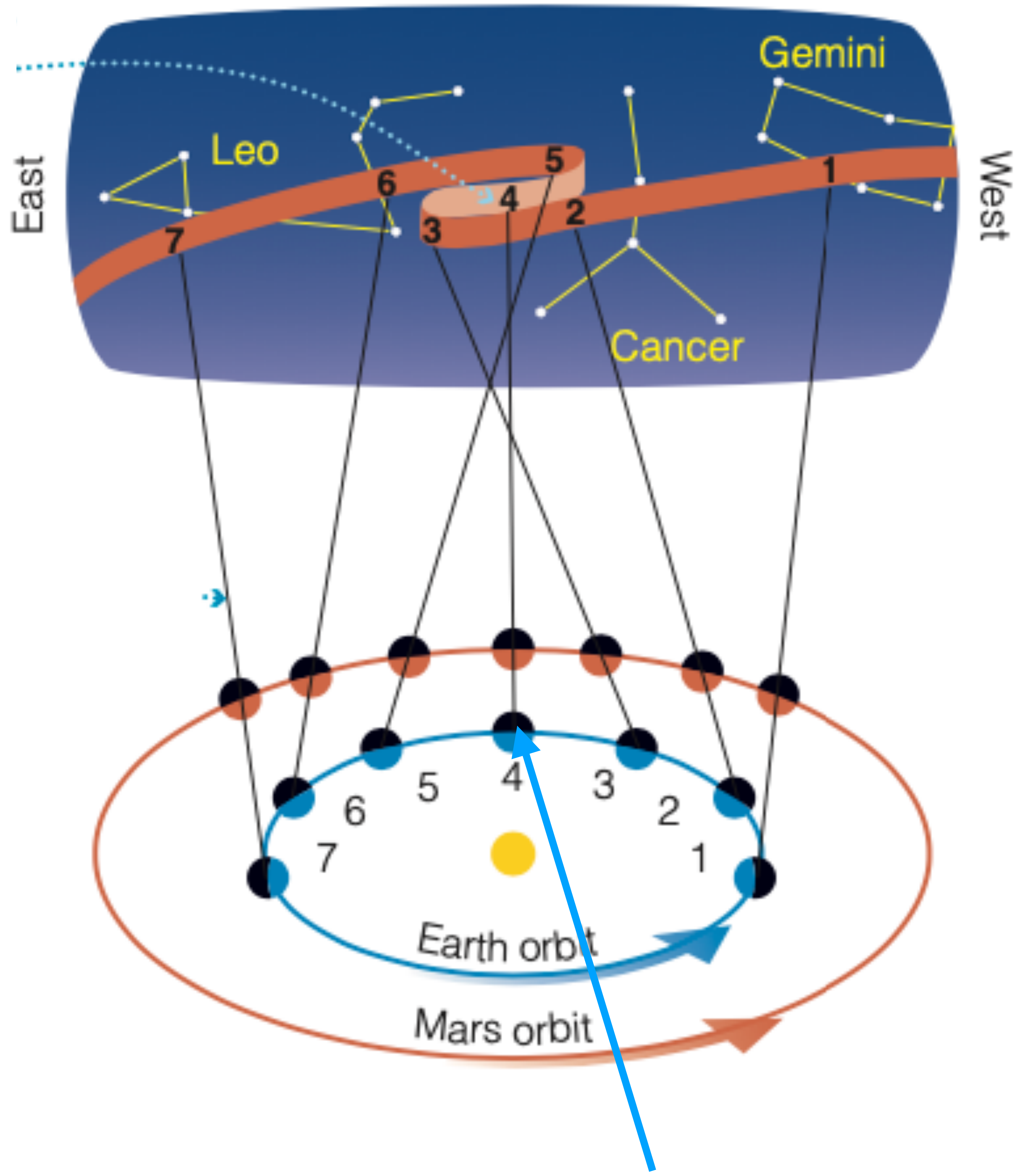


Modello copernicano

- Sole al centro
- Orbite di Luna e Pianeti circolari
- La sfera più esterna contiene le "stelle fisse", immobili e immutabili

Prevede ancora epicicli e deferenti

Spiega abbastanza naturalmente i moti retrogradi:

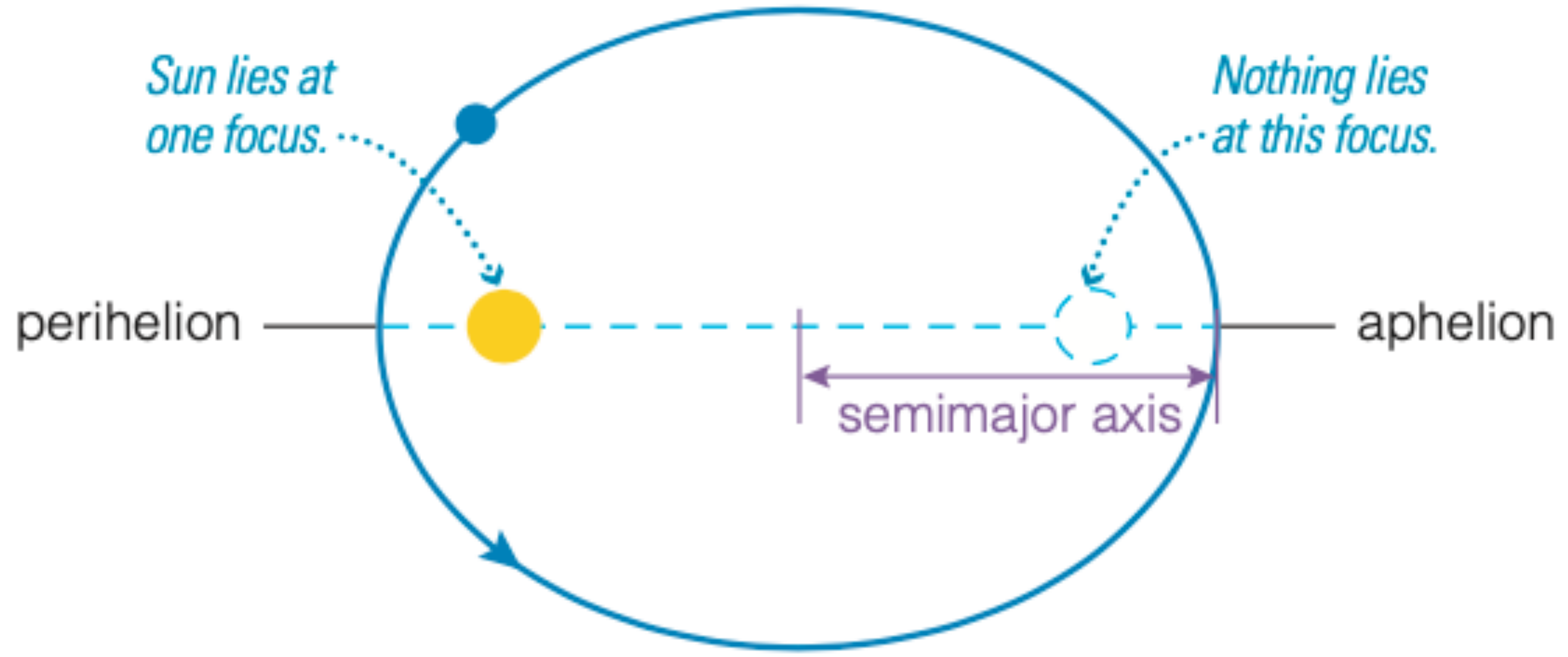


Naturale nel sistema eliocentrico:
il pianeta sembra cambiare direzione
quando la Terra lo sorpassa nell'orbita

Leggi di Keplero

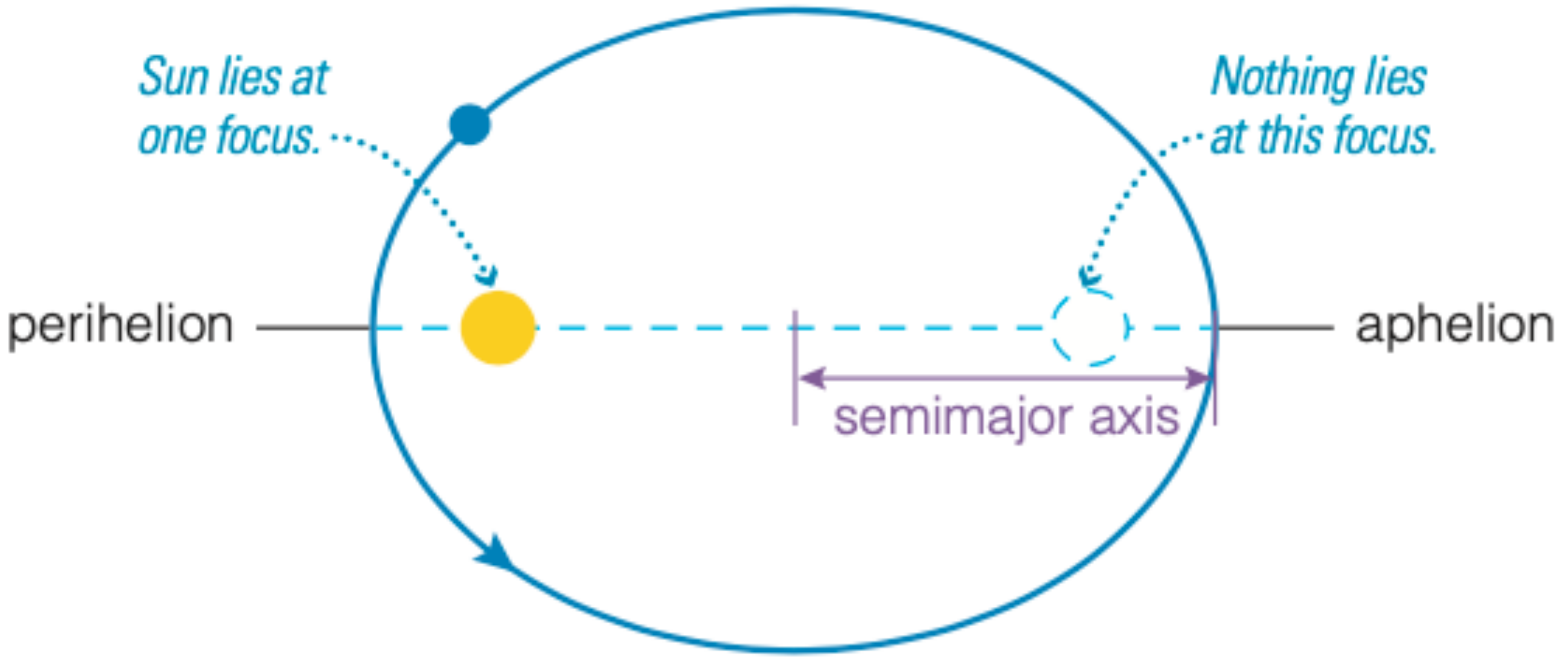
Leggi di Keplero

Prima legge di Keplero
L'orbita dei pianeti intorno al Sole è un ellisse con il Sole in uno dei fuochi



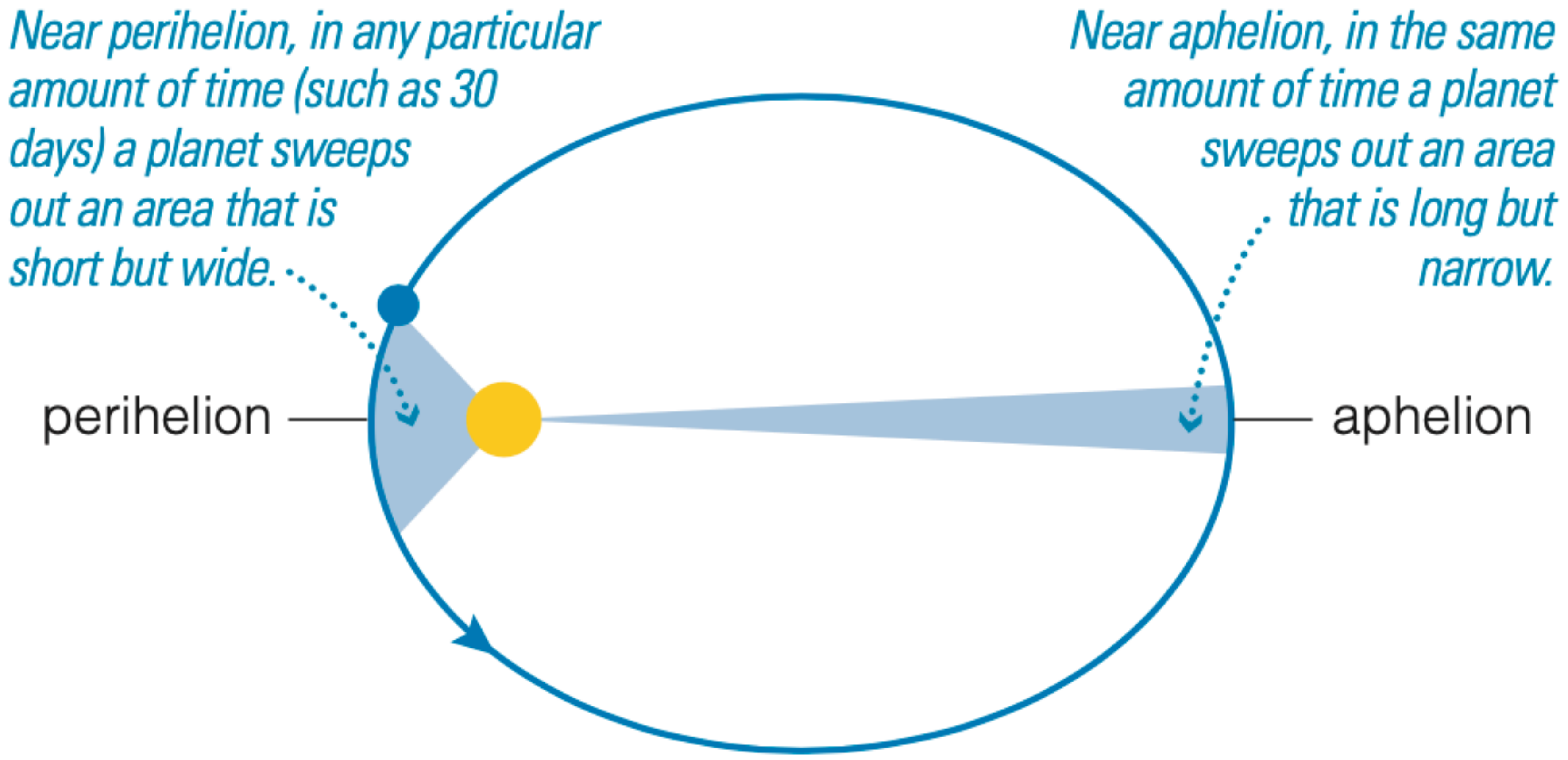
Leggi di Keplero

Prima legge di Keplero
L'orbita dei pianeti intorno al Sole è un ellisse con il Sole in uno dei fuochi



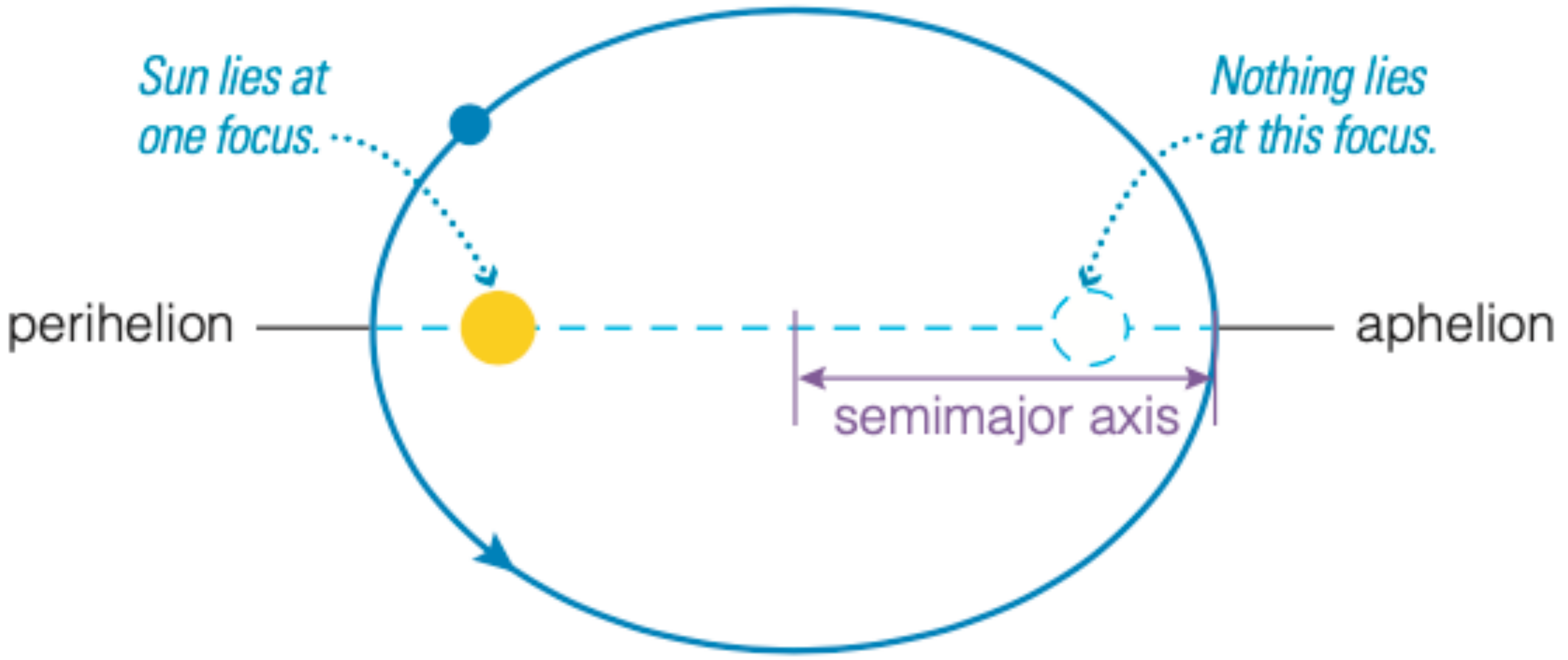
Seconda legge di Keplero
Nel suo moto intorno al sole, un pianeta spazza un'area di orbita uguale in tempi uguali

I pianeti si muovono più velocemente vicino al perielio



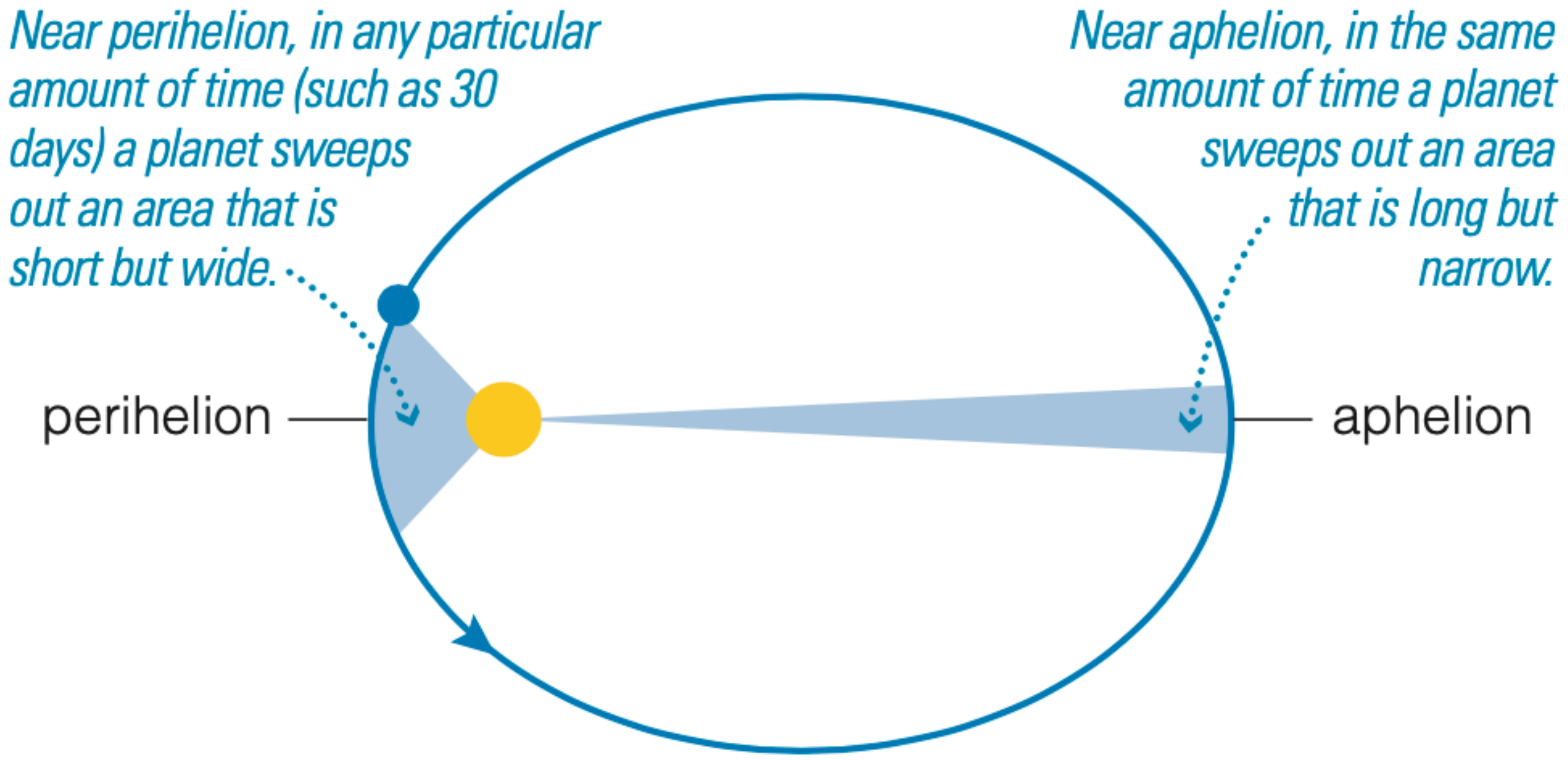
Leggi di Keplero

Prima legge di Keplero
L'orbita dei pianeti intorno al Sole è un ellisse con il Sole in uno dei fuochi

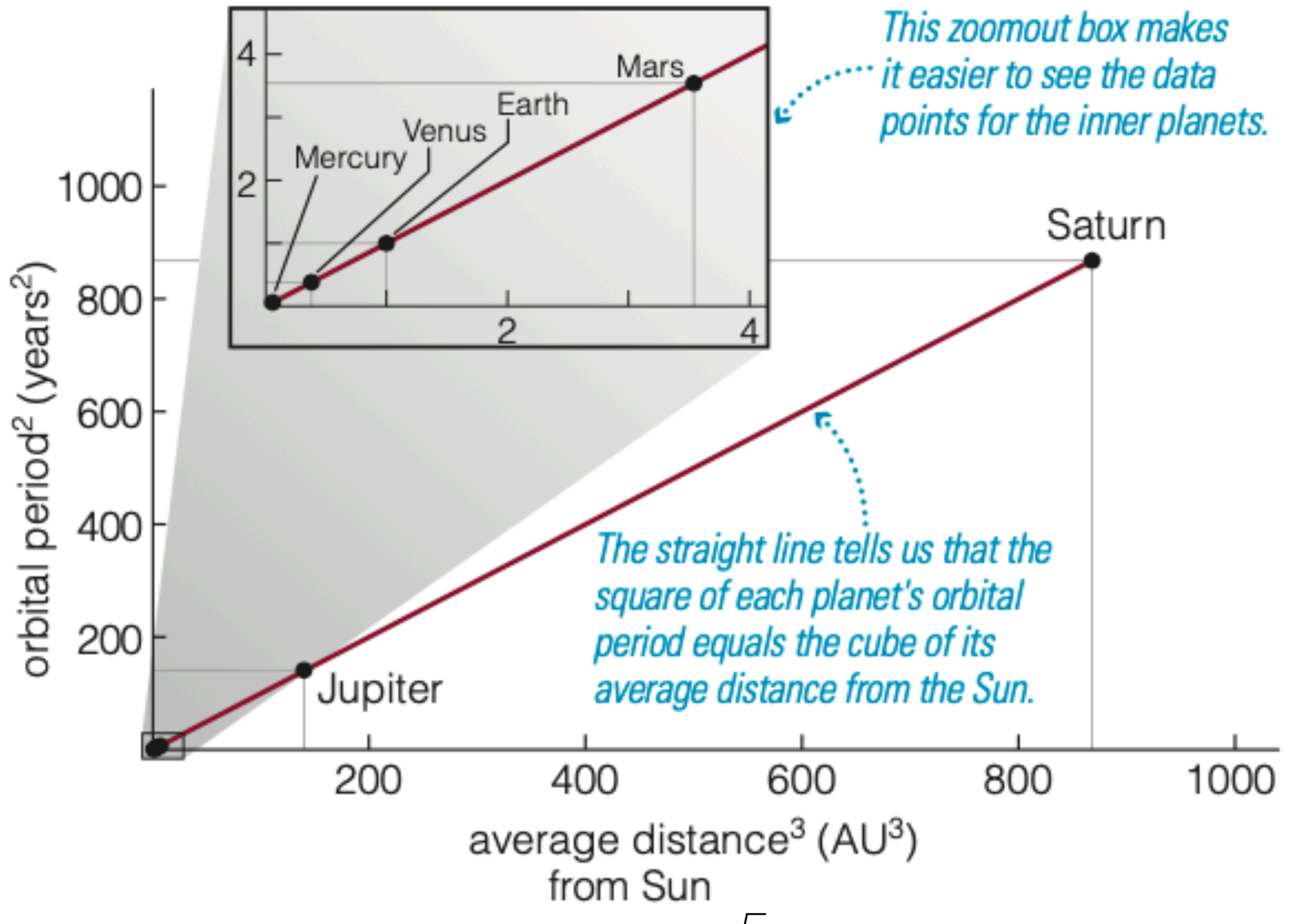


Seconda legge di Keplero
Nel suo moto intorno al sole, un pianeta spazza un'area di orbita uguale in tempi uguali

I pianeti si muovono più velocemente vicino al perielio



Terza legge di Keplero
I pianeti più distanti dal Sole orbitano con velocità angolare minore, secondo una precisa legge

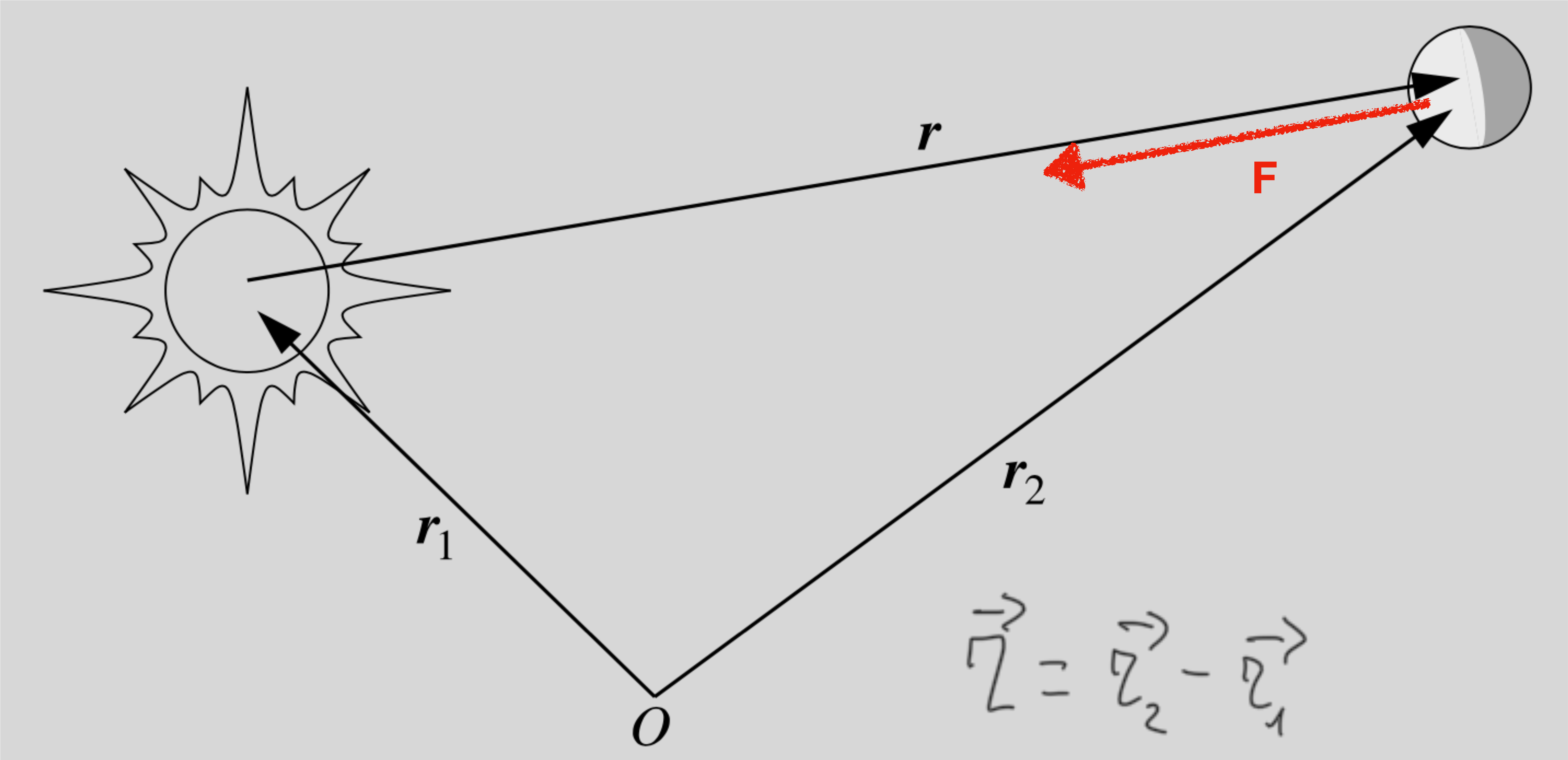


$$P^2 = a^3$$

P periodo; *a* semiasse orbita

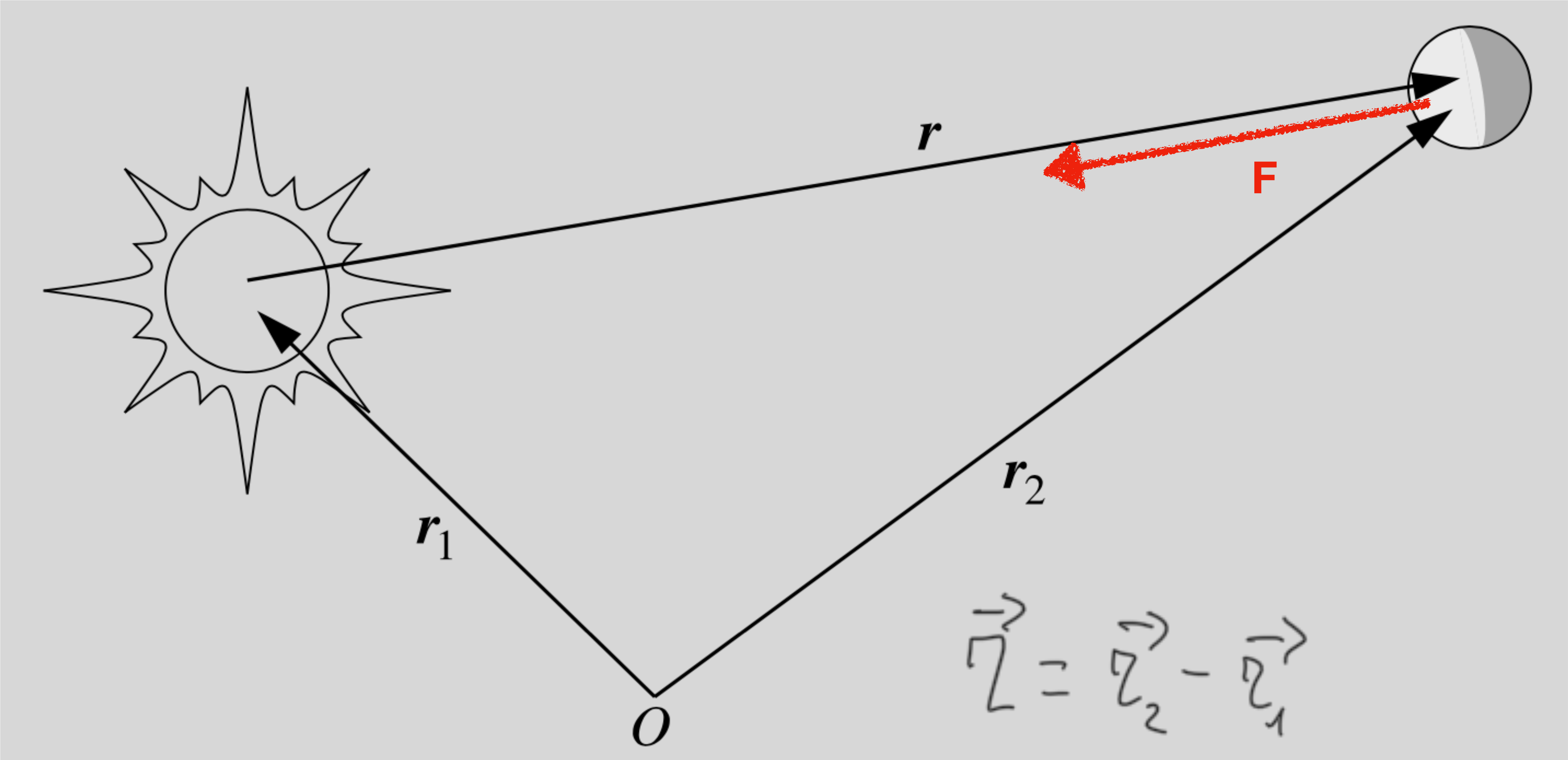
Equazione del moto

Ci limitiamo a sistemi costituiti da 2 corpi (es. Sole e un pianeta)



Equazione del moto

Ci limitiamo a sistemi costituiti da 2 corpi (es. Sole e un pianeta)



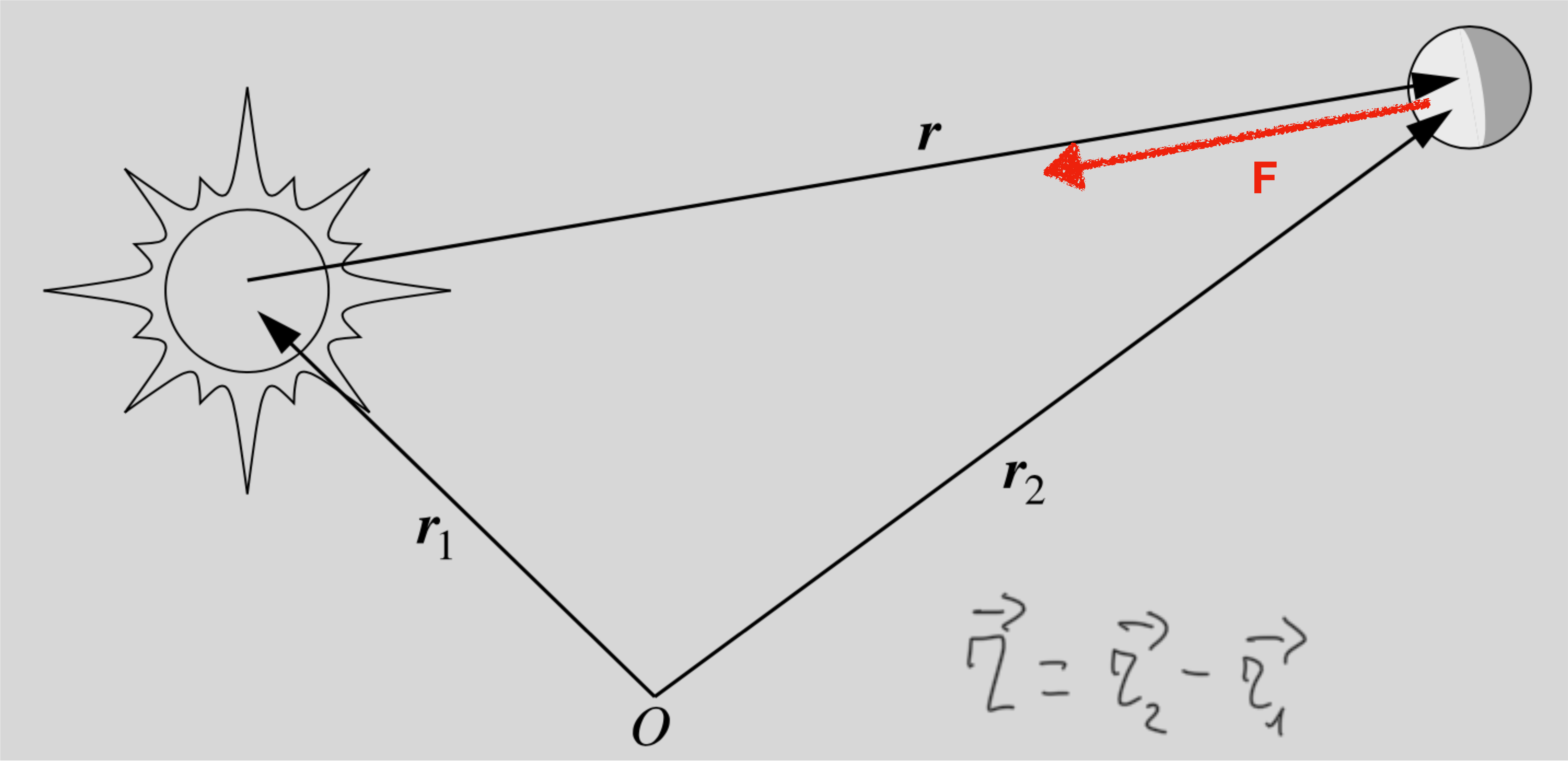
$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Legge di gravitazione universale

$$\vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{-\vec{r}}{r} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Equazione del moto

Ci limitiamo a sistemi costituiti da 2 corpi (es. Sole e un pianeta)



Legge di gravitazione universale

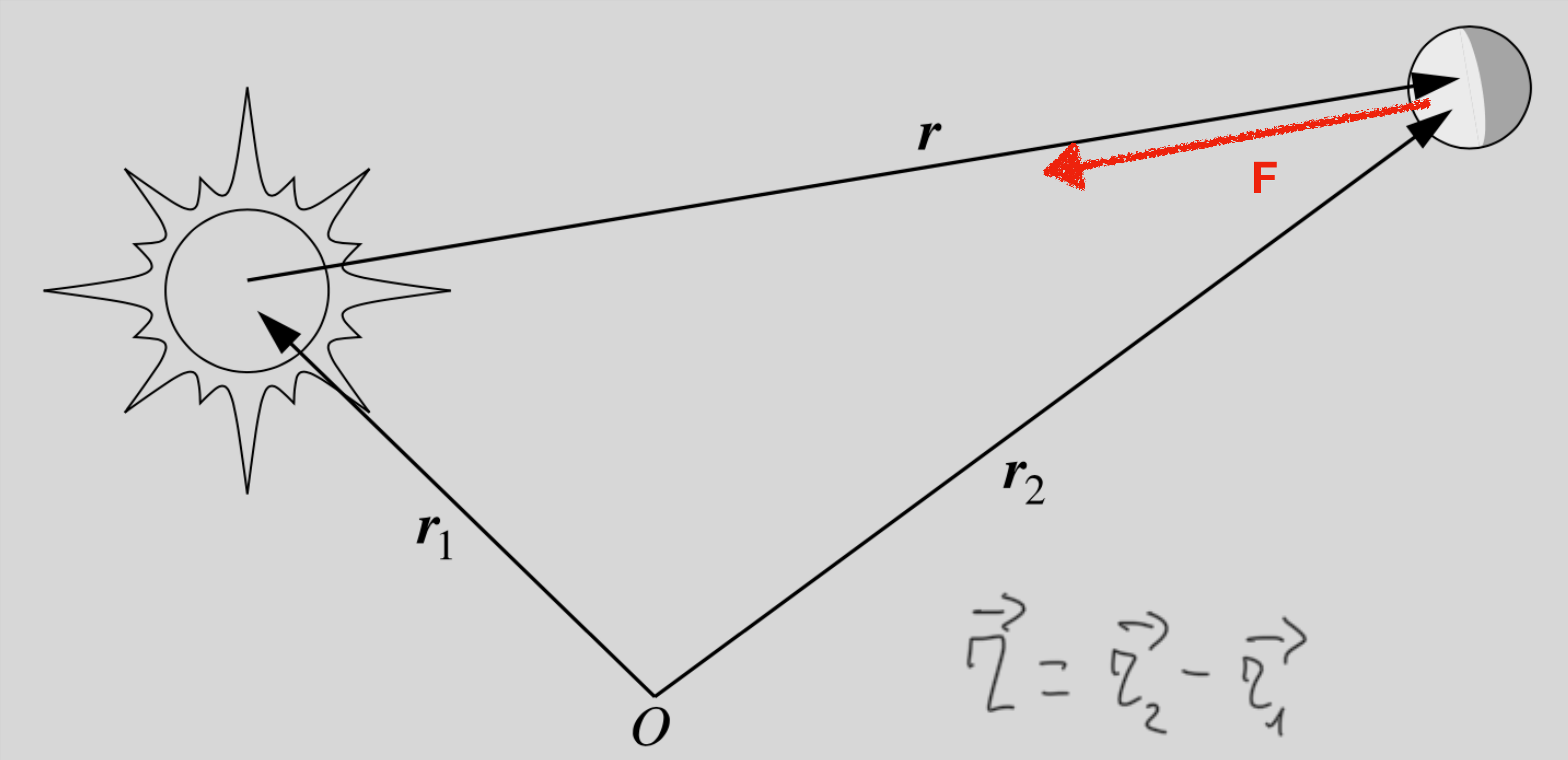
$$\vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{-\vec{r}}{r} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

costante di gravitazione

Equazione del moto

Ci limitiamo a sistemi costituiti da 2 corpi (es. Sole e un pianeta)



$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Legge di gravitazione universale

$$\vec{F} = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{-\vec{r}}{r} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

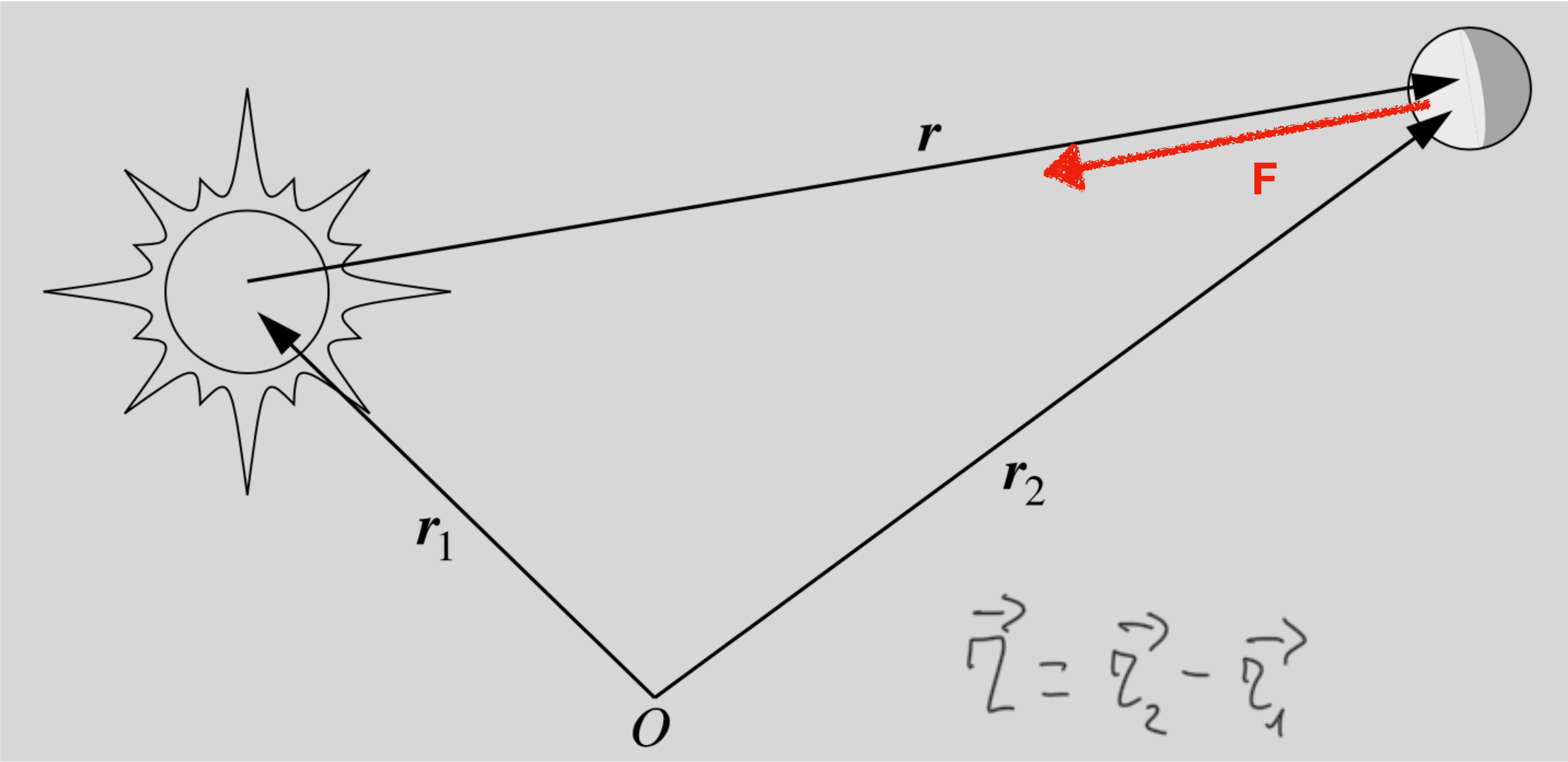
costante di gravitazione

2 Legge di Newton

$$\vec{F} = m_2 \vec{a}_2$$

Equazione del moto

Ci limitiamo a sistemi costituiti da 2 corpi (es. Sole e un pianeta)



Legge di gravitazione universale

$$\vec{F} = \frac{G\, m_1 m_2}{r^2} \frac{-\vec{r}}{r} = -G\, m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

costante di gravitazione

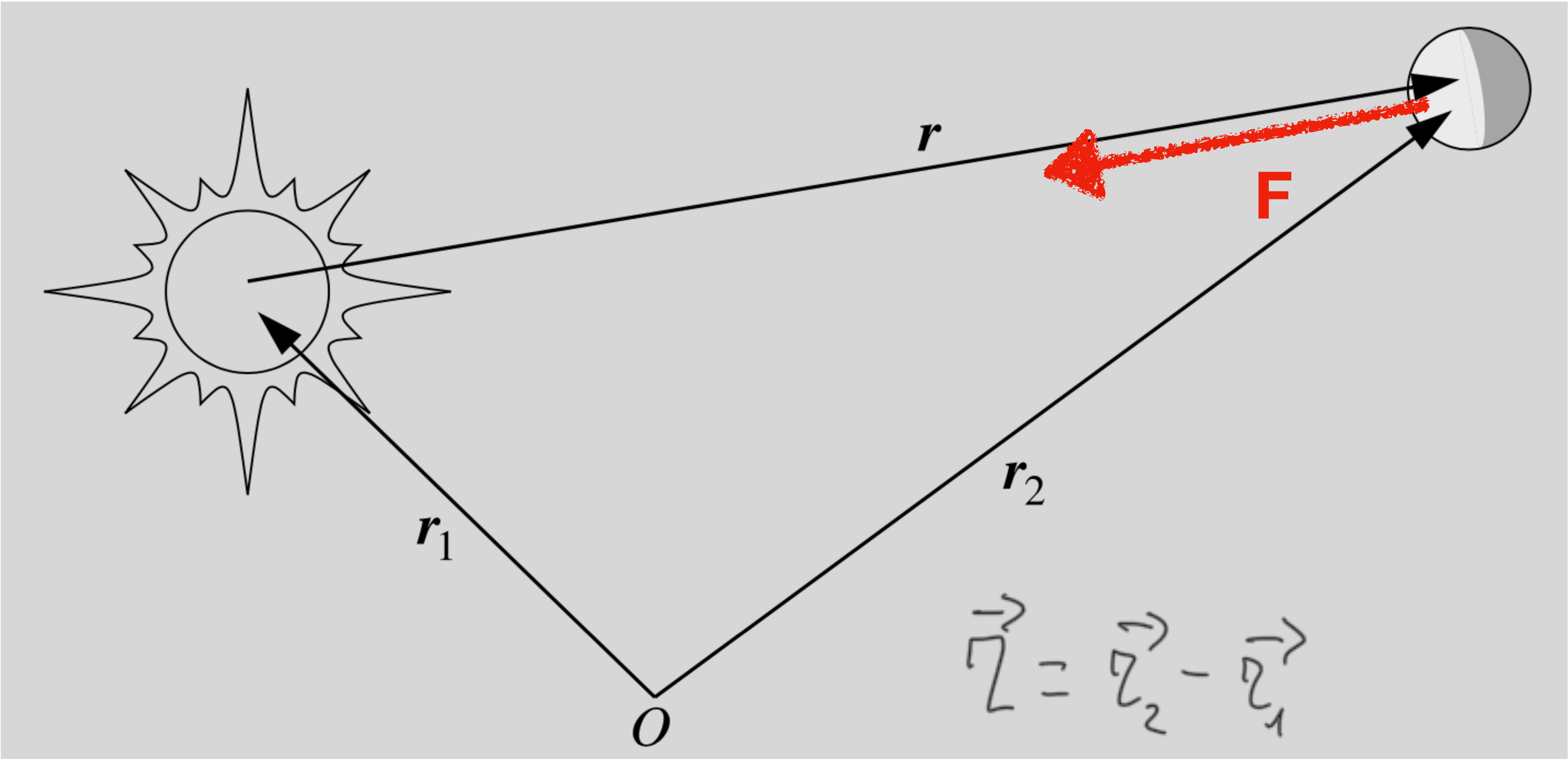
2 Legge di Newton

$$\vec{F} = m_2 \vec{a}_2$$

Equazione del moto del pianeta

$$m_2 \vec{a}_2 = -G\, m_1 m_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

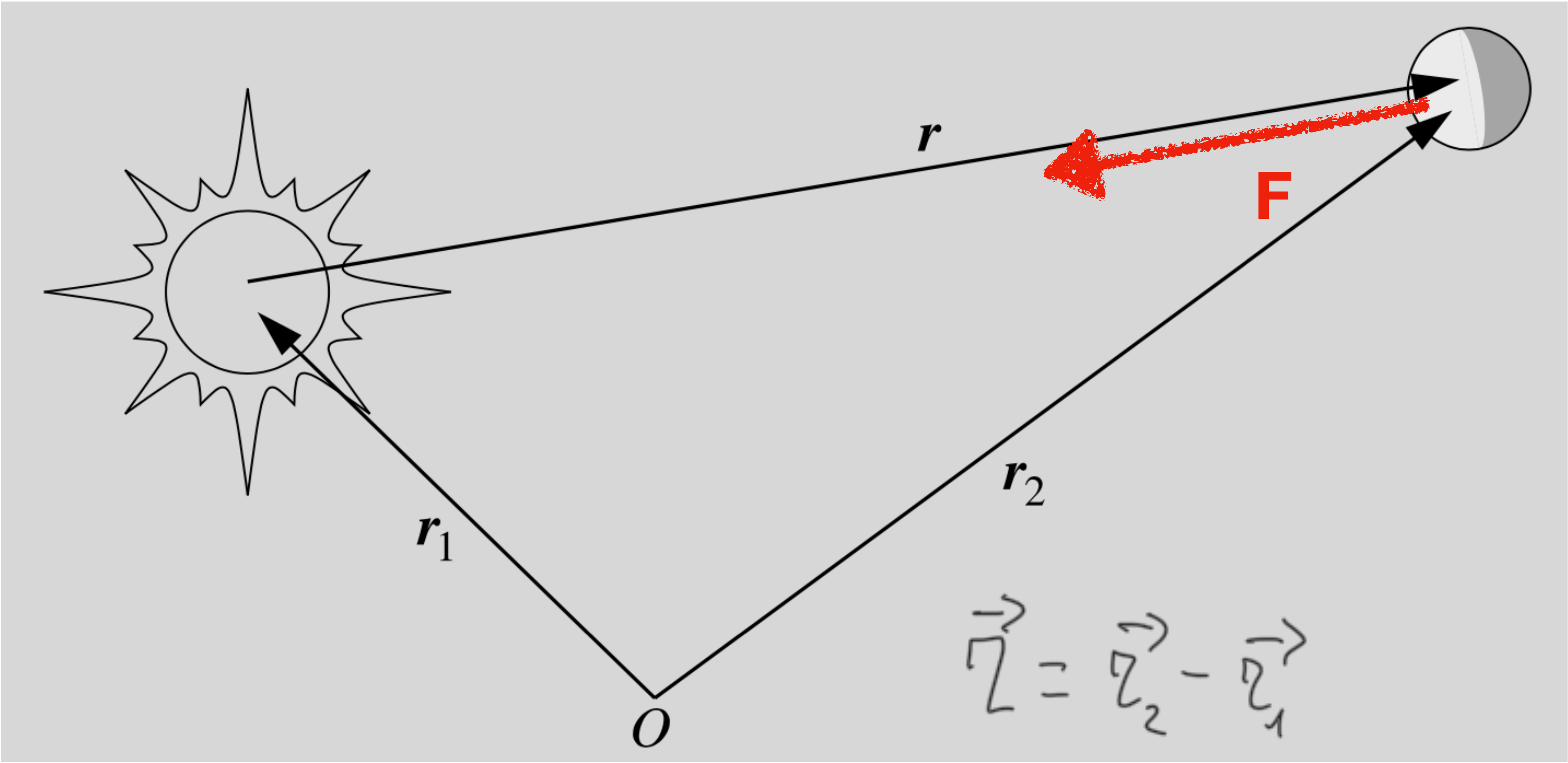
Equazione del moto



Equazione del moto del Sole

$$m_1 \vec{a}_1 = + G \, m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Equazione del moto



Equazione del moto del Sole

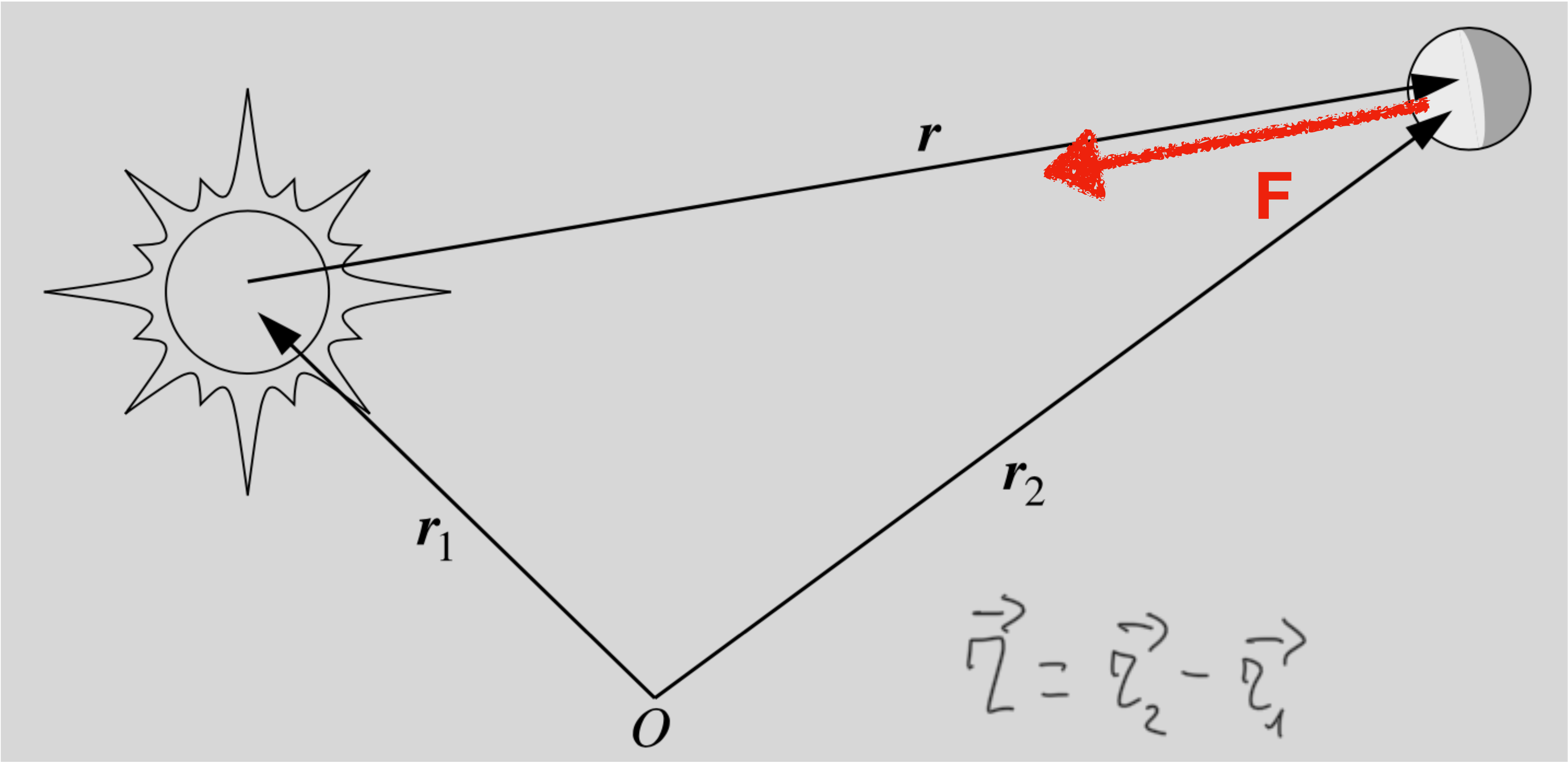
$$m_1 \vec{a}_1 = + G\, m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\cancel{m_2} \vec{a}_2 = - G\, m_1 \cancel{m_2} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

sottraendo l'una dall'altra:

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Equazione del moto



Equazione del moto del Sole

$$m_1 \vec{a}_1 = + G m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

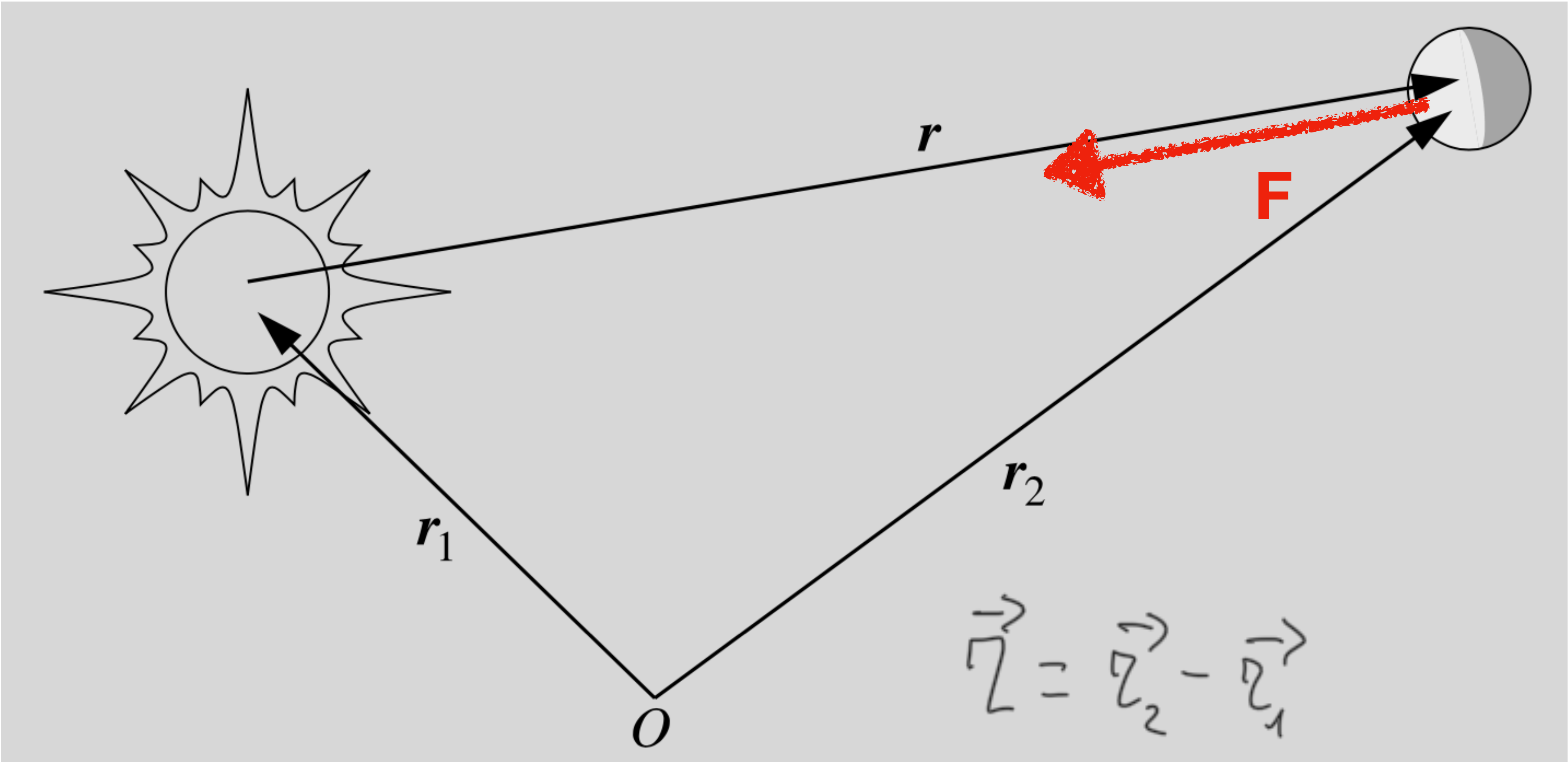
$$\cancel{m_2} \vec{a}_2 = - G m_1 \cancel{m_2} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

sottraendo l'una dall'altra:

$$\underbrace{\vec{a}_2 - \vec{a}_1} = - G m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} - G m_1 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{a} = -G \underbrace{(m_1 + m_2)}_{\mu} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Equazione del moto



Equazione del moto del Sole

$$m_1 \vec{a}_1 = +G\, m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\cancel{m_2} \vec{a}_2 = -G\, m_1 \cancel{m_2} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

sottraendo l'una dall'altra:

$$\underbrace{\vec{a}_2 - \vec{a}_1} = -G\, m_2 \frac{\vec{r}}{r^3} - G\, m_1 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{a} = -\underbrace{G\,(m_1 + m_2)}_{\mu} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

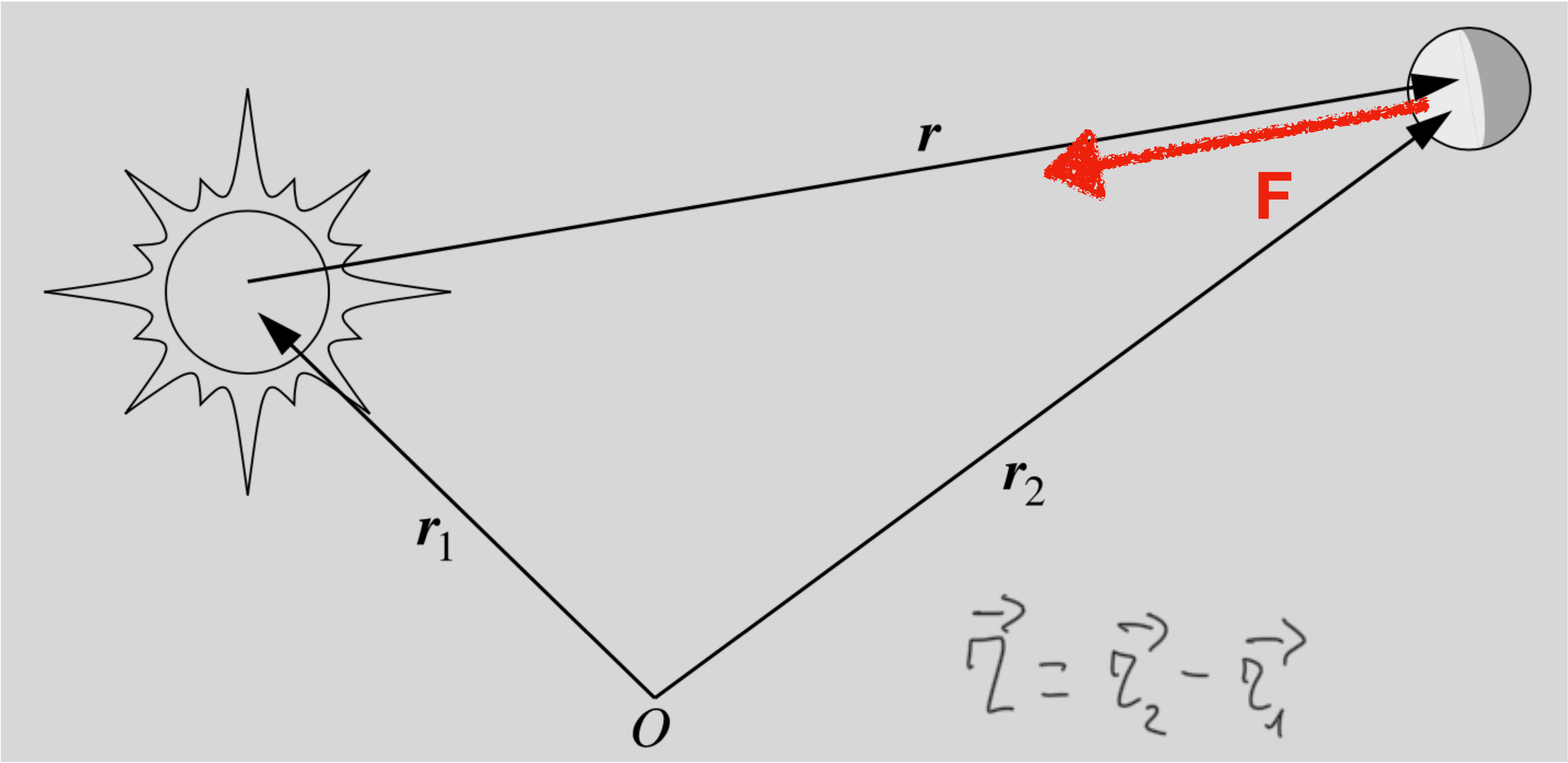
Equazione del moto relativo dei 2 corpi

$$\vec{a} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\mu = G\,(m_1 + m_2)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

Equazione del moto



$$\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$$

Equazione del moto del Sole

$$m_1 \vec a_1 = + G m_1 m_2 \frac{\vec r}{r^3}$$

$$\cancel{m_2} \vec a_2 = - G m_1 \cancel{m_2} \frac{\vec r}{r^3}$$

sottraendo l'una dall'altra:

$$\underbrace{\vec a_2 - \vec a_1} = -G m_2 \frac{\vec r}{r^3} - G m_1 \frac{\vec r}{r^3}$$

$$\vec a = -G \underbrace{(m_1 + m_2)}_{\mu} \cdot \frac{\vec r}{r^3} = -\mu \frac{\vec r}{r^3}$$

Equazione del moto relativo dei 2 corpi

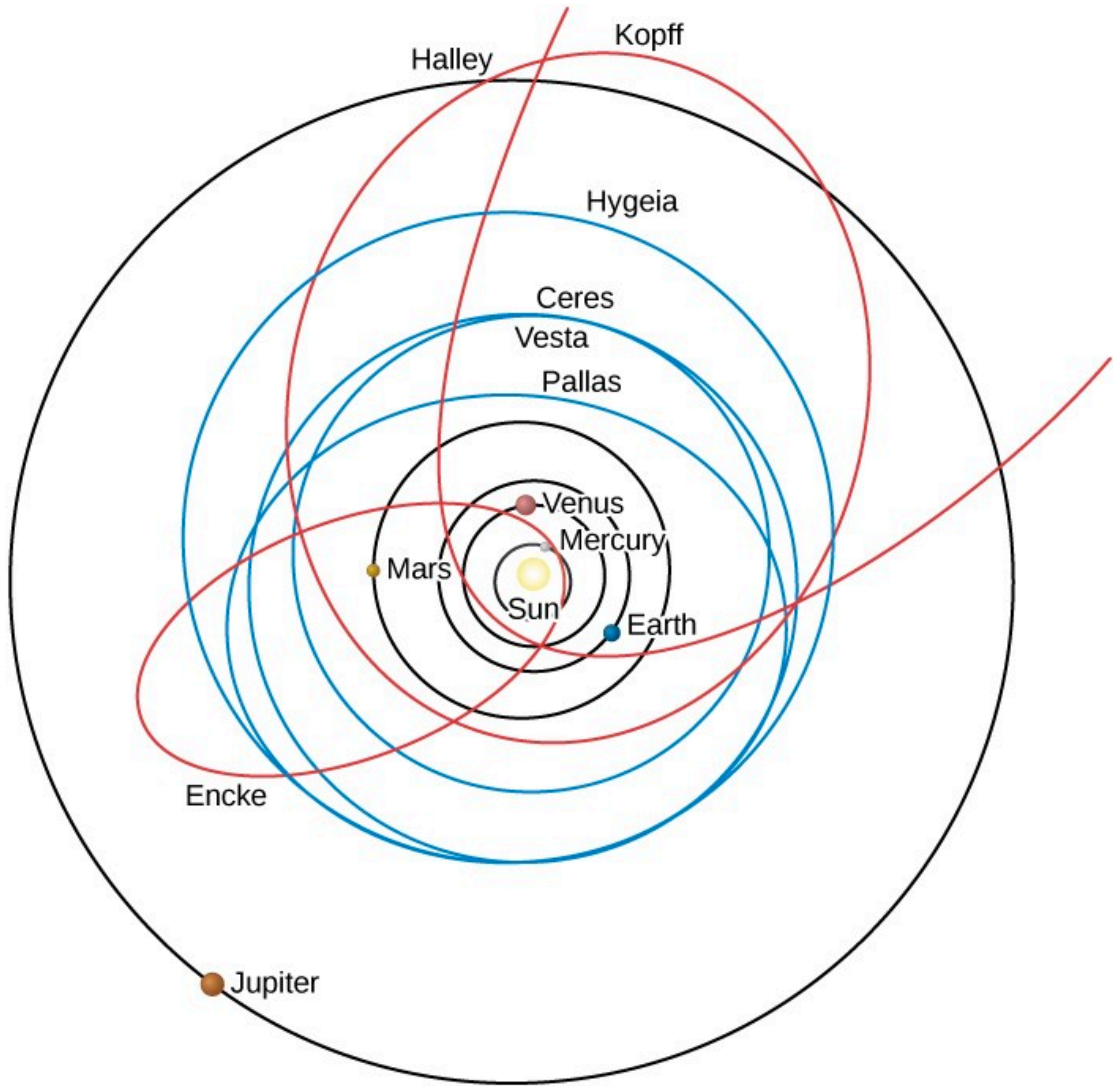
$$\vec a = -\mu \frac{\vec r}{r^3}$$

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

$$\vec a = \vec a_2 - \vec a_1$$

contiene raggio vettore e la sua derivata seconda
la soluzione dovrebbe essere ***r***(*t*)
non facile in pratica!!

Soluzione equazione del moto



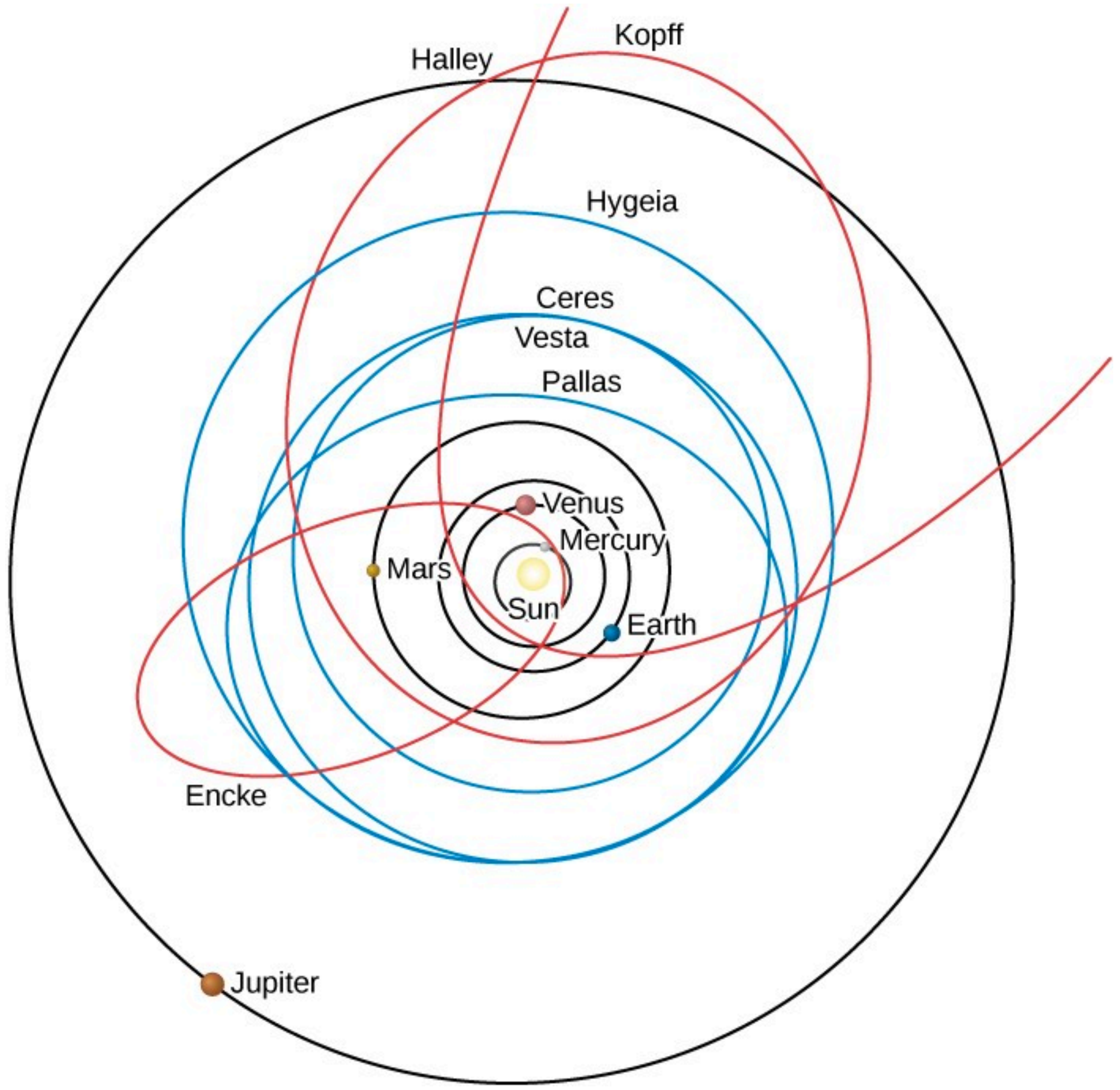
Soluzione equazione del moto

Equazione del moto relativo dei 2 corpi

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



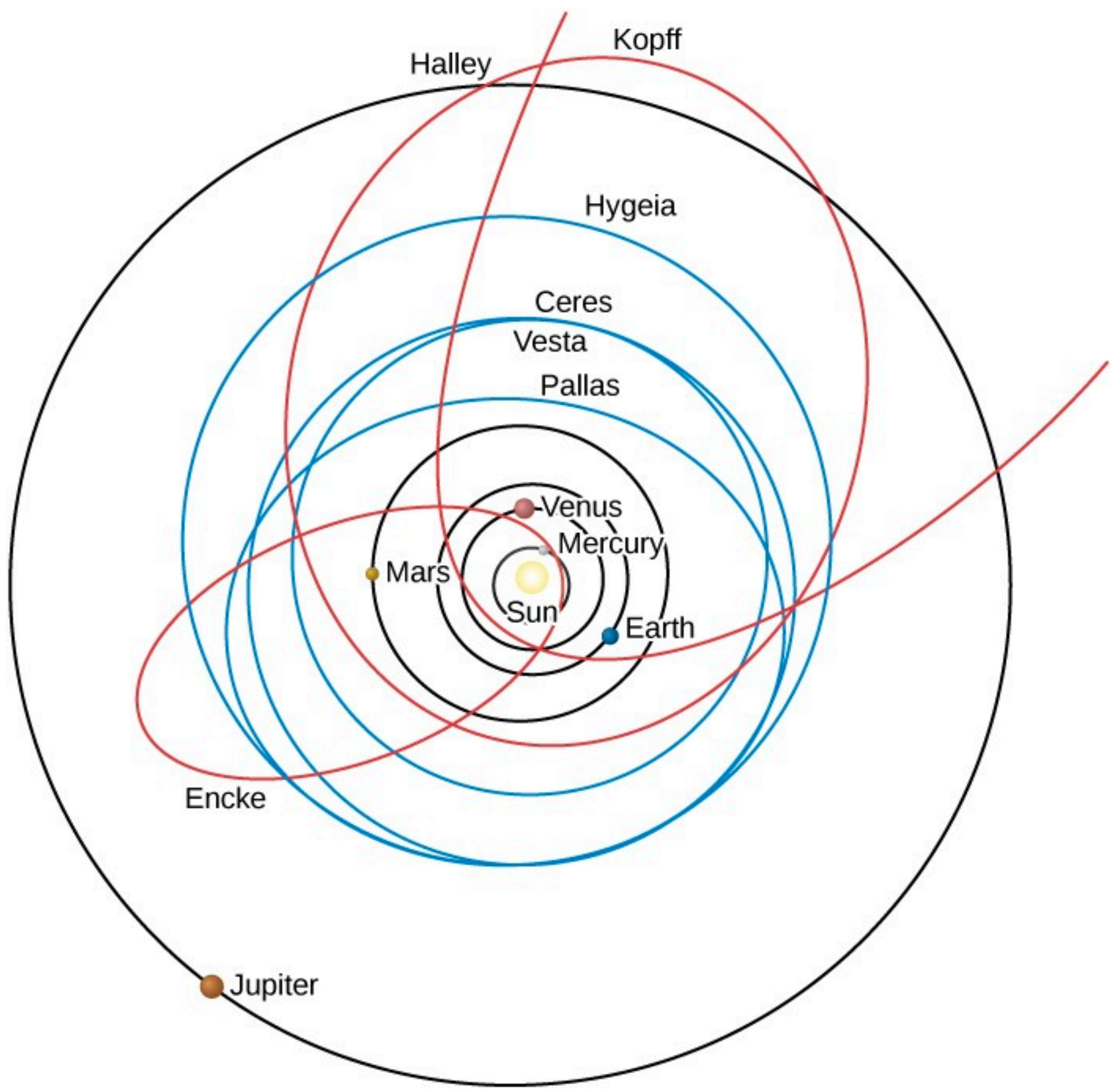
Soluzione equazione del moto

Equazione del moto relativo dei 2 corpi

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\mu = G(m_1 + m_2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



- Contiene raggio vettore e la sua derivata seconda
- Abbiamo bisogno di 6 costanti di integrazione o *integrali*

1 set di integrali: posizione e velocità in un certo istante; determinano posizione e velocità in ogni istante successivo, però non mi dicono niente sulla forma dell'orbita

2 set di integrali: elementi orbitali, mi descrivono la forma dell'orbita

3 set di integrali: alcune quantità fisiche che ora deriviamo

Momento angolare

Definizione momento angolare

$$\vec{L} = m_2 \vec{r} \times \vec{v} \qquad \vec{K} = \frac{\vec{L}}{m_2}$$

K momento angolare per unità di massa

Definizione momento angolare

$$\vec{L} = m_2 \vec{r} \times \vec{v} \qquad \vec{K} = \frac{\vec{L}}{m_2}$$

K momento angolare per unità di massa

$$\Rightarrow \quad \vec{K} = \vec{r} \times \vec{v}$$

derivo **K** rispetto al tempo

Momento angolare

Definizione momento angolare

$$\vec{L} = m_2 \vec{r} \times \vec{v} \qquad \vec{K} = \frac{\vec{L}}{m_2}$$

K momento angolare per unità di massa

$$\Rightarrow \quad \vec{K} = \vec{r} \times \vec{v}$$

derivo **K** rispetto al tempo

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} \qquad \vec{v} \parallel \vec{v}$$

Momento angolare

Definizione momento angolare

$$\vec{L} = m_2 \, \vec{r} \times \vec{v} \qquad \vec{K} = \frac{\vec{L}}{m_2}$$

K momento angolare per unità di massa

$$\Rightarrow \quad \vec{K} = \vec{r} \times \vec{v}$$

derivo **K** rispetto al tempo

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} \qquad \vec{v} \parallel \vec{v}$$

equazione del moto $\vec{a} = -\mu \dfrac{\vec{r}}{r^3}$

Momento angolare

Definizione momento angolare

$$\vec{L} = m_2 \vec{r} \times \vec{v} \qquad \vec{K} = \frac{\vec{L}}{m_2}$$

K momento angolare per unità di massa

$$\Rightarrow \vec{K} = \vec{r} \times \vec{v}$$

derivo **K** rispetto al tempo

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} \qquad \vec{v} \parallel \vec{v}$$

equazione del moto $\vec{a} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=0} = 0 \qquad \vec{r} \parallel \vec{r}$$

Momento angolare

Definizione momento angolare

$$\vec{L} = m_2 \vec{r} \times \vec{v} \qquad \vec{K} = \frac{\vec{L}}{m_2}$$

K momento angolare per unità di massa

$$\Rightarrow \vec{K} = \vec{r} \times \vec{v}$$

derivo **K** rispetto al tempo

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} \qquad \vec{v} \parallel \vec{v}$$

equazione del moto $\vec{a} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=0} = 0 \qquad \vec{r} \parallel \vec{r}$$

Quindi **K** (e **L**) è costante nel tempo

Momento angolare

Definizione momento angolare

$$\vec{L} = m_2\, \vec{r} \times \vec{v} \qquad \vec{K} = \frac{\vec{L}}{m_2}$$

K momento angolare per unità di massa

$$\Rightarrow \quad \vec{K} = \vec{r} \times \vec{v}$$

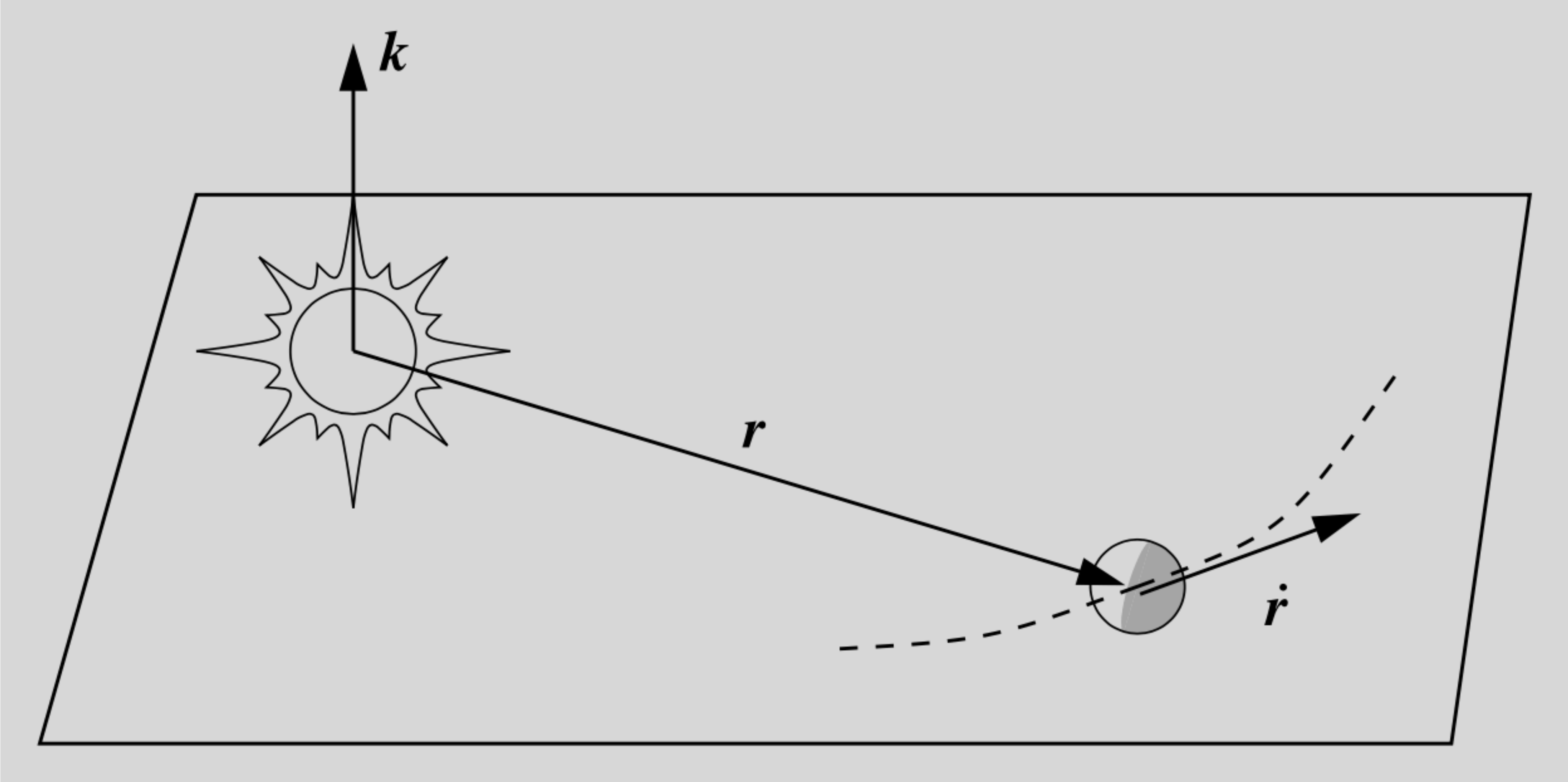
derivo **K** rispetto al tempo

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} \qquad \vec{v} \parallel \vec{v}$$

equazione del moto $\vec{a} = -\mu \dfrac{\vec{r}}{r^3}$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}\, \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=0} = 0 \qquad \vec{r} \parallel \vec{r}$$

Quindi **K** (e **L**) è costante nel tempo



Momento angolare

Definizione momento angolare

$\vec{L} = m_2 \vec{r} \times \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{K} = \frac{\vec{L}}{m_2}$

K momento angolare per unità di massa

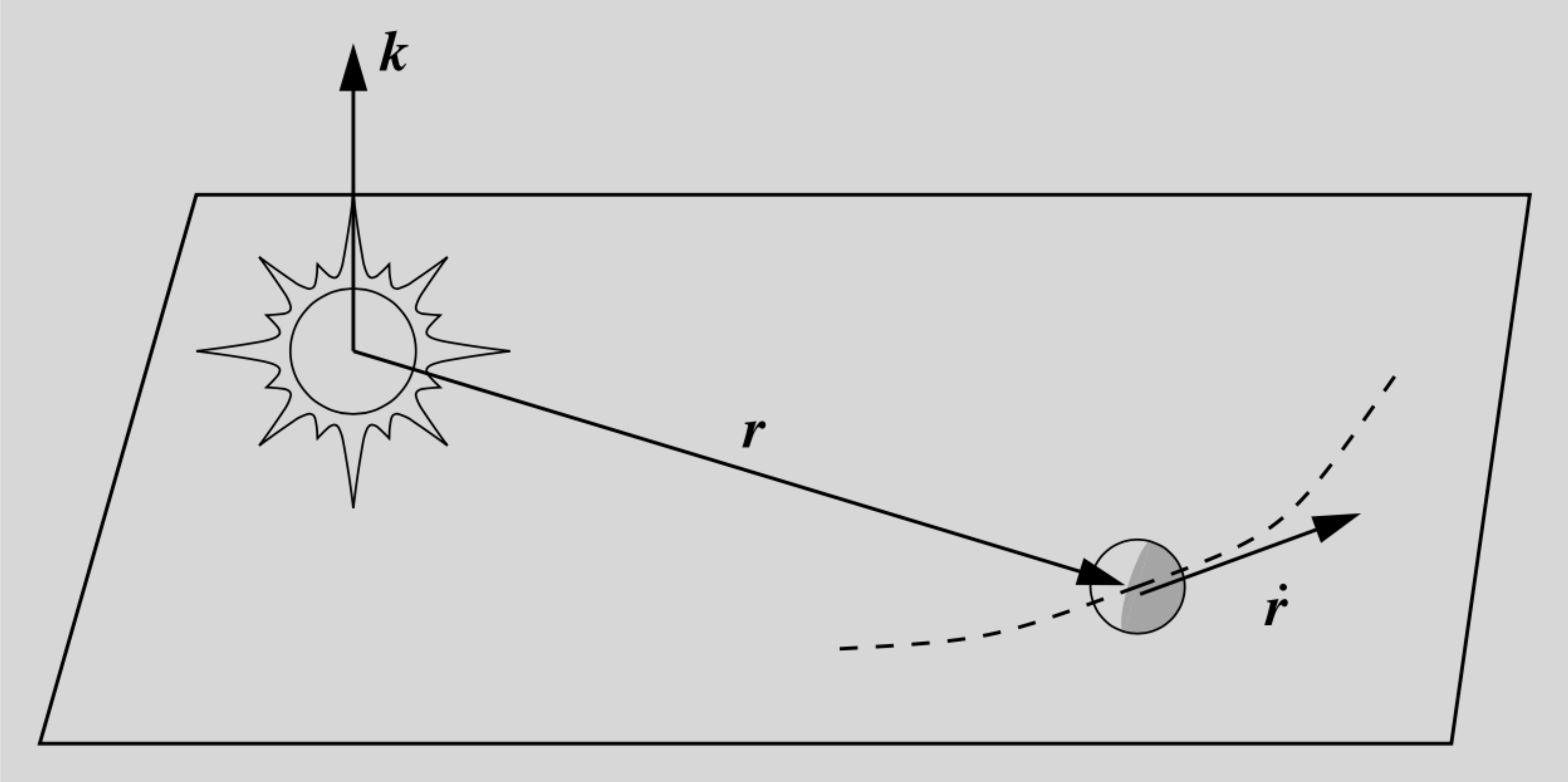
$\Rightarrow \vec{K} = \vec{r} \times \vec{v}$ $\qquad$ derivo **K** rispetto al tempo

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} \qquad \vec{v} \parallel \vec{v}$$

equazione del moto $\vec{a} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=0} = 0 \qquad \vec{r} \parallel \vec{r}$$

Quindi **K** (e **L**) è costante nel tempo



da $\vec{K} = \vec{r} \times \vec{v}$ si deriva che ***k*** è sempre ⊥ al moto

Momento angolare

Definizione momento angolare

$$\vec{L} = m_2 \vec{r} \times \vec{v} \qquad \vec{K} = \frac{\vec{L}}{m_2}$$

K momento angolare per unità di massa

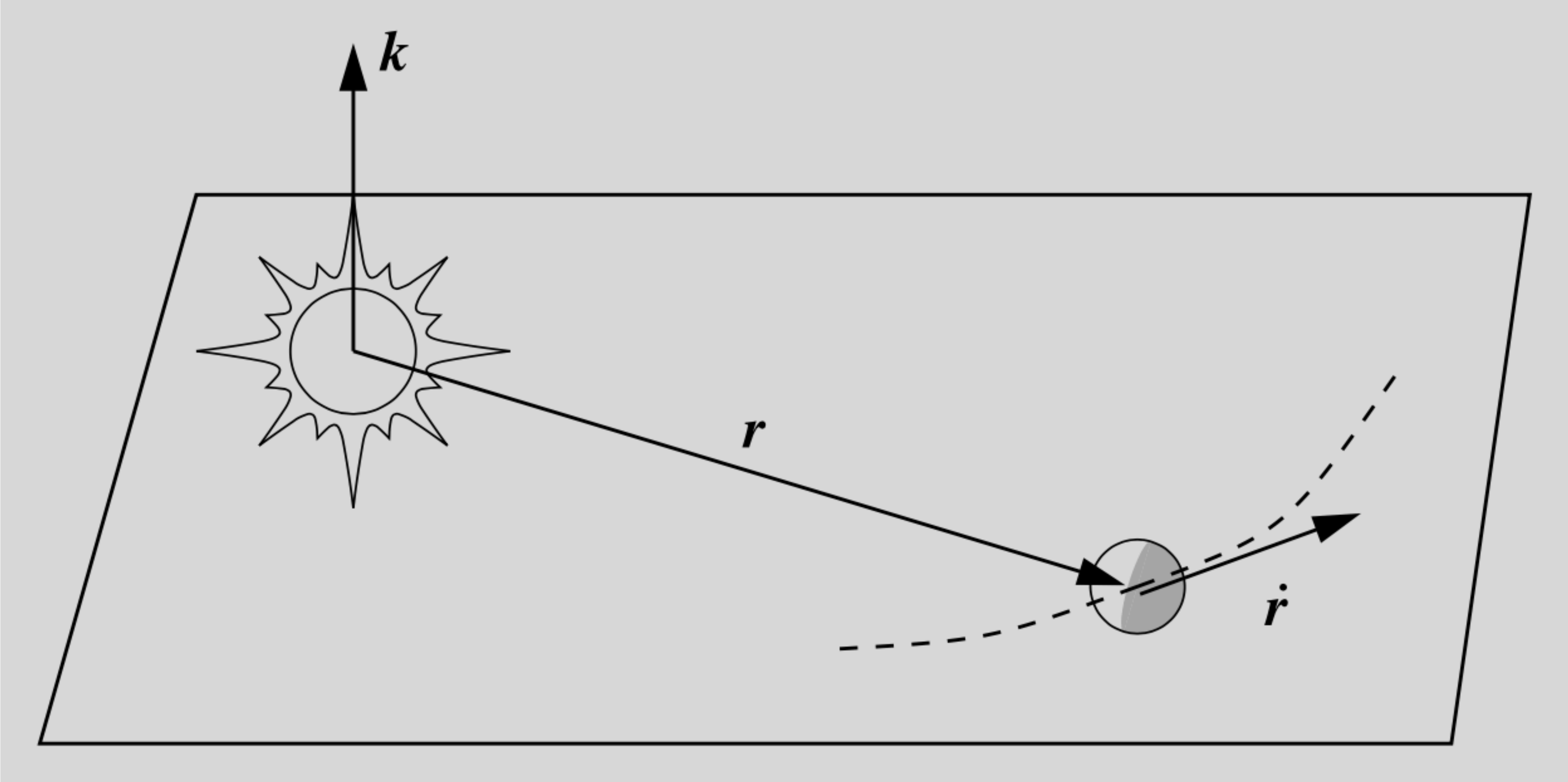
$$\Rightarrow \vec{K} = \vec{r} \times \vec{v}$$ derivo **K** rispetto al tempo

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} \qquad \vec{v} \parallel \vec{v}$$

equazione del moto $\vec{a} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=0} = 0 \qquad \vec{r} \parallel \vec{r}$$

Quindi **K** (e **L**) è costante nel tempo



da $\vec{K} = \vec{r} \times \vec{v}$ si deriva che ***k*** è sempre ⊥ al moto

…e quindi il moto è ristretto al piano ⊥ a k

Forma dell’orbita

calcoliamo

$$\vec{R} \times \vec{\ell} =$$

Forma dell'orbita

calcoliamo

$$\vec{K} \times \vec{a} =$$

$$\downarrow$$

$$\vec{r} \times \vec{v}$$

Forma dell'orbita

calcoliamo

$$-\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{h} \times \vec{a} =$$

$$\vec{r} \times \vec{v}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Forma dell’orbita

calcoliamo

$$-\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{h} \times \vec{a} = (\vec{r} \times \vec{v}) \times (-\mu \, \vec{r}/r^3)$$

$$\vec{r} \times \vec{v}$$

Forma dell'orbita

calcoliamo

$$\vec{h} \times \vec{a} = (\vec{r} \times \vec{v}) \times (-\mu \, \vec{r}/r^3)$$

$\vec{a} = -\mu \dfrac{\vec{r}}{r^3}$, $\quad \vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} =$$

$$-\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$-\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) + \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a})$$

Forma dell'orbita

calcoliamo

$$\vec{a} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{K} \times \vec{a} = (\vec{r} \times \vec{v}) \times (-\mu\, \vec{r}/r^3)$$

$$\vec{K} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} =$$

$$-\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$-\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) + \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$\vec{K} \times \vec{a} = -\vec{r}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{v}\right) + \vec{v} \cdot \left(-\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r}\right) =$$

$$= -\frac{\mu}{r^3}\left[-(\vec{r} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{v}\right]$$

Forma dell'orbita

calcoliamo

$$-\mu \frac{\vec r}{r^3}$$

$$\vec K \times \vec a = (\vec r \times \vec v) \times (-\mu \vec r / r^3)$$

$$\vec K \downarrow \vec r \times \vec v$$

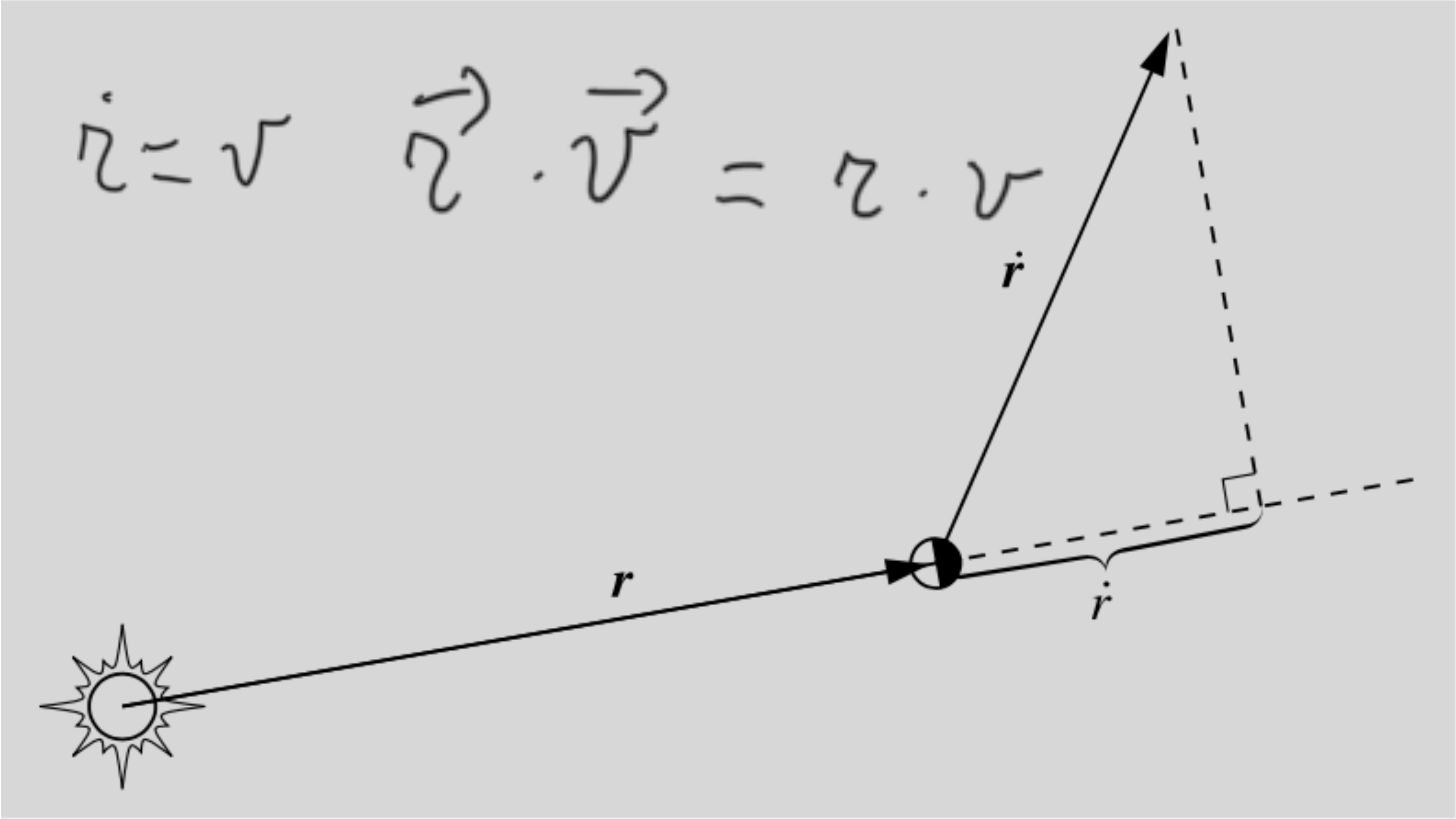
$$(\vec a \times \vec b) \times \vec c =$$

$$-\vec c \times (\vec a \times \vec b)$$

$$-\vec c \times (\vec a \times \vec b) = -\vec a(\vec c \cdot \vec b) + \vec b(\vec c \cdot \vec a)$$

$$\vec K \times \vec a = -\vec r\left(-\mu \frac{\vec r}{r^3} \cdot \vec v\right) + \vec v \cdot \left(-\mu \frac{\vec r}{r^3} \cdot \vec r\right) =$$

$$= -\frac{\mu}{r^3}\left[-(\vec r \cdot \vec v) \cdot \vec r + (\vec r \cdot \vec r) \cdot \vec v\right]$$



Forma dell'orbita

calcoliamo

$$\vec{a} \rightarrow -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{K} \times \vec{a} = (\vec{r} \times \vec{v}) \times (-\mu \, \vec{r}/r^3)$$

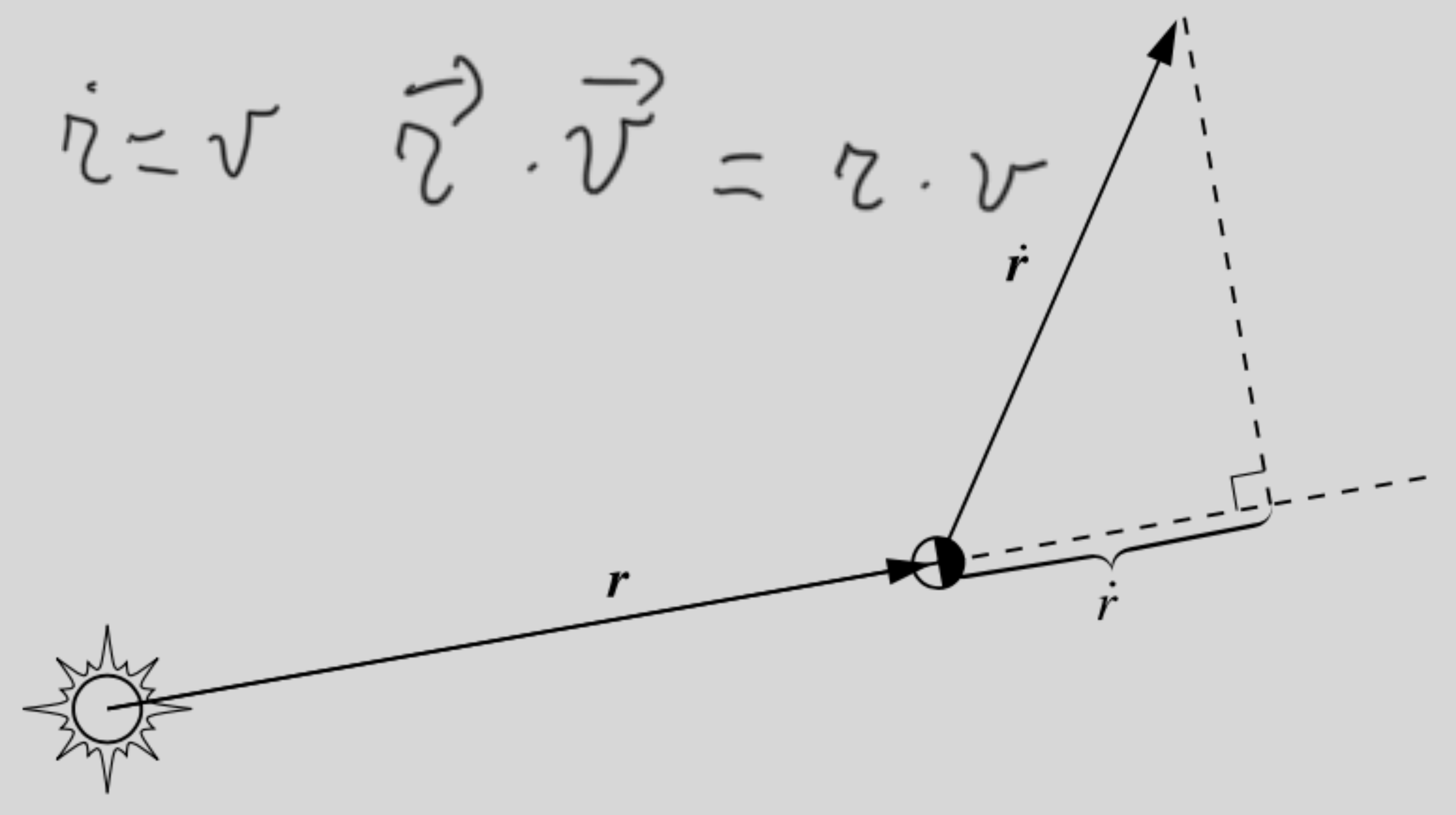
$$\vec{K} \rightarrow \vec{r} \times \vec{v}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} =$$

$$-\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$-\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) + \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$\dot{r} = v \qquad \vec{r} \cdot \vec{v} = r \cdot v$$



$$\vec{K} \times \vec{a} = -\vec{r}\left(-\frac{\mu \vec{r}}{r^3} \cdot \vec{v}\right) + \vec{v} \cdot \left(-\frac{\mu \vec{r}}{r^3} \cdot \vec{r}\right) =$$

$$= -\frac{\mu}{r^3}\left[-(\vec{r} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{v}\right]$$

$$= -\frac{\mu}{r^3}\left(-r v \cdot \vec{r} + r^2 \cdot \vec{v}\right) =$$

Forma dell'orbita

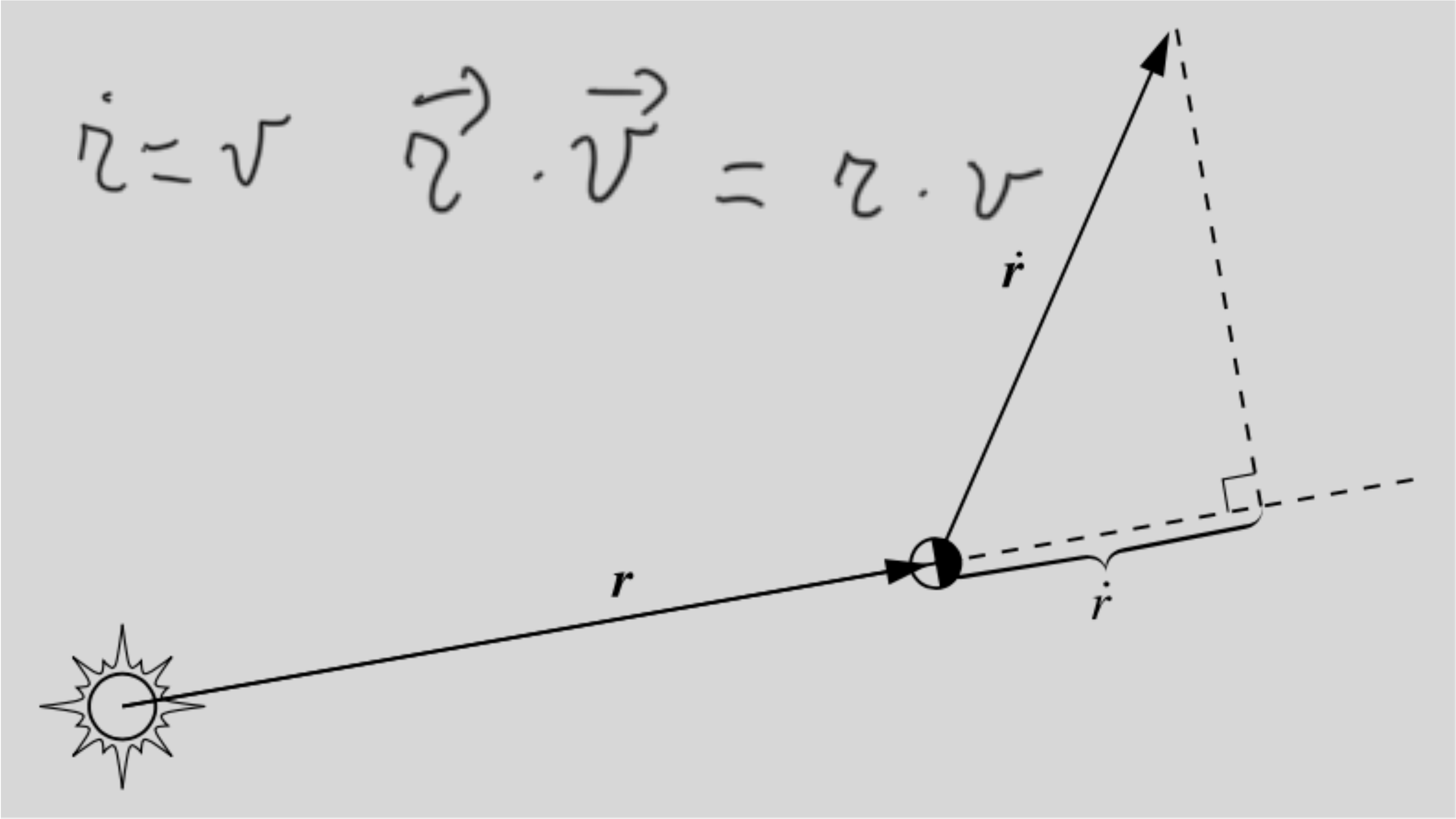
calcoliamo

$$\vec{K}\times\vec{a} = (\vec{r}\times\vec{v})\times\left(-\mu\,\vec{r}/r^3\right)$$

$$\vec{K} = \vec{r}\times\vec{v} \qquad \vec{a} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$-\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = -\vec{a}(\vec{c}\cdot\vec{b}) + \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a})$$



$$\dot{r} = v \qquad \vec{r}\cdot\vec{v} = r\cdot v$$

$$\vec{K}\times\vec{a} = -\vec{r}\left(-\mu\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{v}\right) + \vec{v}\cdot\left(-\mu\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{r}\right) =$$

$$= -\frac{\mu}{r^3}\left[-(\vec{r}\cdot\vec{v})\cdot\vec{r} + (\vec{r}\cdot\vec{r})\cdot\vec{v}\right]$$

$$= -\frac{\mu}{r^3}\left(-rv\cdot\vec{r} + r^2\cdot\vec{v}\right) = -\mu\left(-\frac{v\,\vec{r}}{r^2} + \frac{\vec{v}}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\mu\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Forma dell'orbita

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

Forma dell'orbita

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} \right)$$

Forma dell'orbita

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$$\left(\vec{K} = \text{cost}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

Forma dell'orbita

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$(\vec{K} = \text{cost})$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

Forma dell'orbita

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$$(\vec{K} = \text{cost})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

Forma dell'orbita

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$$\left(\vec{K} = \text{cost}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\vec{K} \times v + \mu \frac{\vec{r}}{r} = \text{const} = -\mu \vec{e}$$

Forma dell'orbita

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$$\left(\vec{K} = \text{cost}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\boxed{\vec{K} \times v + \mu \frac{\vec{r}}{r} = \text{const} = -\mu \vec{e}}$$

Forma dell'orbita

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$$(\vec{K} = \text{cost})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\boxed{\vec{K} \times v + \mu \frac{\vec{r}}{r} = \text{const} = -\mu \vec{e}}$$

nota che ***k*** x ***v*** sta nel piano orbitale, come ***r***: ***e*** quindi sta nel piano orbitale

Forma dell’orbita

$$\vec{K}\times\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(-\mu\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{K}\times\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K}\times\vec{v}\right)$$

$$\left(\vec{k} = cost\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(-\mu\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{K}\times\vec{v}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K}\times\vec{v} + \mu\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K}\times\vec{v} + \mu\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\boxed{\vec{K}\times v + \mu\frac{\vec{r}}{r} = const = -\mu\vec{e}}$$

nota che ***k*** x ***v*** sta nel piano orbitale, come ***r***: ***e*** quindi sta nel piano orbitale

L’orbita di un oggetto nel campo gravitazionale di un altro oggetto è una sezione conica: ellisse, parabola o iperbole. Il vettore ***e*** punta in direzione del pericentro, dove l’oggetto orbitante è più vicino al corpo centrale

Forma dell’orbita

$$\vec{K}\times\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(-\mu\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{K}\times\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K}\times\vec{v}\right)$$

$$(\vec{K} = \text{cost})$$

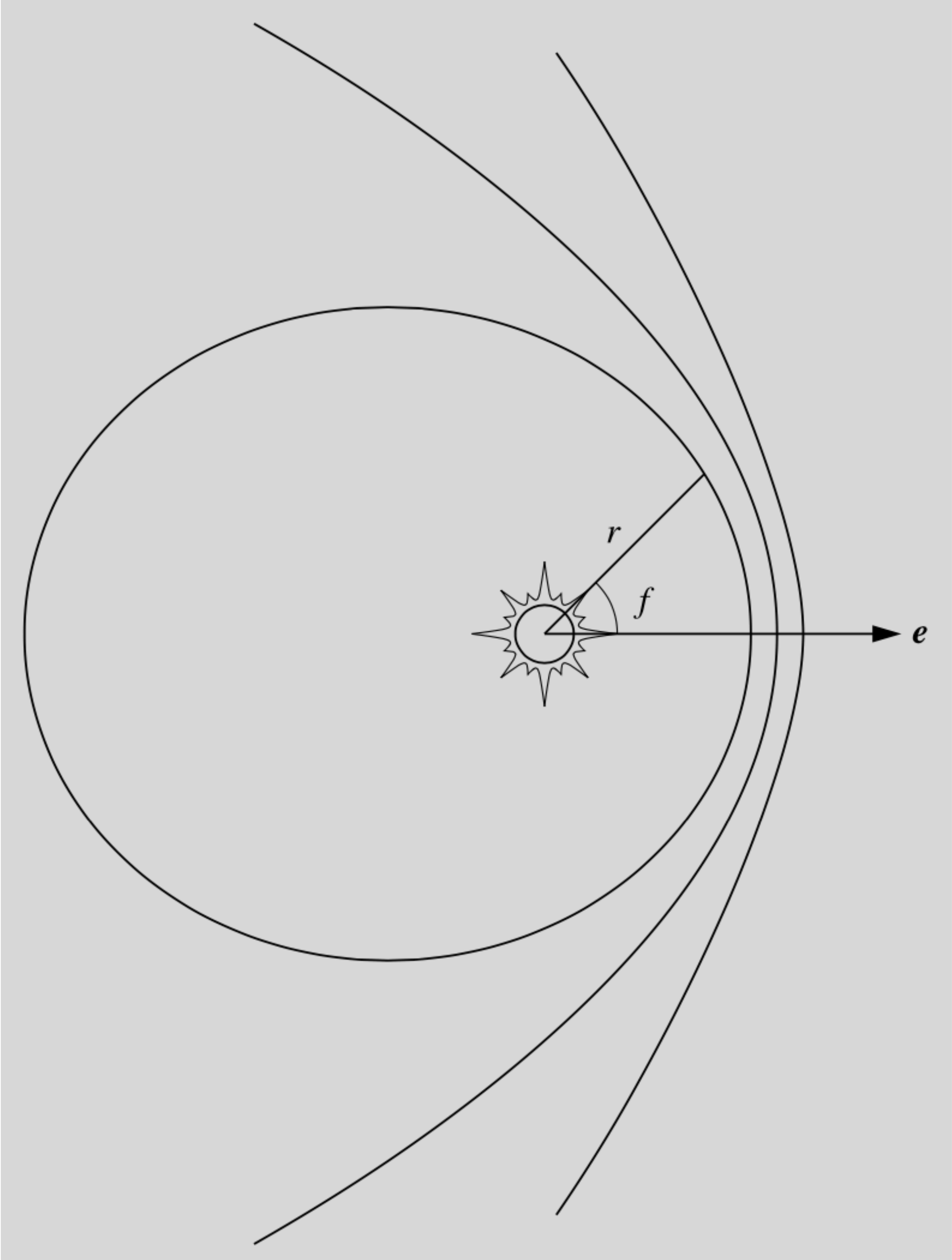
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(-\mu\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{K}\times\vec{v}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K}\times\vec{v} + \mu\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K}\times\vec{v} + \mu\frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\boxed{\vec{K}\times v + \mu\frac{\vec{r}}{r} = \text{const} = -\mu\vec{e}}$$

nota che ***k*** x ***v*** sta nel piano orbitale, come ***r***: ***e*** quindi sta nel piano orbitale



L’orbita di un oggetto nel campo gravitazionale di un altro oggetto è una sezione conica: ellisse, parabola o iperbole. Il vettore ***e*** punta in direzione del pericentro, dove l’oggetto orbitante è più vicino al corpo centrale

Forma dell'orbita

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{K} \times \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

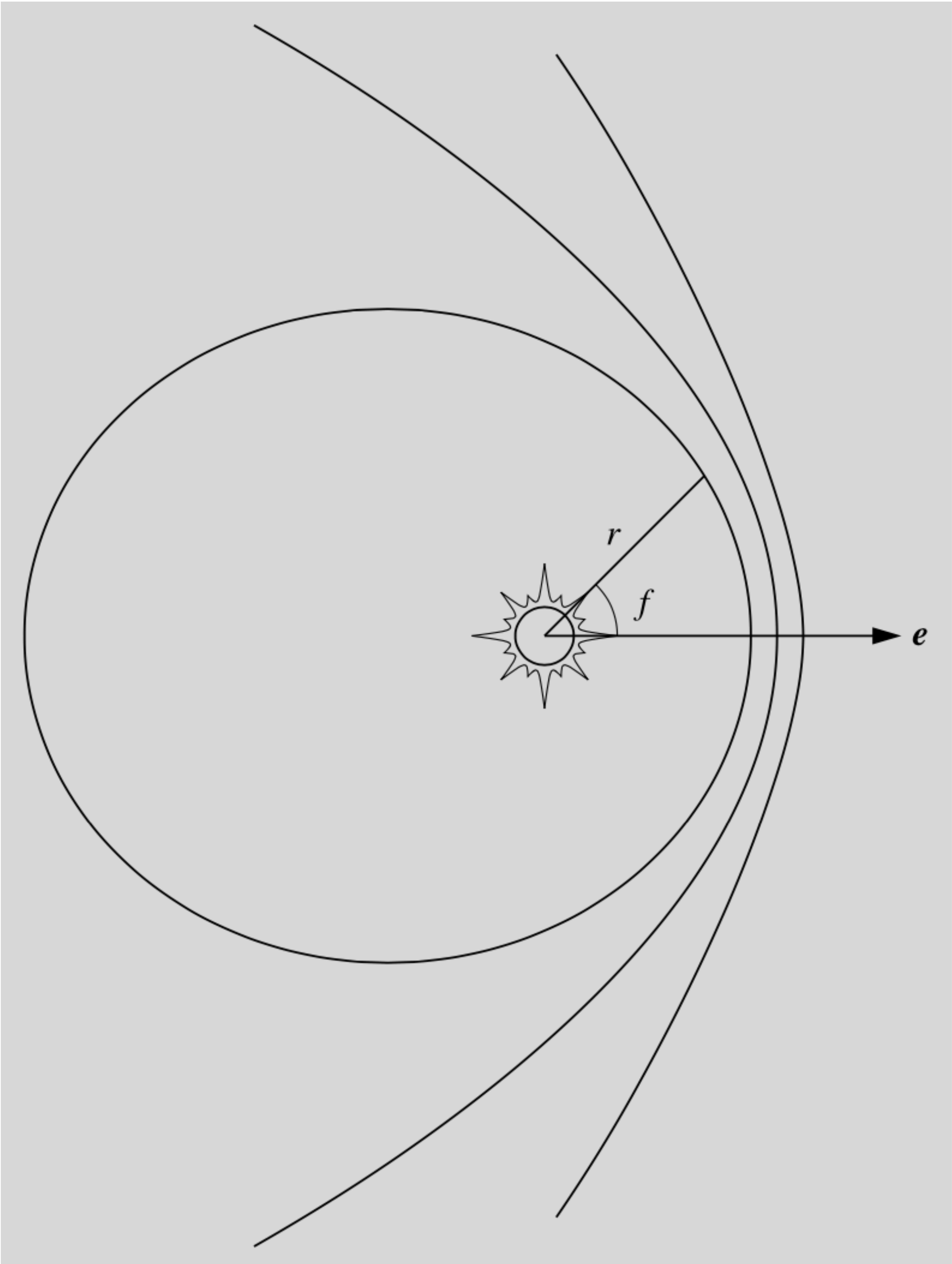
$$(\vec{K} = cost)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(-\mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{K} \times \vec{v} + \mu \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

$$\boxed{\vec{K} \times v + \mu \frac{\vec{r}}{r} = const = -\mu \vec{e}}$$



nota che ***k*** x ***v*** sta nel piano orbitale, come ***r***: ***e*** quindi sta nel piano orbitale

L'orbita di un oggetto nel campo gravitazionale di un altro oggetto è una sezione conica: ellisse, parabola o iperbole. Il vettore ***e*** punta in direzione del pericentro, dove l'oggetto orbitante è più vicino al corpo centrale

Energia dell'orbita

k=cost; ***e***=cost; per trovare un'altra costante calcoliamo:

$\vec{v} \cdot \vec{a} =$

Energia dell'orbita

k=cost; ***e***=cost; per trovare un'altra costante calcoliamo:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} =$$

$$\downarrow$$

$$-\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Energia dell’orbita

k=cost; ***e***=cost; per trovare un’altra costante calcoliamo:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = -\mu \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\mu \frac{r v}{r^3}$$

$$\vec{a} \downarrow -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Energia dell'orbita

k=cost; ***e***=cost; per trovare un'altra costante calcoliamo:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{r^3} = -\mu\frac{rv}{r^3}$$

$$\vec{a} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\frac{v}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

Energia dell'orbita

k=cost; ***e***=cost; per trovare un'altra costante calcoliamo:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{r^3} = -\mu\frac{r v}{r^3}$$

$$\vec{a} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\frac{v}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$

Energia dell'orbita

k=cost; ***e***=cost; per trovare un'altra costante calcoliamo:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{r^3} = -\mu\,\frac{r v}{r^3}$$

$$\vec{a} = -\mu\,\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\,\frac{v}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}v^2\right) = 0$$

Energia dell'orbita

k=cost; ***e***=cost; per trovare un'altra costante calcoliamo:

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\,\vec{v}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = -\mu\frac{r v}{r^3}$$

$$\vec{a} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\frac{v}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}v^2\right) = 0$$

Energia dell'orbita

k=cost; ***e***=cost; per trovare un'altra costante calcoliamo:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\,\vec{v}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = -\mu\frac{r v}{r^3}$$

$$\downarrow$$

$$-\mu\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\frac{v}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}v^2\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}}$$

h è chiamato integrale energia; l'energia totale del pianeta è *mh*

N.B.: energia e momento angolare dipendono dal sistema di riferimento; qui abbiamo scelto quello eliocentrico

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Energia dell'orbita

k=cost; ***e***=cost; per trovare un'altra costante calcoliamo:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\,\vec{v}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = -\mu\frac{r v}{r^3}$$

$$\vec{a} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\frac{v}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}v^2\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}}$$

h è chiamato integrale energia; l'energia totale del pianeta è *mh*

N.B.: energia e momento angolare dipendono dal sistema di riferimento; qui abbiamo scelto quello eliocentrico

Apparentemente abbiamo 7 integrali, uno di troppo; in realtà non sono indipendenti

Energia dell'orbita

k=cost; ***e***=cost; per trovare un'altra costante calcoliamo:

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{r^3} = -\mu\,\frac{r v}{r^3}$$

$$\vec{a} = -\mu\,\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -\mu\,\frac{v}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r} - \frac{1}{2}v^2\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}}$$

h è chiamato integrale energia; l'energia totale del pianeta è *mh*

N.B.: energia e momento angolare dipendono dal sistema di riferimento; qui abbiamo scelto quello eliocentrico

Apparentemente abbiamo 7 integrali, uno di troppo; in realtà non sono indipendenti

1. $\boxed{\vec{k}\cdot\vec{e} = 0}$

Forma dell'orbita

k=cost;
e=cost

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{e} = 0$$

Forma dell'orbita

k=cost;
e=cost

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{e} = 0$$

$$\mu^2(e^2 - 1) = 2hK^2$$

Forma dell'orbita

k=cost;
e=cost

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{e} = 0$$

$$\mu^2(e^2-1) = 2hK^2$$

in tutto abbiamo 7 integrali, ma le ultime 2 relazioni fanno scendere il numero di quelli indipendenti a 5; ce ne serve ancora uno

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Forma dell'orbita

$\boldsymbol{k}$=cost;
$\boldsymbol{e}$=cost

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{e} = 0$$

$$\mu^2(e^2-1) = 2hK^2$$

in tutto abbiamo 7 integrali, ma le ultime 2 relazioni fanno scendere il numero di quelli indipendenti a 5; ce ne serve ancora uno

non sappiamo però dove si trova il pianeta sull'orbita; stabiliamo quando si trova al perielio

Forma dell'orbita

$\boldsymbol{k}$=cost;
$\boldsymbol{e}$=cost

$$\mu \vec{e} = -\vec{K} \times \vec{v} - \mu \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}}$$

$$\boxed{\vec{K} \cdot \vec{e} = 0}$$

$$\boxed{\mu^2 (e^2 - 1) = 2 h K^2}$$

in tutto abbiamo 7 integrali, ma le ultime 2 relazioni fanno scendere il numero di quelli indipendenti a 5; ce ne serve ancora uno

non sappiamo però dove si trova il pianeta sull'orbita; stabiliamo quando si trova al perielio

Forma dell'orbita

k=cost;
e=cost

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}$$

$$\vec{K}\cdot\vec{e} = 0$$

$$\mu^2(e^2-1) = 2hK^2$$

in tutto abbiamo 7 integrali, ma le ultime 2 relazioni fanno scendere il numero di quelli indipendenti a 5; ce ne serve ancora uno

$$\mu\vec{e} = -\vec{K}\times\vec{v} - \mu\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mu^2e^2 = \underbrace{(\vec{K}\times\vec{v})}_{=Kv}\cdot(\vec{K}\times\vec{v}) + \mu^2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r^2} + 2(\vec{K}\times\vec{v})\cdot\frac{\mu\vec{r}}{r}$$

non sappiamo però dove si trova il pianeta sull'orbita; stabiliamo quando si trova al perielio

Forma dell’orbita

k=cost;
e=cost

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}}$$

$$\boxed{\vec{K}\cdot\vec{e} = 0}$$

$$\boxed{\mu^2(e^2-1) = 2hK^2}$$

$$\mu\vec{e} = -\vec{K}\times\vec{v} - \mu\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mu^2 e^2 = \underbrace{(\vec{K}\times\vec{v})}_{=Kv}\cdot(\vec{K}\times\vec{v}) + \mu^2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r^2} + 2(\vec{K}\times\vec{v})\cdot\frac{\mu\vec{r}}{r}$$

$$= K^2v^2 + \mu^2 + \frac{2\mu}{r}\underbrace{\vec{K}\times\vec{v}\cdot\vec{r}}_{=\vec{K}\cdot\vec{v}\times\vec{r} = -\vec{K}\cdot\overbrace{\vec{r}\times\vec{v}}^{\vec{K}}}$$

in tutto abbiamo 7 integrali, ma le ultime 2 relazioni fanno scendere il numero di quelli indipendenti a 5; ce ne serve ancora uno

non sappiamo però dove si trova il pianeta sull’orbita; stabiliamo quando si trova al perielio

Forma dell'orbita

k=cost;
e=cost

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}}$$

$$\boxed{\vec{K}\cdot\vec{e} = 0}$$

$$\boxed{\mu^2(e^2-1) = 2hK^2}$$

in tutto abbiamo 7 integrali, ma le ultime 2 relazioni fanno scendere il numero di quelli indipendenti a 5; ce ne serve ancora uno

$$\mu\vec{e} = -\vec{K}\times\vec{v} - \mu\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mu^2 e^2 = \underbrace{(\vec{K}\times\vec{v})}_{=Kv}\cdot(\vec{K}\times\vec{v}) + \mu^2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r^2} + 2(\vec{K}\times\vec{v})\cdot\frac{\mu\vec{r}}{r}$$

$$= K^2v^2 + \mu^2 + \frac{2\mu}{r}\underbrace{\vec{K}\times\vec{v}\cdot\vec{r}}_{=\vec{K}\cdot\vec{v}\times\vec{r} = -\vec{K}\cdot\overbrace{\vec{r}\times\vec{v}}^{\vec{K}}}$$

$$\Rightarrow \mu^2 e^2 - \mu^2 = K^2v^2 - \frac{2\mu}{r}K^2$$

$$\mu^2(e^2-1) = 2K^2\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}\right) = 2K^2h$$

non sappiamo però dove si trova il pianeta sull'orbita; stabiliamo quando si trova al perielio

Forma dell'orbita

$$\boxed{\begin{array}{l}\boldsymbol{k}=\text{cost};\\ \boldsymbol{e}=\text{cost}\end{array}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = h = \text{cost}}$$

$$\boxed{\vec{K}\cdot\vec{e} = 0}$$

$$\boxed{\mu^2(e^2-1) = 2hK^2}$$

in tutto abbiamo 7 integrali, ma le ultime 2 relazioni fanno scendere il numero di quelli indipendenti a 5; ce ne serve ancora uno

$$\mu\vec{e} = -\vec{K}\times\vec{v} - \mu\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\mu^2 e^2 = \underbrace{(\vec{K}\times\vec{v})}_{=Kv}\cdot(\vec{K}\times\vec{v}) + \mu^2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r^2} + 2(\vec{K}\times\vec{v})\cdot\mu\frac{\vec{r}}{r}$$

$$= K^2v^2 + \mu^2 + \frac{2\mu}{r}\underbrace{\vec{K}\times\vec{v}\cdot\vec{r}}_{=\vec{K}\cdot\vec{v}\times\vec{r} = -\vec{K}\cdot\overbrace{\vec{r}\times\vec{v}}^{\vec{K}}}$$

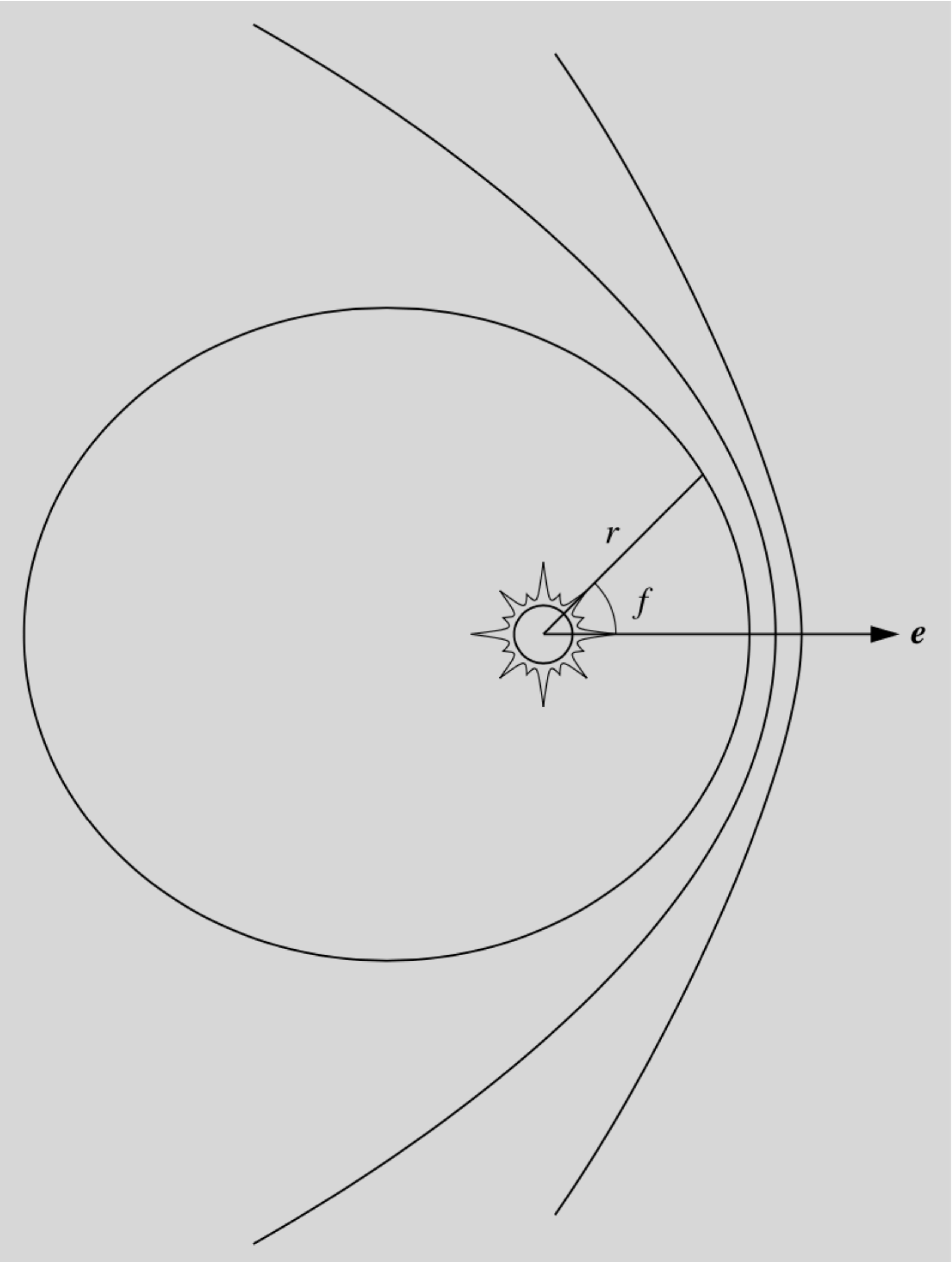
$$\Rightarrow \mu^2e^2 - \mu^2 = K^2v^2 - \frac{2\mu}{r}K^2$$

$$\mu^2(e^2-1) = 2K^2\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}\right) = 2K^2h$$

$$\Rightarrow \mu^2(e^2-1) = 2hK^2$$

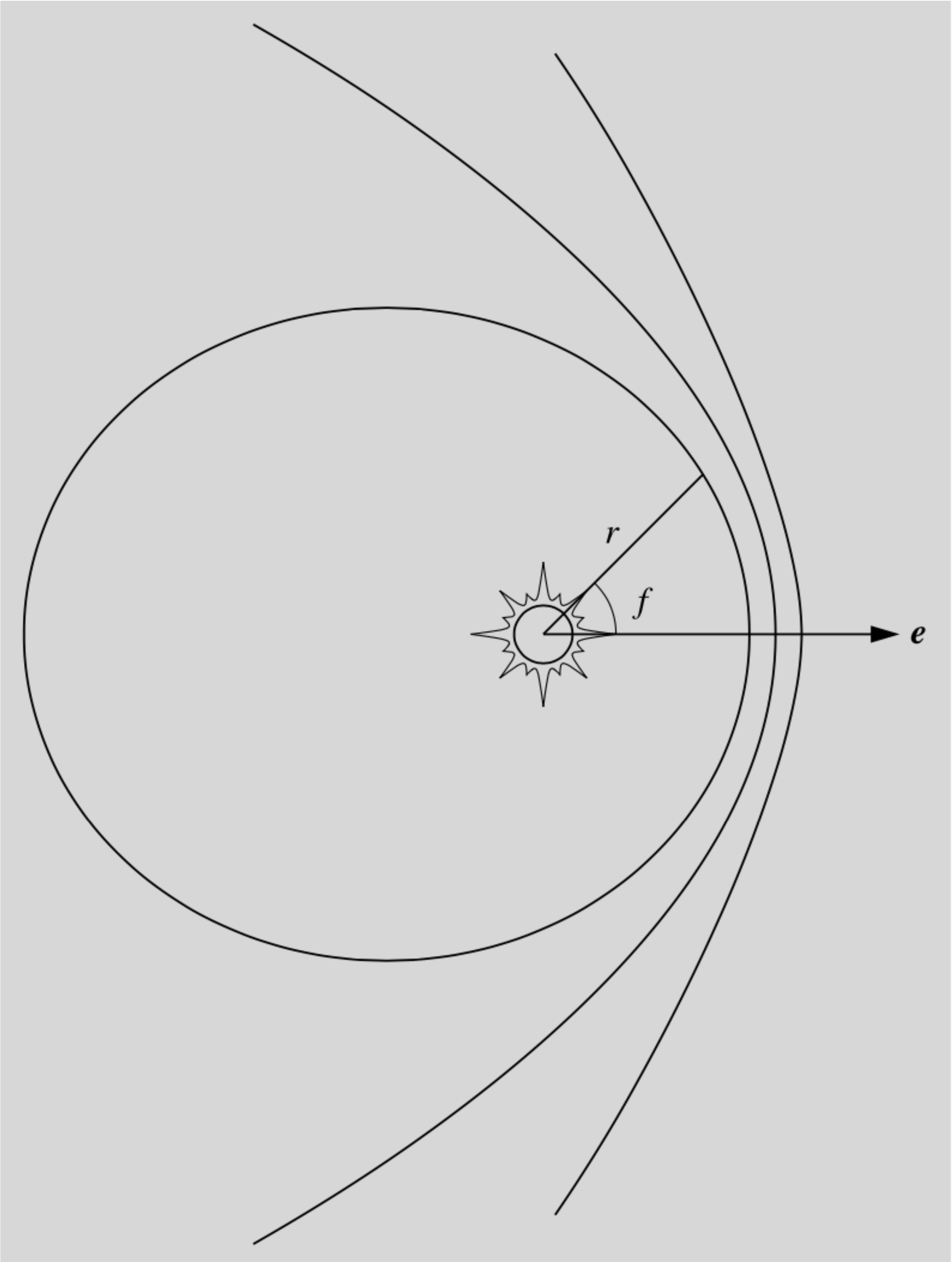
non sappiamo però dove si trova il pianeta sull'orbita; stabiliamo quando si trova al perielio

1 legge di Keplero



definiamo anomalia vera l’angolo f, tra $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{r}$

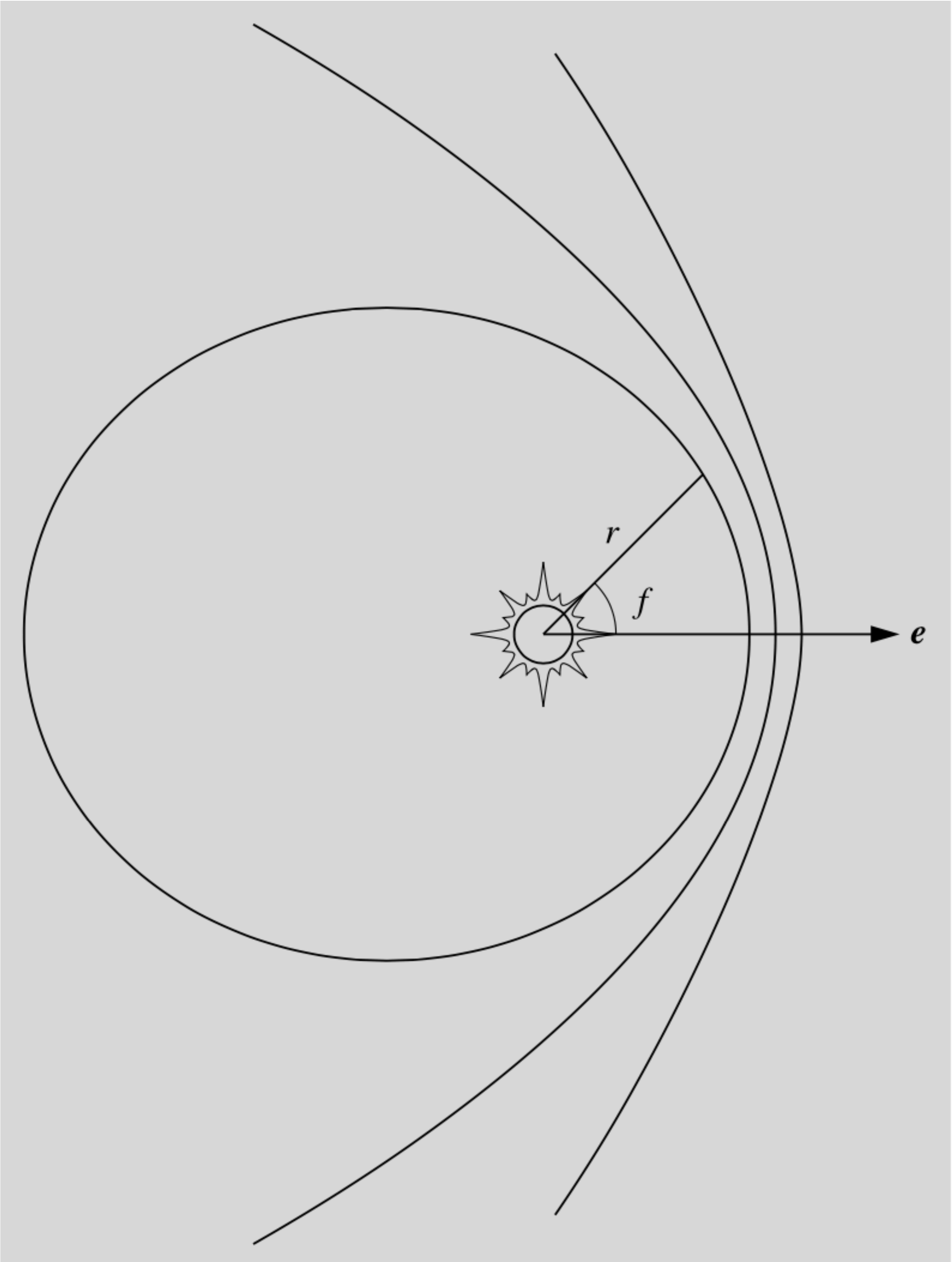
1 legge di Keplero



$\vec{r} \cdot \vec{e} = re \cos f$

definiamo anomalia vera l'angolo *f*, tra ***e*** e ***r***

1 legge di Keplero

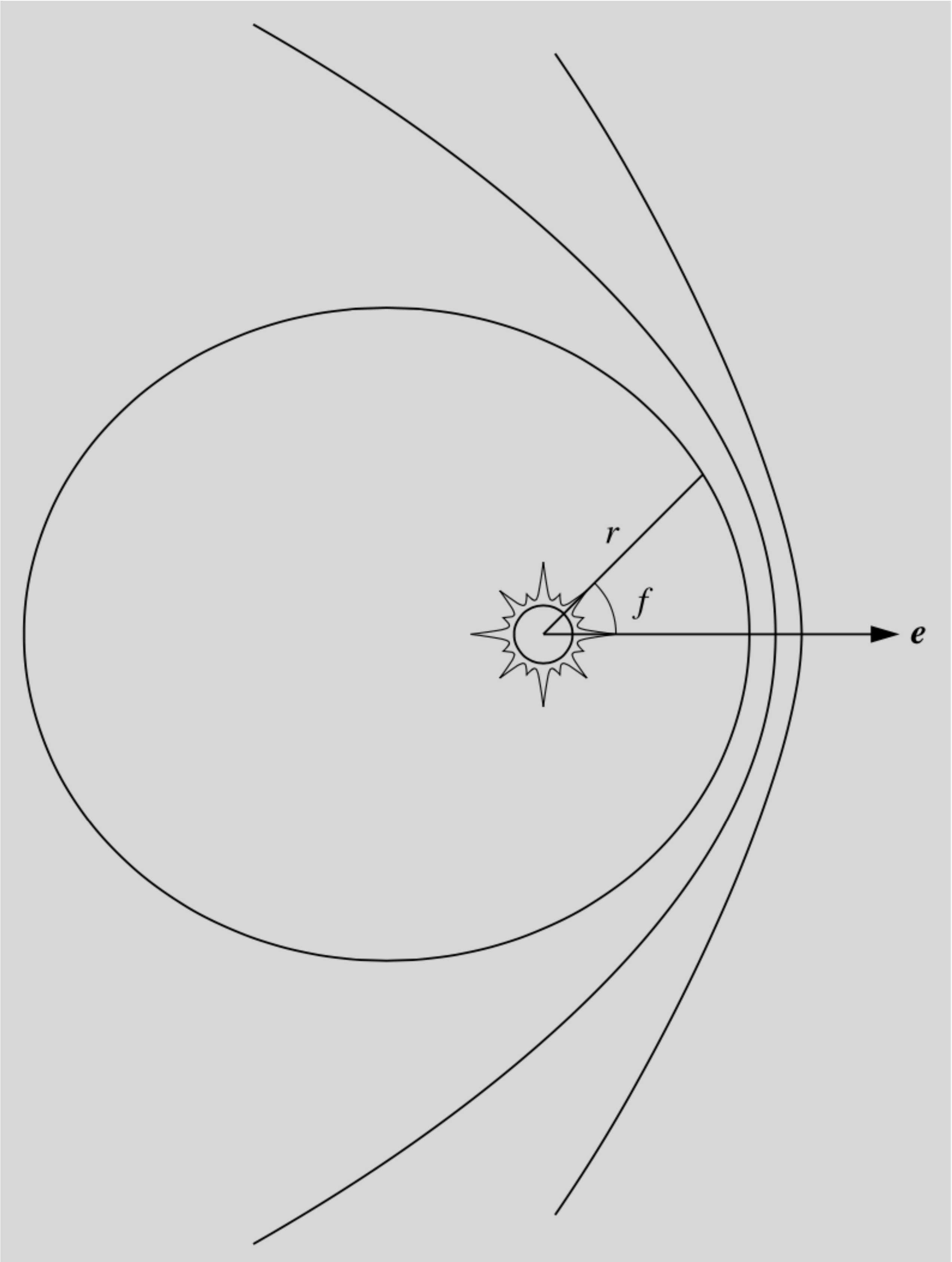


$$\vec{r} \cdot \vec{e} = re \cos f$$

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = \vec{r} \cdot \left(- \frac{\vec{K} \times \vec{v}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \right) =$$

definiamo anomalia vera l'angolo *f*, tra ***e*** e ***r***

1 legge di Keplero



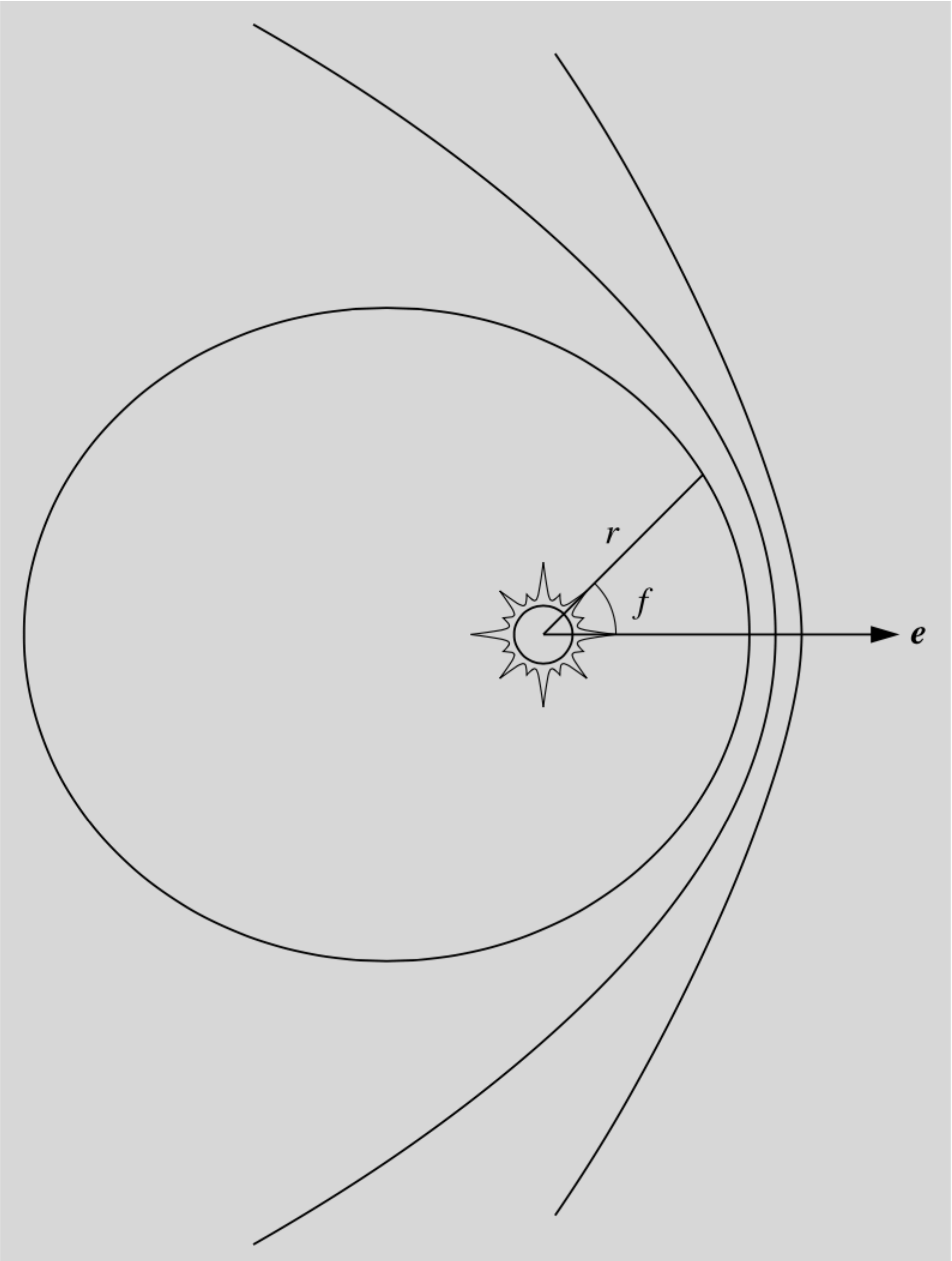
definiamo anomalia vera l'angolo *f*, tra ***e*** e ***r***

$$\vec{r}\cdot\vec{e} = r e \cos f$$

$$\vec{r}\cdot\vec{e} = \vec{r}\cdot\left(-\frac{\vec{K}\times\vec{v}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(\underbrace{\vec{r}\cdot\vec{K}\times\vec{v}}_{=\vec{K}\cdot\vec{v}\times\vec{r}} + \mu\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r}\right)$$

1 legge di Keplero



definiamo anomalia vera l'angolo *f*, tra ***e*** e ***r***

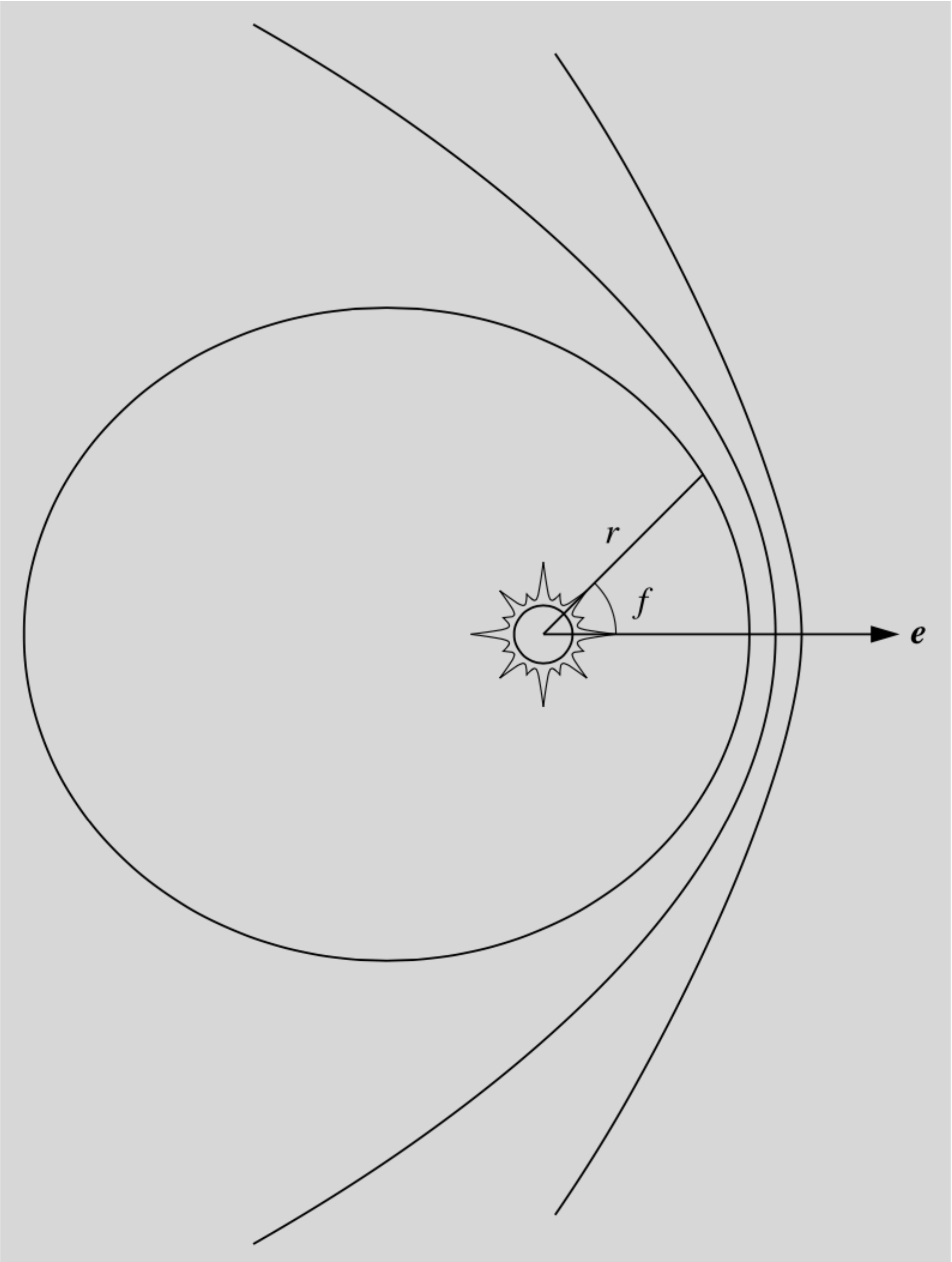
$$\vec{r} \cdot \vec{e} = r e \cos f$$

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = \vec{r} \cdot \left(-\frac{\vec{K} \times \vec{v}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu} \left(\underbrace{\vec{r} \cdot \vec{K} \times \vec{v}}_{= \vec{K} \cdot \vec{v} \times \vec{r}} + \mu \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} \right)$$

$$= -\frac{1}{\mu} \left(-K^2 + \mu r \right) = \frac{K^2}{\mu} - r$$

1 legge di Keplero



$$\vec{r}\cdot\vec{e} = re\cos f$$

$$re\cos f = \frac{K^2}{\mu} - r$$

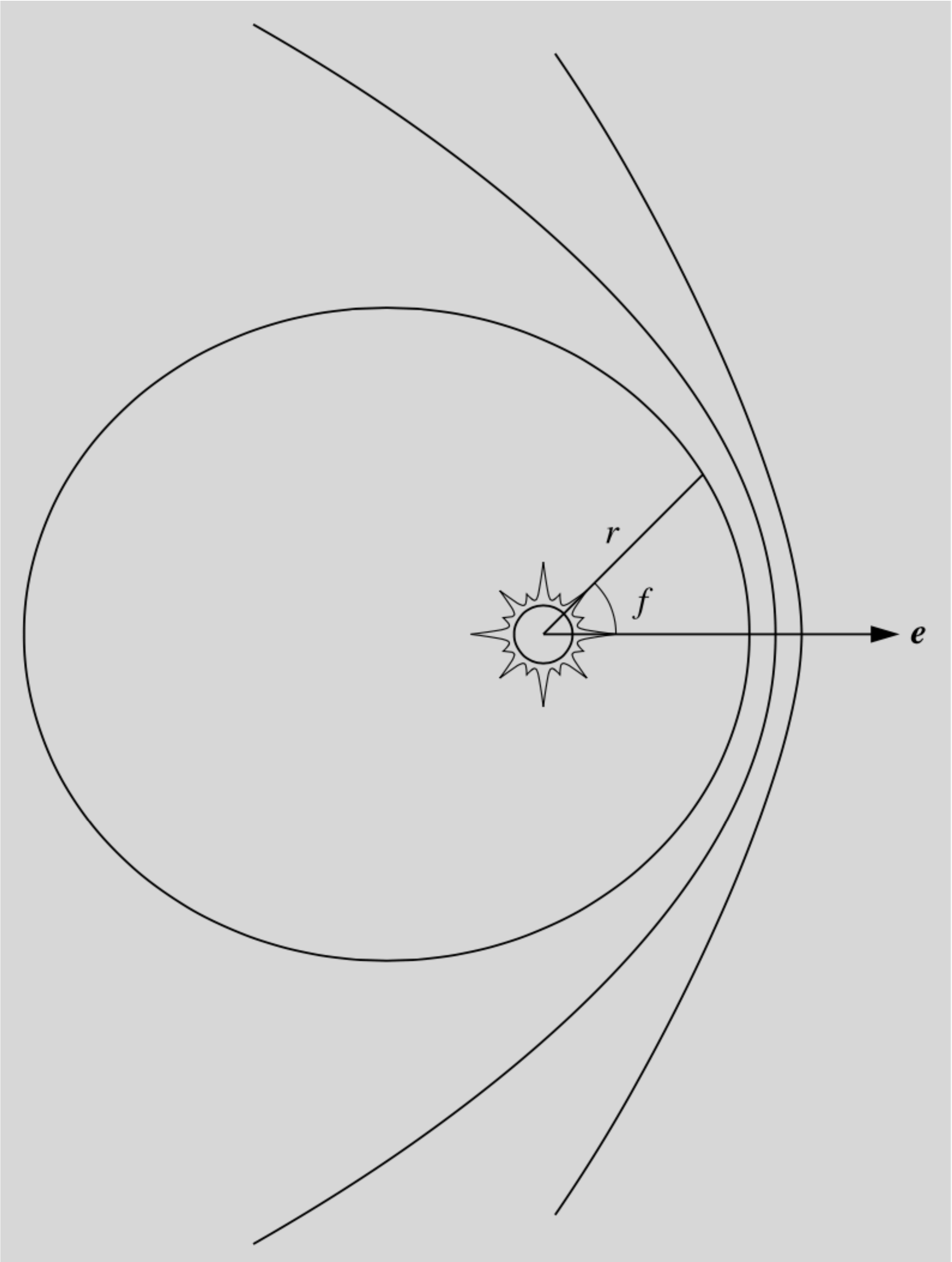
$$\vec{r}\cdot\vec{e} = \vec{r}\cdot\left(-\frac{\vec{K}\times\vec{v}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(\underbrace{\vec{r}\cdot\vec{K}\times\vec{v}}_{=\vec{K}\cdot\vec{v}\times\vec{r}} + \mu\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(-K^2 + \mu r\right) = \frac{K^2}{\mu} - r$$

definiamo anomalia vera l'angolo *f*, tra ***e*** e ***r***

1 legge di Keplero



definiamo anomalia vera l'angolo *f*, tra ***e*** e ***r***

$$\vec{r}\cdot\vec{e} = re\cos f$$

$$\vec{r}\cdot\vec{e} = \vec{r}\cdot\left(-\frac{\vec{K}\times\vec{v}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}\right) =$$

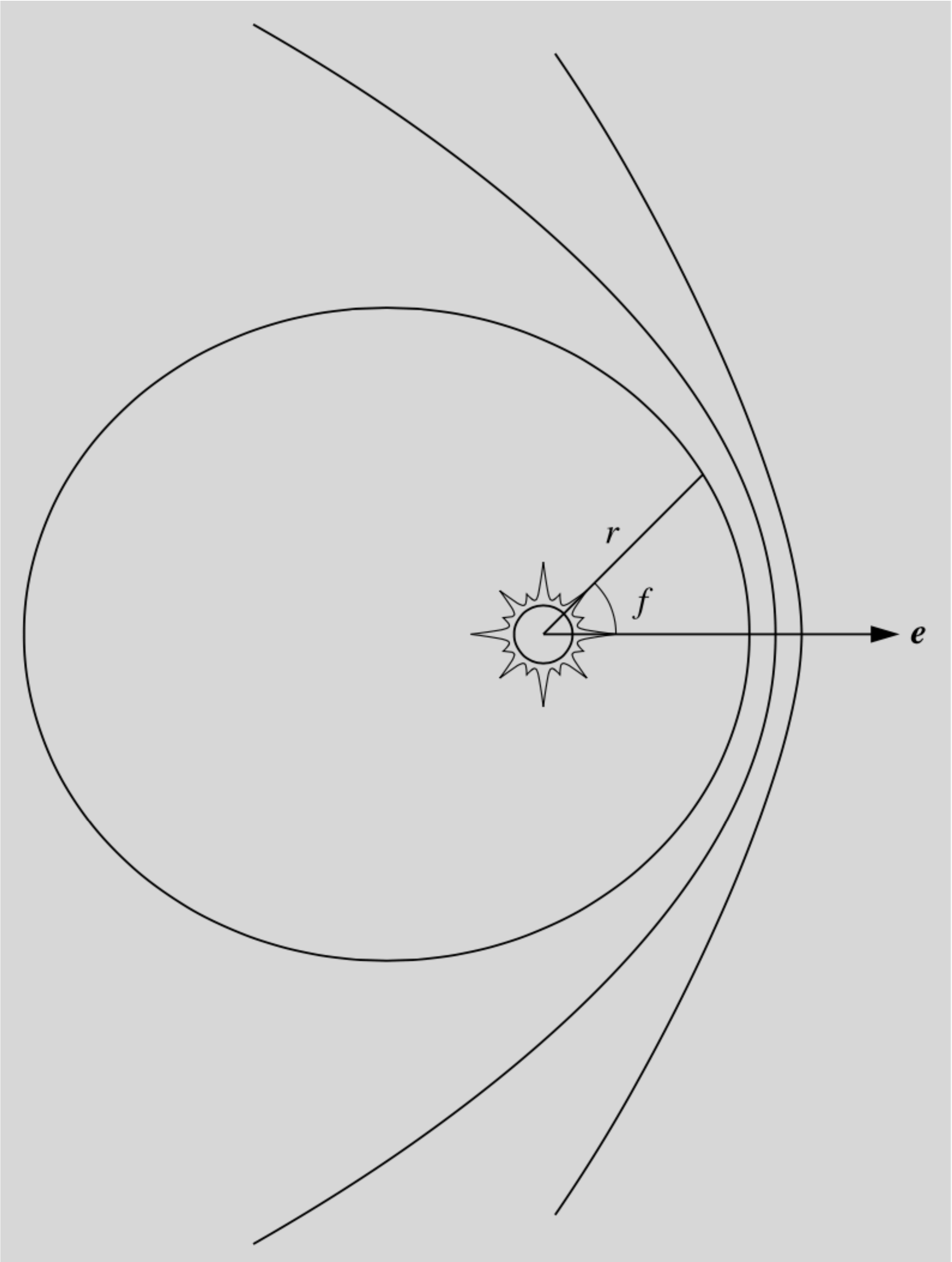
$$= -\frac{1}{\mu}\left(\underbrace{\vec{r}\cdot\vec{K}\times\vec{v}}_{=\vec{K}\cdot\vec{v}\times\vec{r}} + \mu\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(-K^2 + \mu r\right) = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$re\cos f = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$r\left(e\cos f + 1\right) = \frac{K^2}{\mu}$$

1 legge di Keplero



definiamo anomalia vera l'angolo f, tra $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{r}$

$$\vec{r}\cdot\vec{e} = re\cos f$$

$$\vec{r}\cdot\vec{e} = \vec{r}\cdot\left(-\frac{\vec{K}\times\vec{v}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(\underbrace{\vec{r}\cdot\vec{K}\times\vec{v}}_{=\vec{K}\cdot\vec{v}\times\vec{r}} + \mu\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r}\right)$$

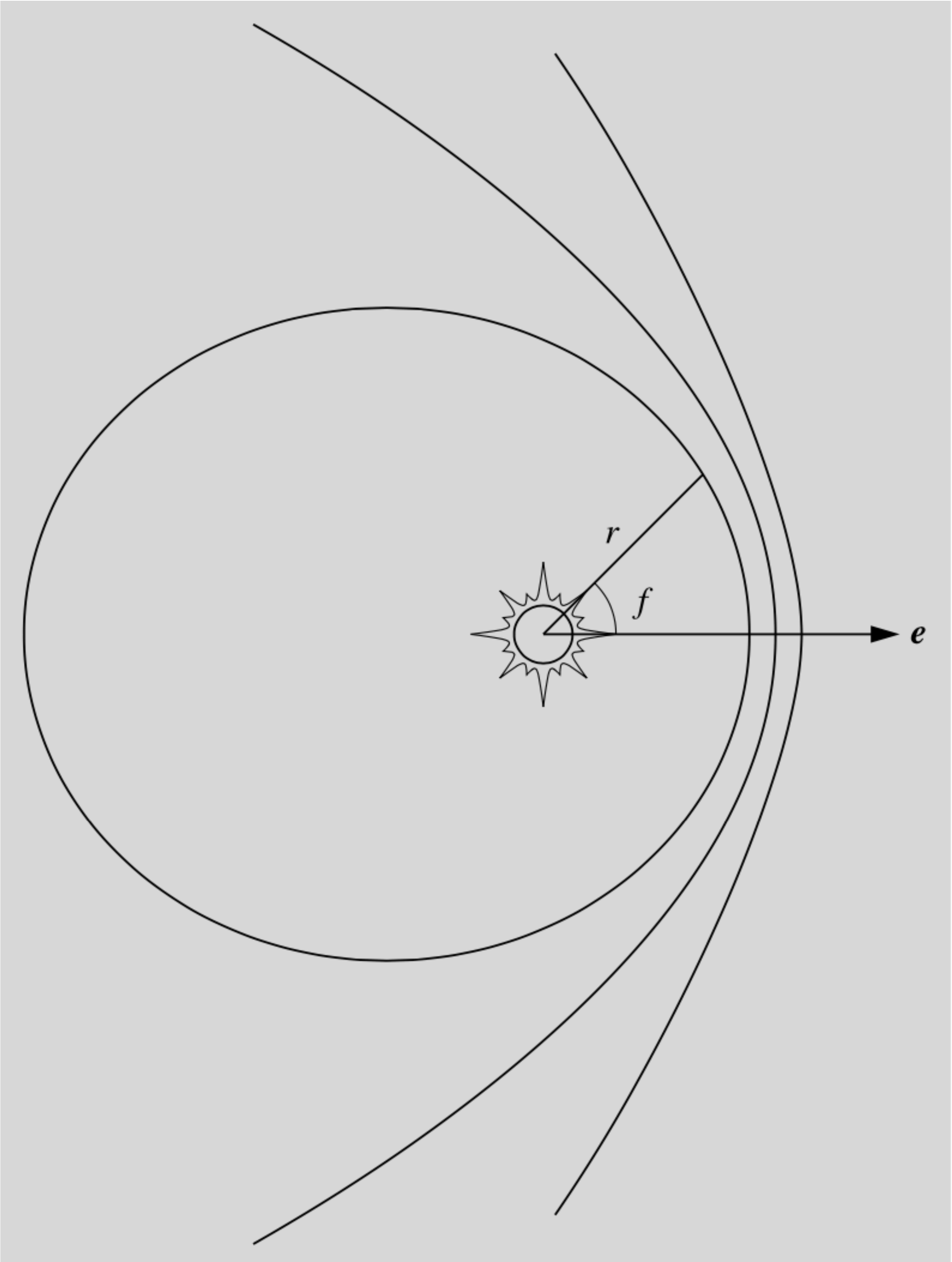
$$= -\frac{1}{\mu}\left(-K^2 + \mu r\right) = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$re\cos f = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$r(e\cos f + 1) = \frac{K^2}{\mu}$$

$$r = \frac{K^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos f}$$

1 legge di Keplero



$$\vec{r}\cdot\vec{e} = re\cos f$$

$$\vec{r}\cdot\vec{e} = \vec{r}\cdot\left(-\frac{\vec{K}\times\vec{v}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(\underbrace{\vec{r}\cdot\vec{K}\times\vec{v}}_{=\vec{K}\cdot\vec{v}\times\vec{r}} + \mu\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(-K^2 + \mu r\right) = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$re\cos f = \frac{K^2}{\mu} - r$$

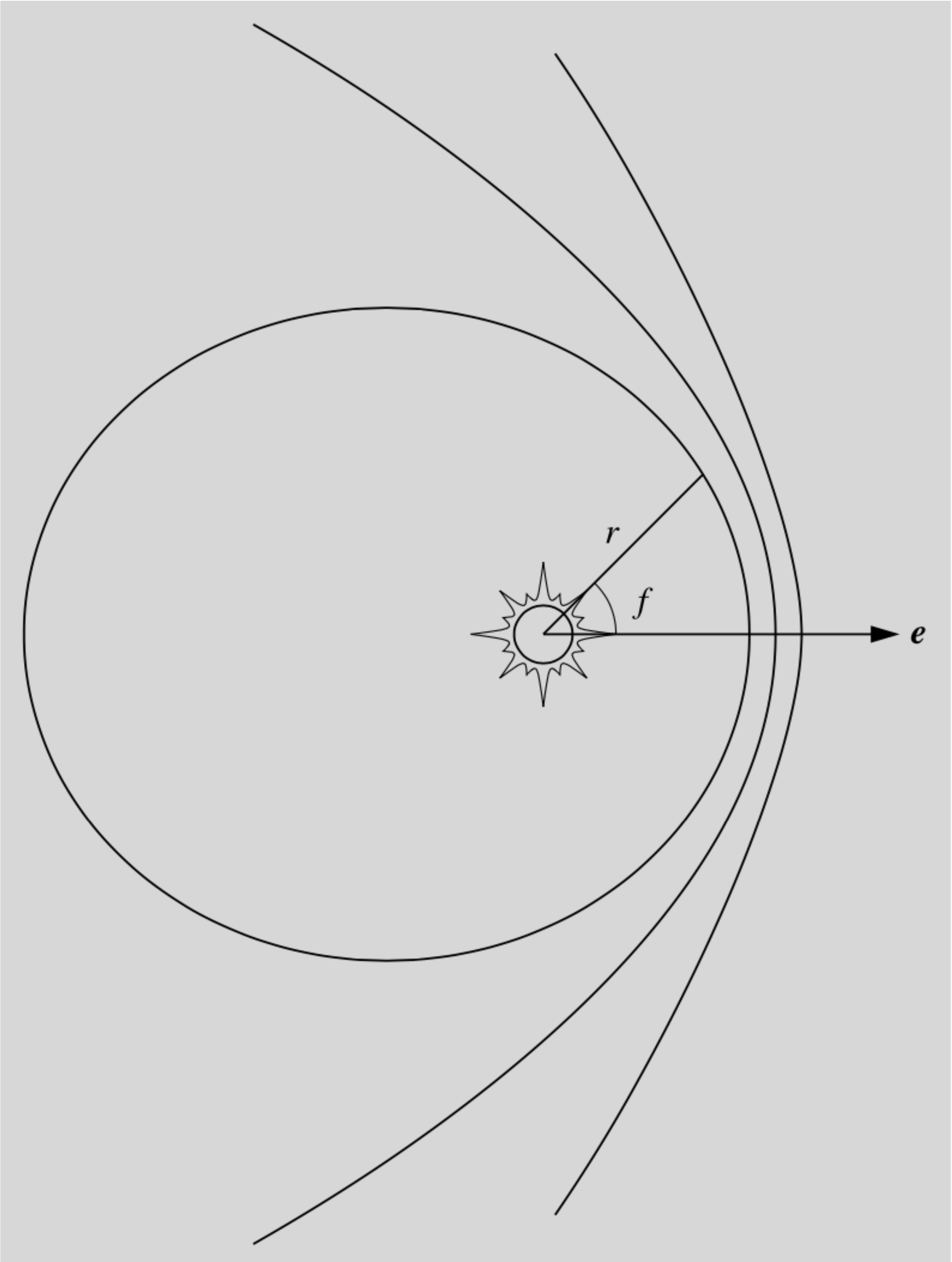
$$r(e\cos f + 1) = \frac{K^2}{\mu}$$

$$r = \frac{K^2}{\mu}\,\frac{1}{1 + e\cos f}$$

equazione di una sezione conica in coordinate polari

definiamo anomalia vera l’angolo *f*, tra ***e*** e ***r***

1 legge di Keplero



$$\vec r\cdot\vec e = re\cos f$$

$$\vec r\cdot\vec e = \vec r\cdot\left(-\frac{\vec K\times\vec v}{\mu} - \frac{\vec r}{r}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(\underbrace{\vec r\cdot\vec K\times\vec v}_{=\vec K\cdot\vec v\times\vec r} + \mu\frac{\vec r\cdot\vec r}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(-K^2+\mu r\right) = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$re\cos f = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$r\left(e\cos f + 1\right) = \frac{K^2}{\mu}$$

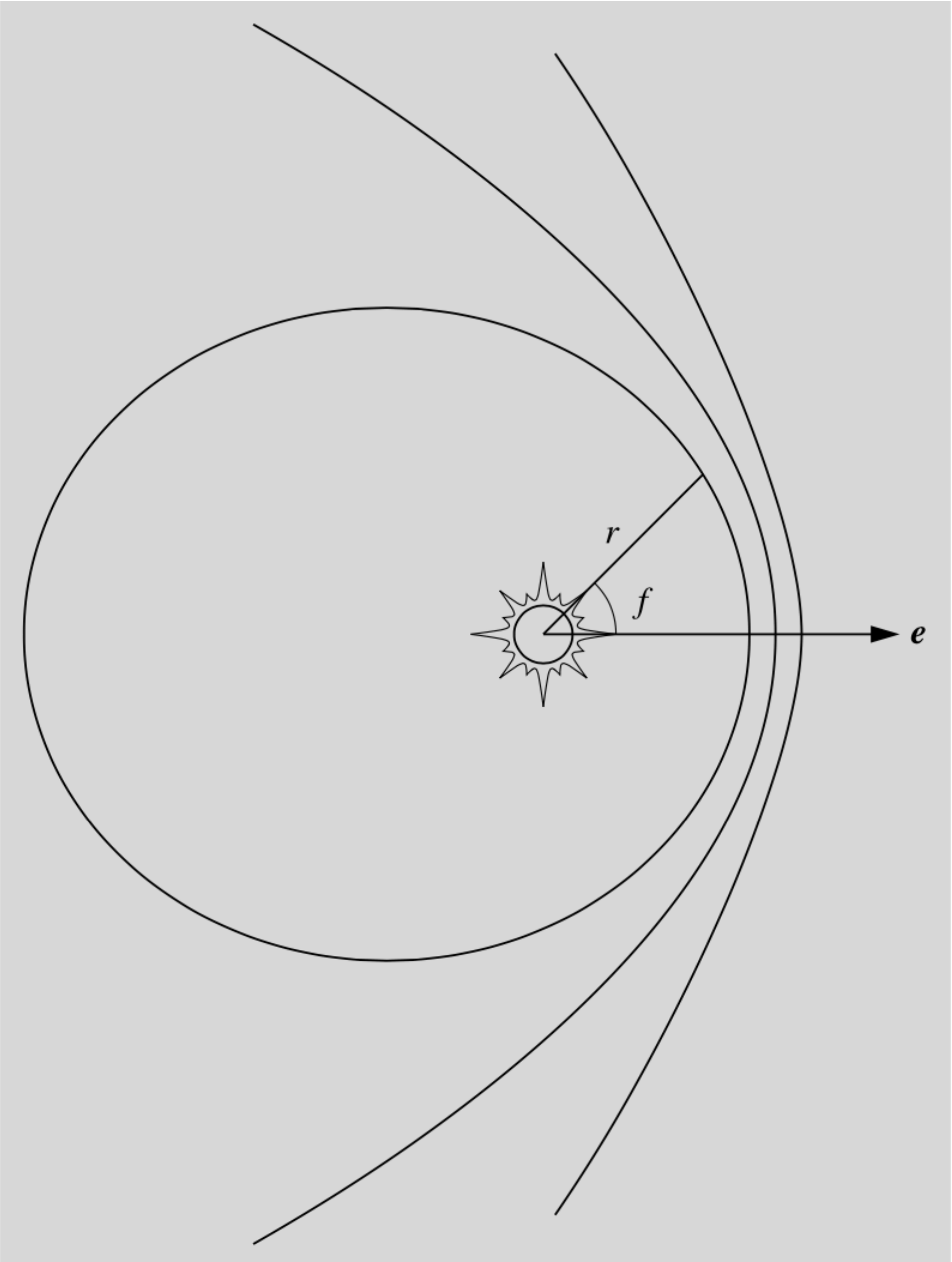
$$r = \frac{K^2}{\mu}\,\frac{1}{1+e\cos f}$$

equazione di una sezione conica in coordinate polari

definiamo anomalia vera l’angolo *f*, tra ***e*** e ***r***

|e| = eccentricità dell’orbita

1 legge di Keplero



$$\vec{r}\cdot\vec{e} = re\cos f$$

$$\vec{r}\cdot\vec{e} = \vec{r}\cdot\left(-\frac{\vec{K}\times\vec{v}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(\underbrace{\vec{r}\cdot\vec{K}\times\vec{v}}_{=\vec{K}\cdot\vec{v}\times\vec{r}} + \mu\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(-K^2 + \mu r\right) = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$re\cos f = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$r(e\cos f + 1) = \frac{K^2}{\mu}$$

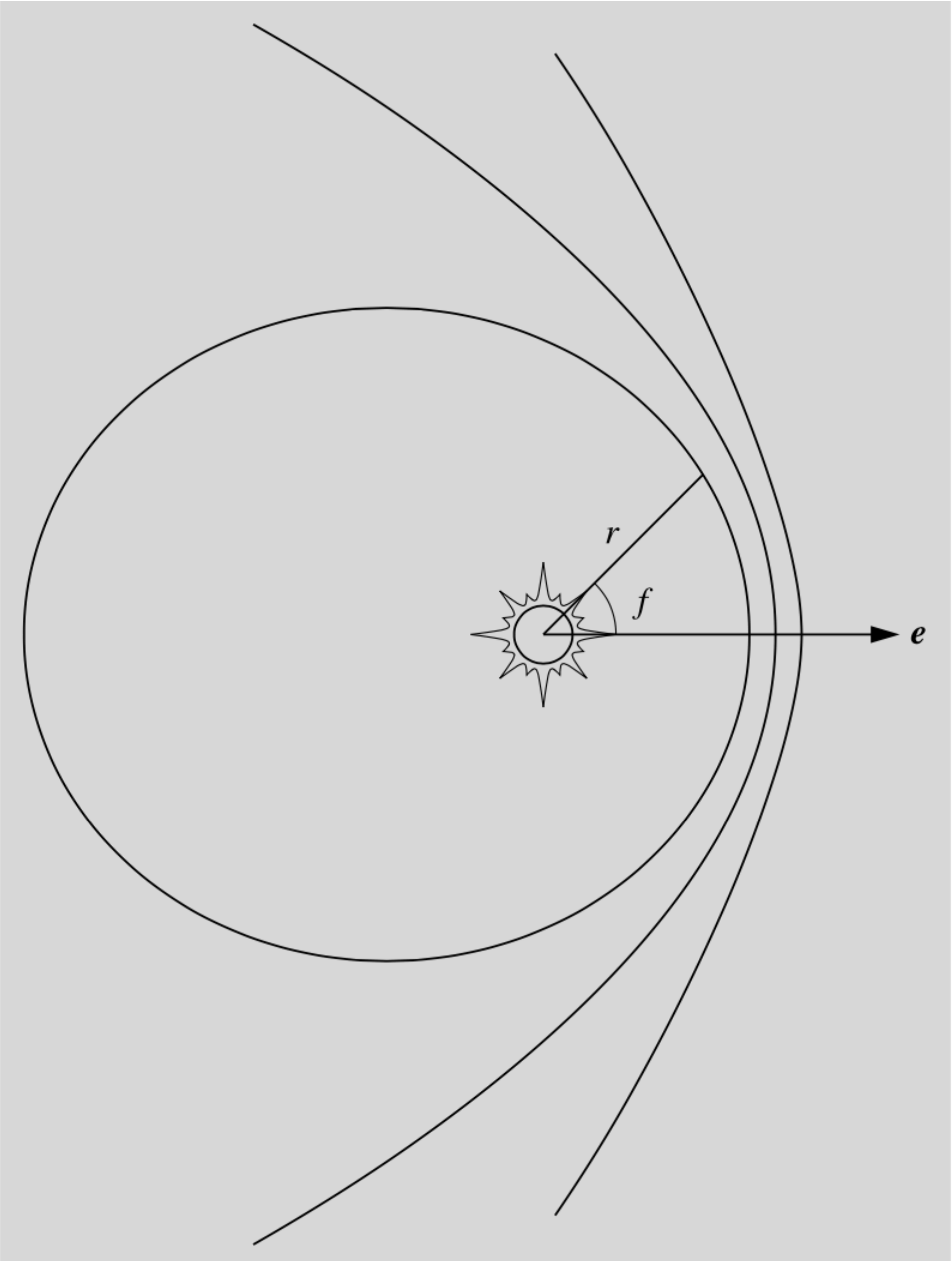
$$r = \frac{K^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos f}$$

equazione di una sezione conica in coordinate polari

definiamo anomalia vera l'angolo *f*, tra ***e*** e ***r***

$|e|$ = eccentricità dell'orbita
$$\begin{cases} e = 0 \rightarrow \text{cerchio} \\ 0 < e < 1 \rightarrow \text{ellisse} \\ e = 1 \rightarrow \text{parabola} \\ e > 1 \rightarrow \text{iperbole} \end{cases}$$

1 legge di Keplero



$$\vec r \cdot \vec e = re\cos f$$

$$\vec r \cdot \vec e = \vec r \cdot \left(-\frac{\vec K \times \vec v}{\mu} - \frac{\vec r}{r} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(\underbrace{\vec r \cdot \vec K \times \vec v}_{= \vec K \cdot \vec v \times \vec r} + \mu \frac{\vec r \cdot \vec r}{r} \right)$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(-K^2 + \mu r \right) = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$re\cos f = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$r(e\cos f + 1) = \frac{K^2}{\mu}$$

$$r = \frac{K^2}{\mu}\,\frac{1}{1 + e\cos f}$$

equazione di una sezione conica in coordinate polari

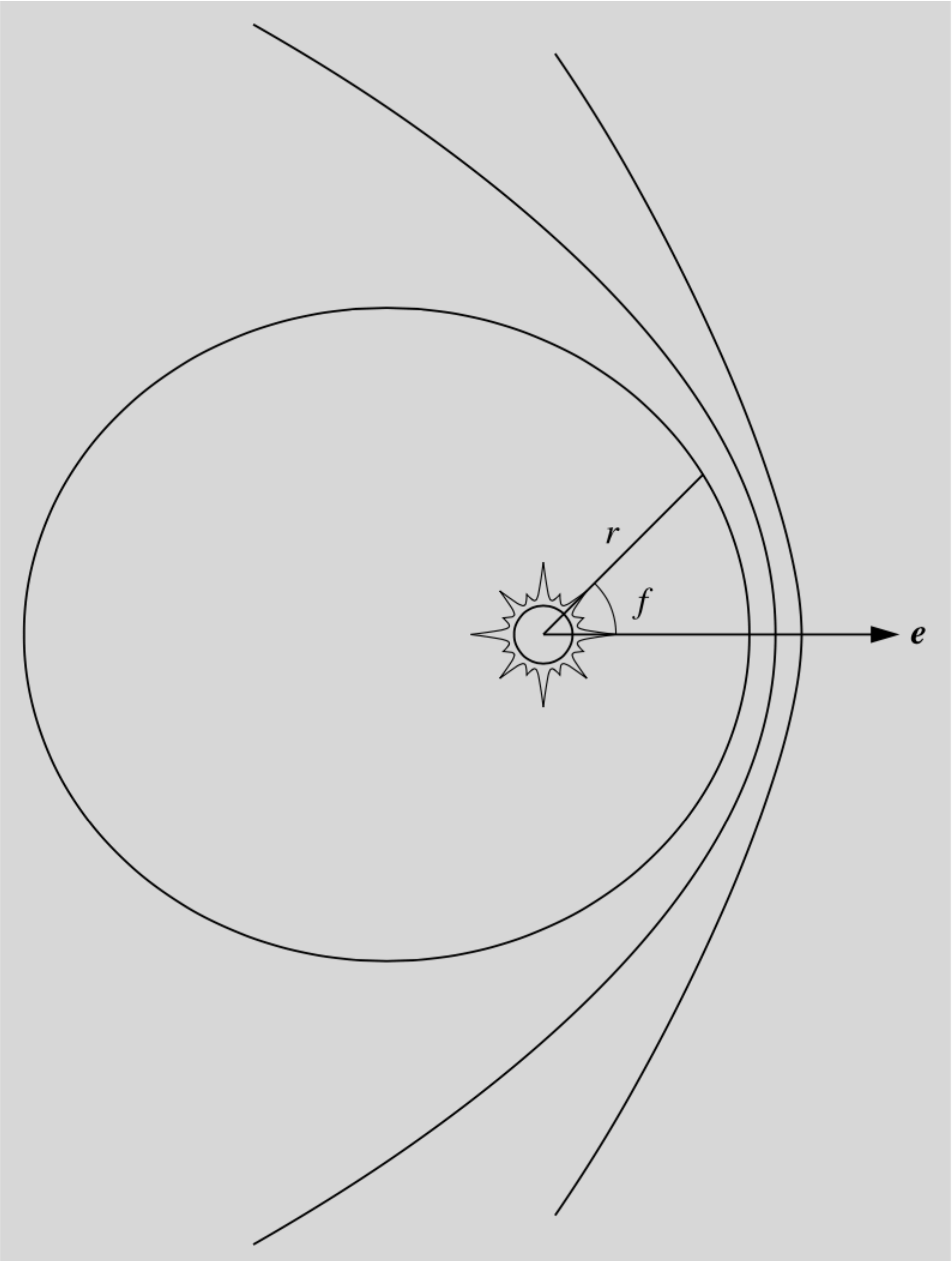
definiamo anomalia vera l’angolo f, tra ***e*** e ***r***

|e| = eccentricità dell’orbita
$$\begin{cases} e = 0 \rightarrow \text{cerchio} \\ 0 < e < 1 \rightarrow \text{ellisse} \\ e = 1 \rightarrow \text{parabola} \\ e > 1 \rightarrow \text{iperbole} \end{cases}$$

r minimo quando *f*=0

→ ***e*** punta il perielio

1 legge di Keplero



definiamo anomalia vera l'angolo *f*, tra ***e*** e ***r***

$$\vec r \cdot \vec e = r e \cos f$$

$$\vec r \cdot \vec e = \vec r \cdot \left(- \frac{\vec K \times \vec v}{\mu} - \frac{\vec r}{r} \right) =$$

$$= - \frac{1}{\mu} \left(-K^2 + \mu r \right) = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$r e \cos f = \frac{K^2}{\mu} - r$$

$$r (e \cos f + 1) = \frac{K^2}{\mu}$$

$$\frac{1}{1 + e \cos f}$$

Prima legge di Keplero
L'orbita dei pianeti intorno al Sole è un ellisse con il Sole in uno dei fuochi

equazione di una sezione conica in coordinate polari

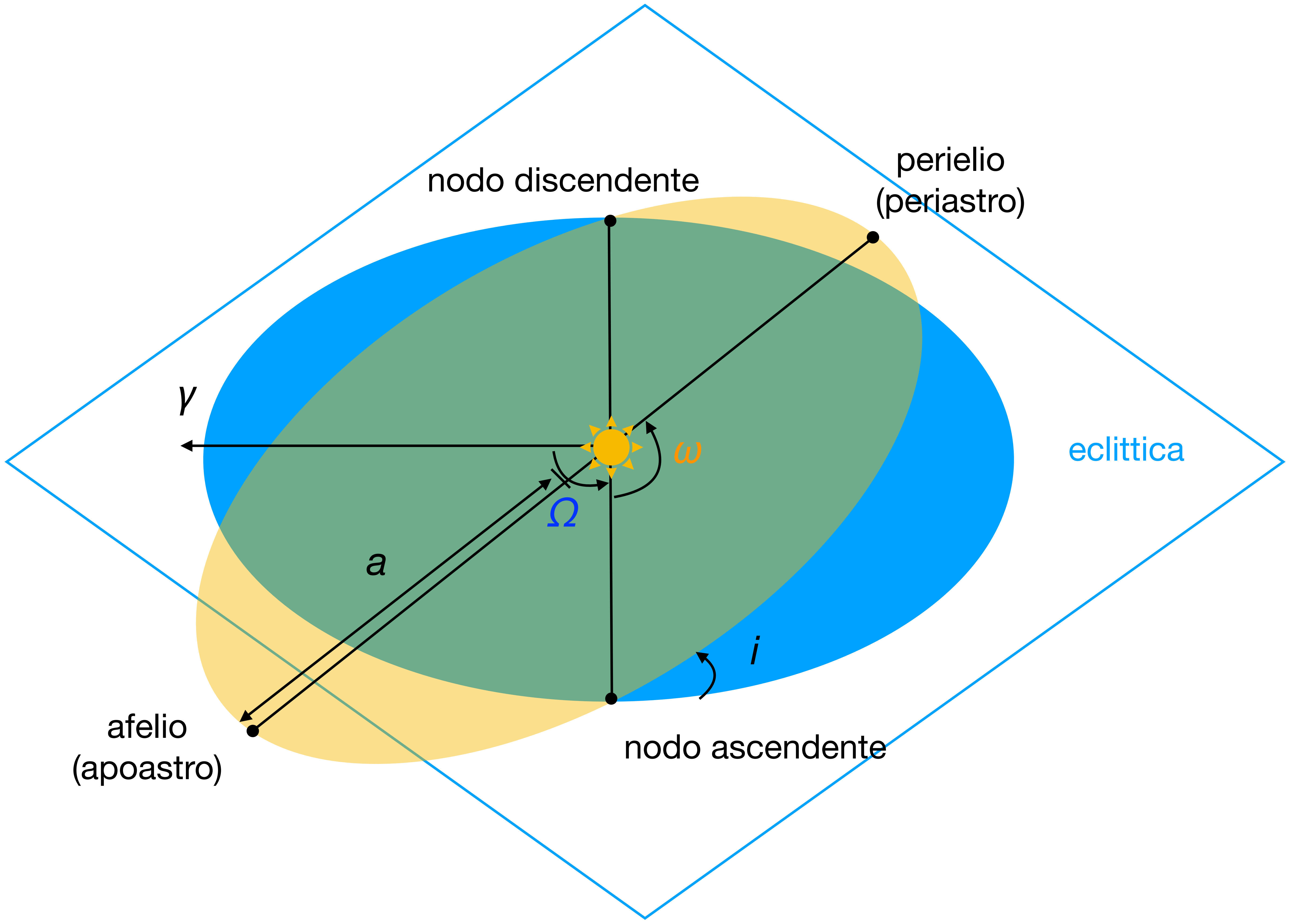
|e| = eccentricità dell'orbita

- *e* = 0 → cerchio
- 0 < *e* < 1 → ellisse
- *e* = 1 → parabola
- *e* > 1 → iperbole

r minimo quando *f*=0

→ ***e*** punta il perielio

Elementi orbitali

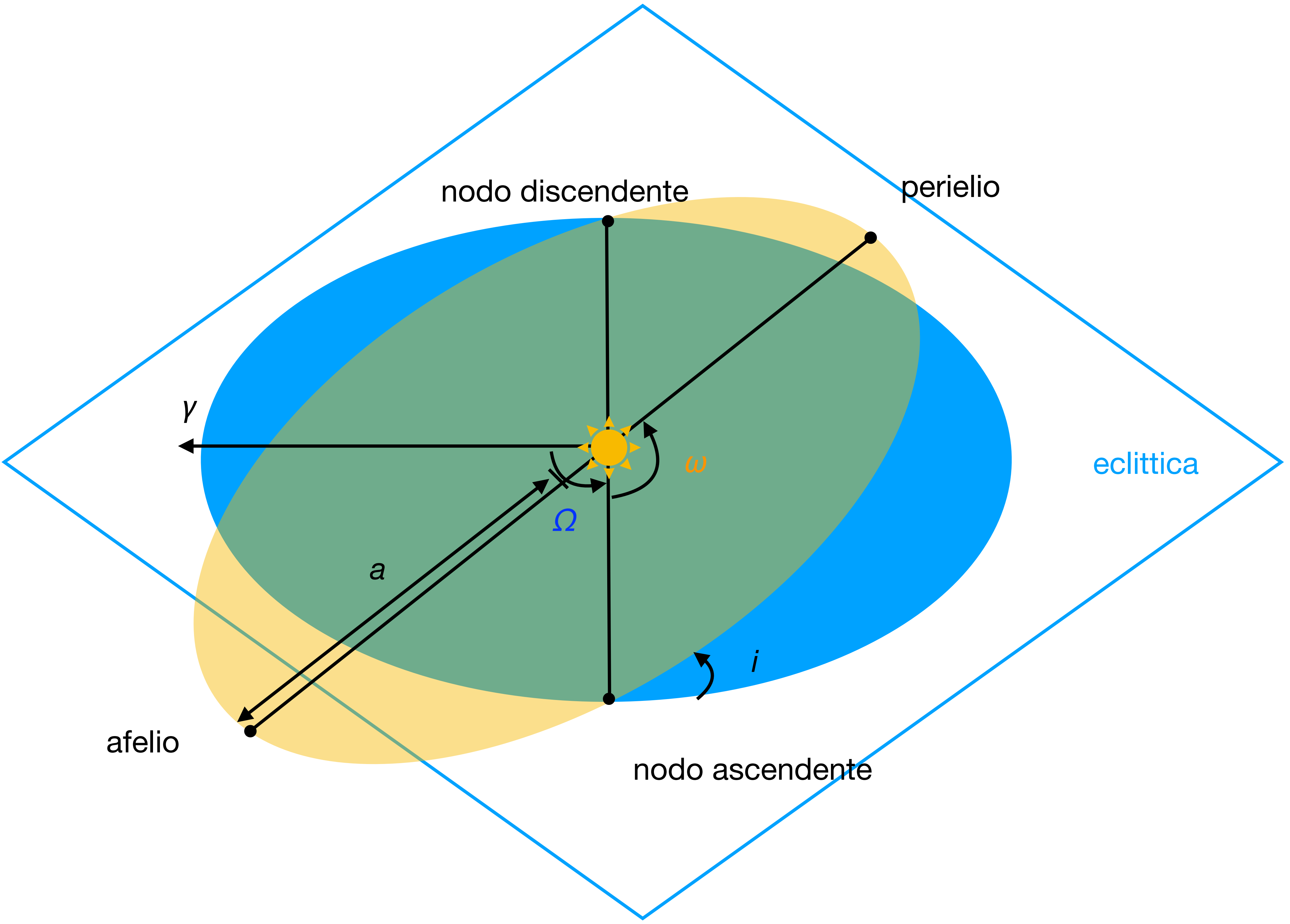


Sono 6 costanti più appropriate per descrivere la geometria dell'orbita

a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

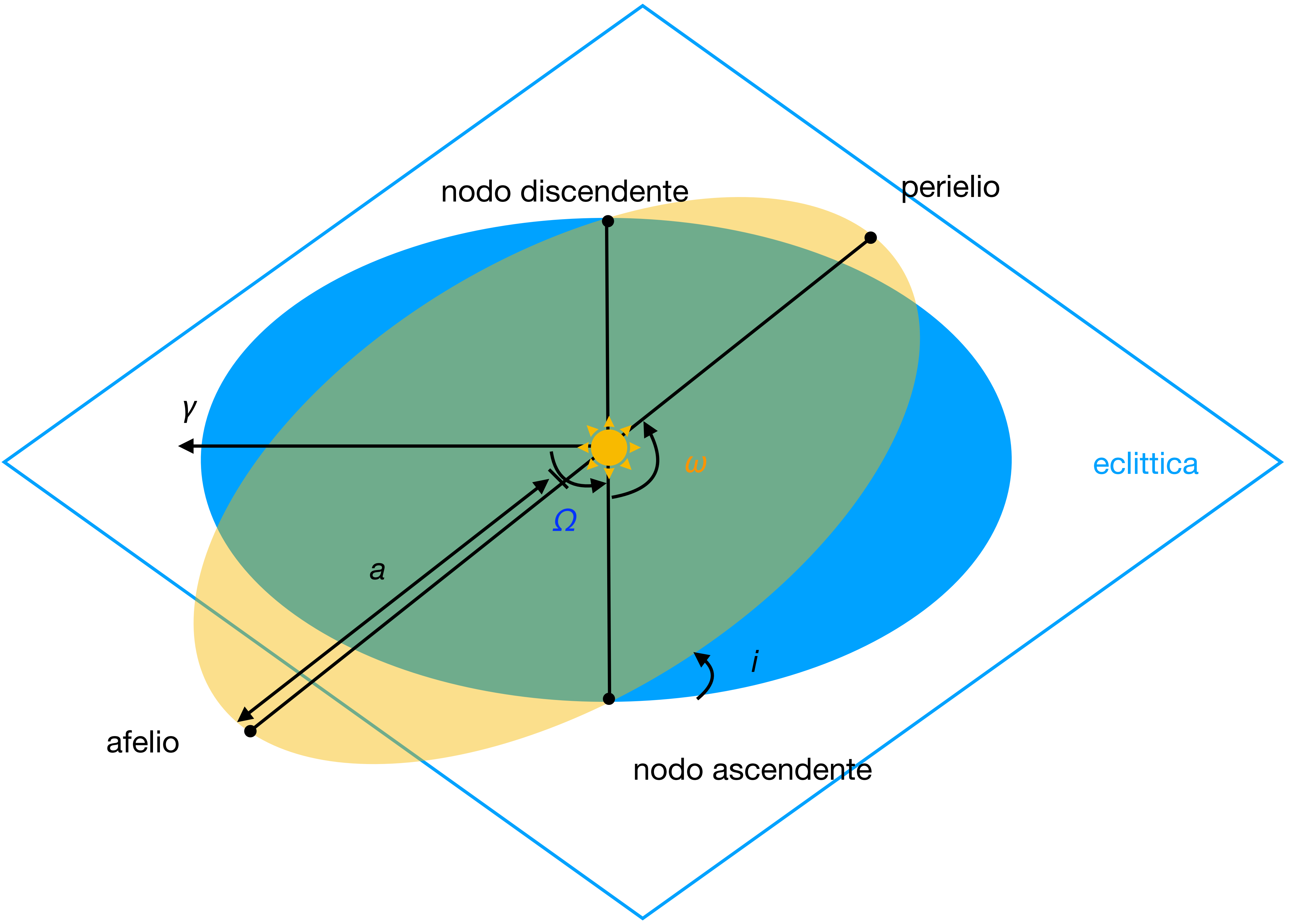
Elementi orbitali



a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



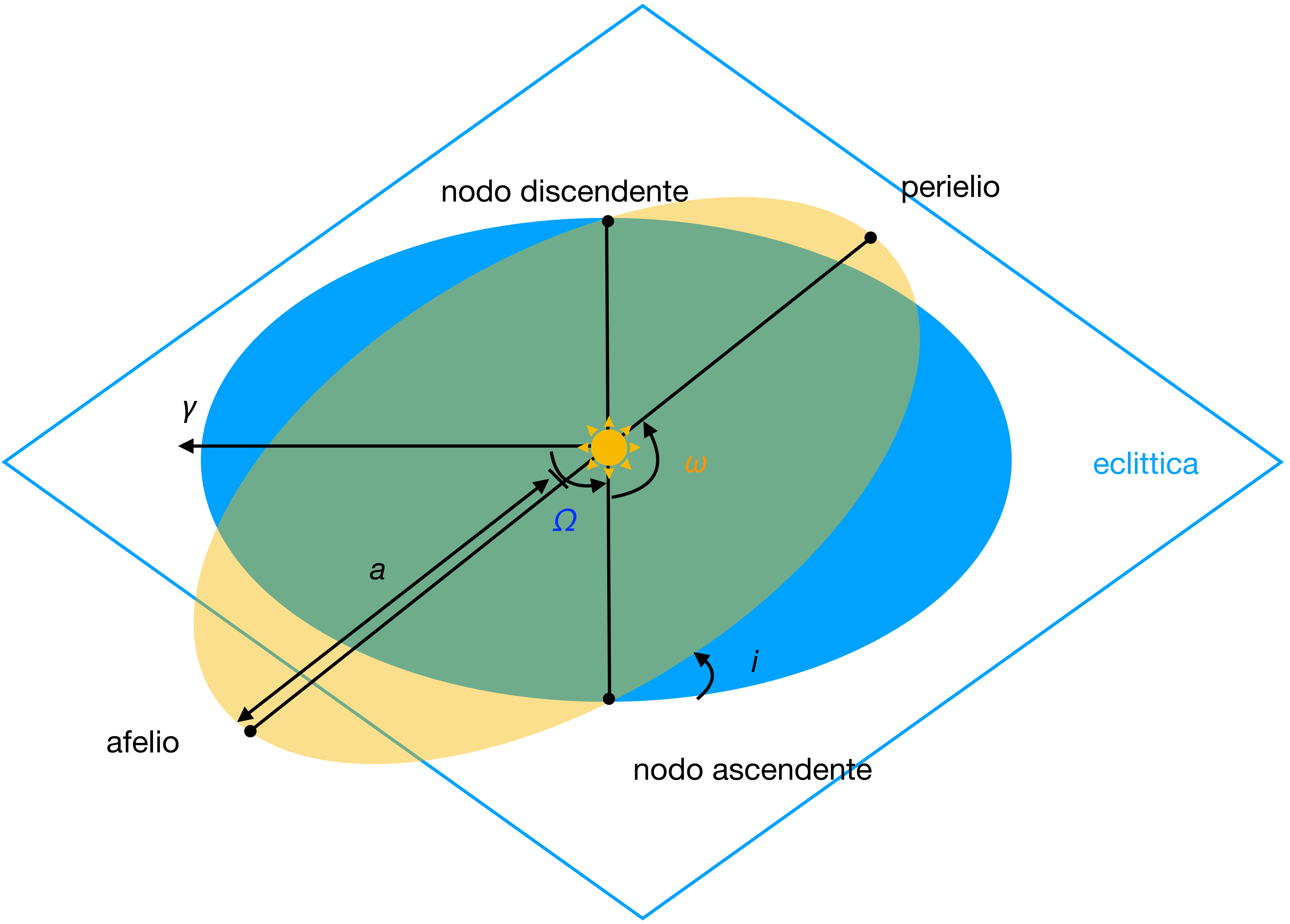
equazione orbita

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e\cos f}$$

a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

equazione orbita

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e\cos f}$$

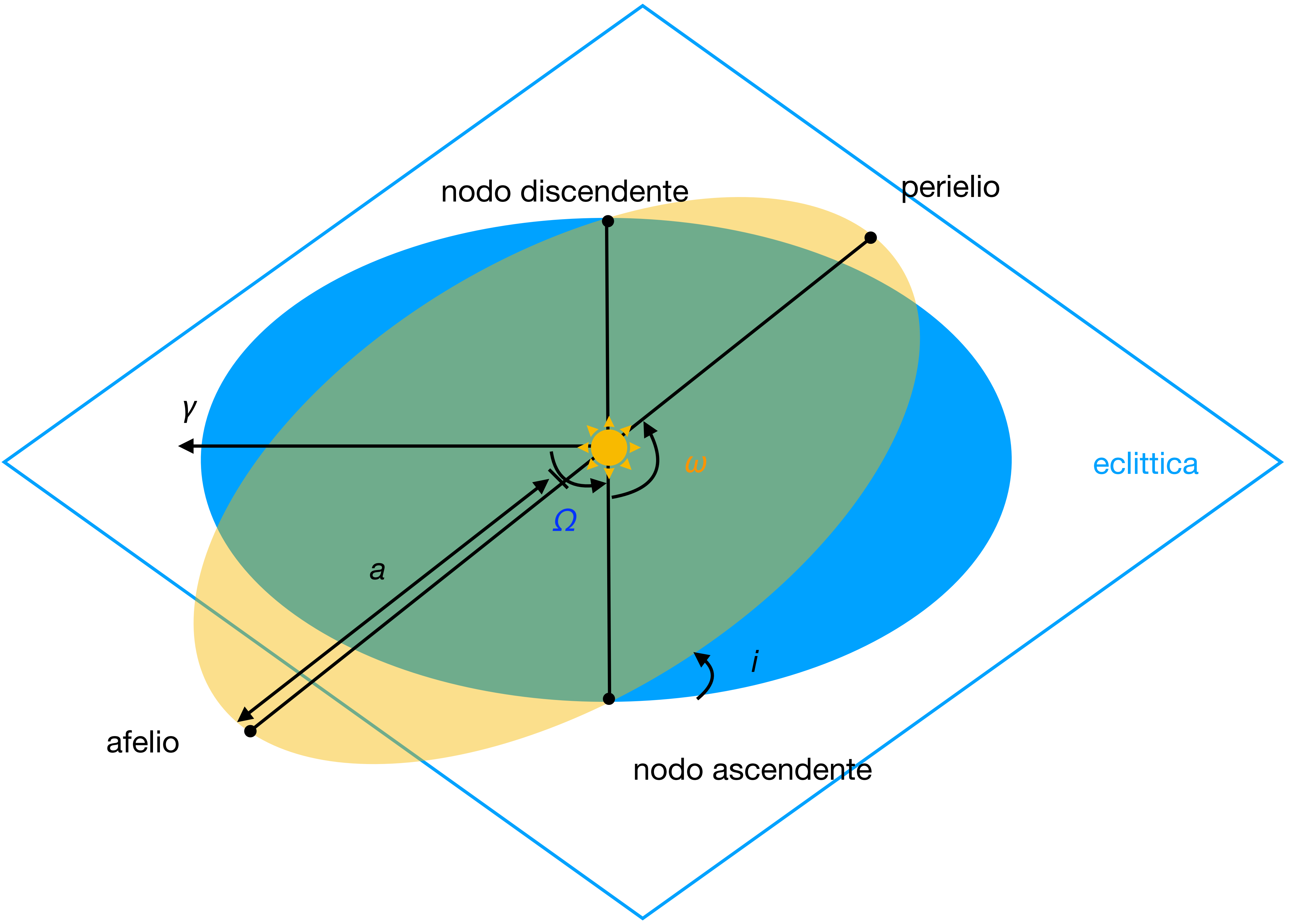
equazione sezione conica

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

parametro, o semilatus rectus

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



equazione orbita

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e\cos f}$$

equazione sezione conica

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

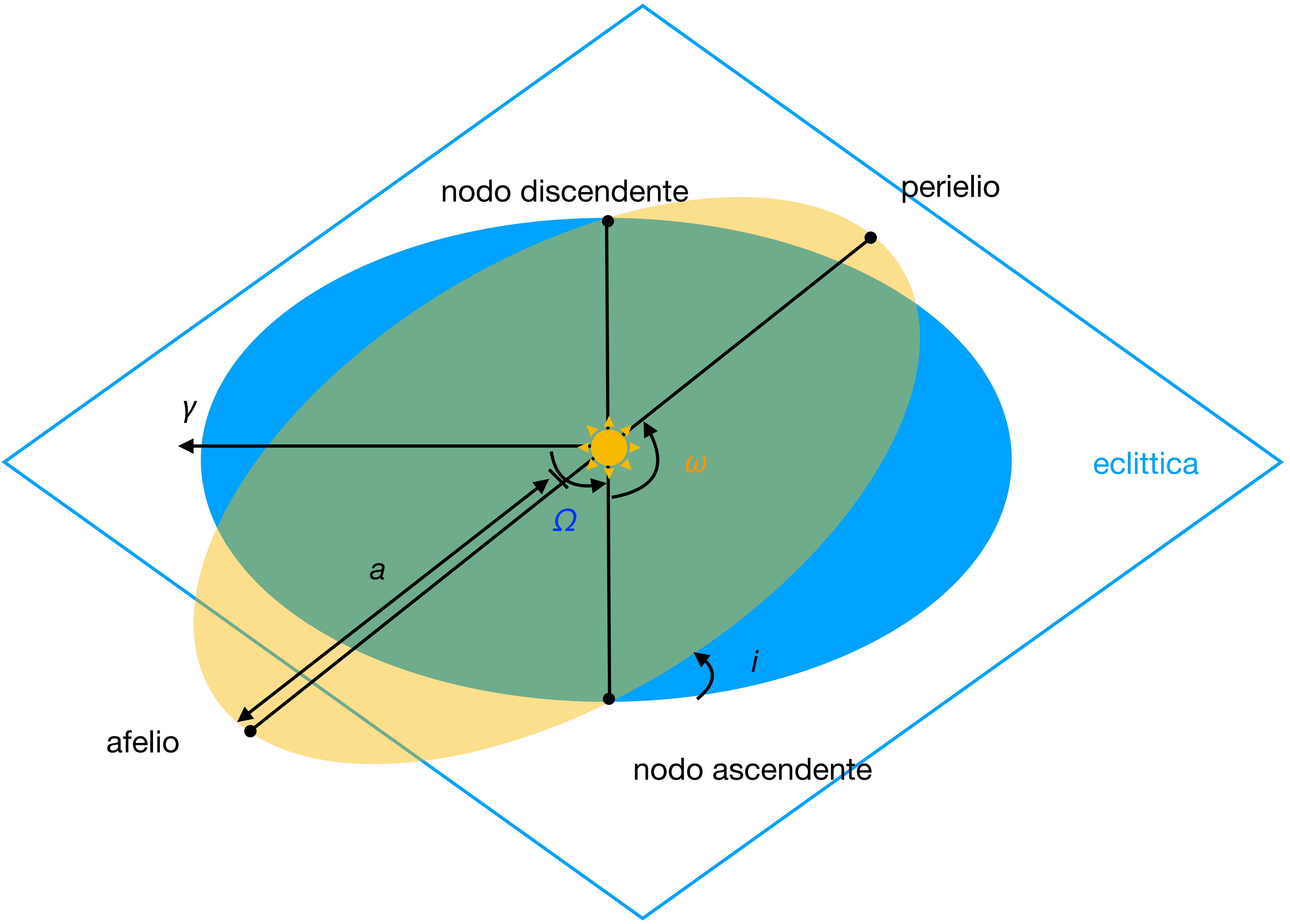
parametro, o semilatus rectus

segue che: $$p = a|1 - e^2| = k^2/\mu$$

a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

equazione orbita

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e\cos f}$$

equazione sezione conica

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

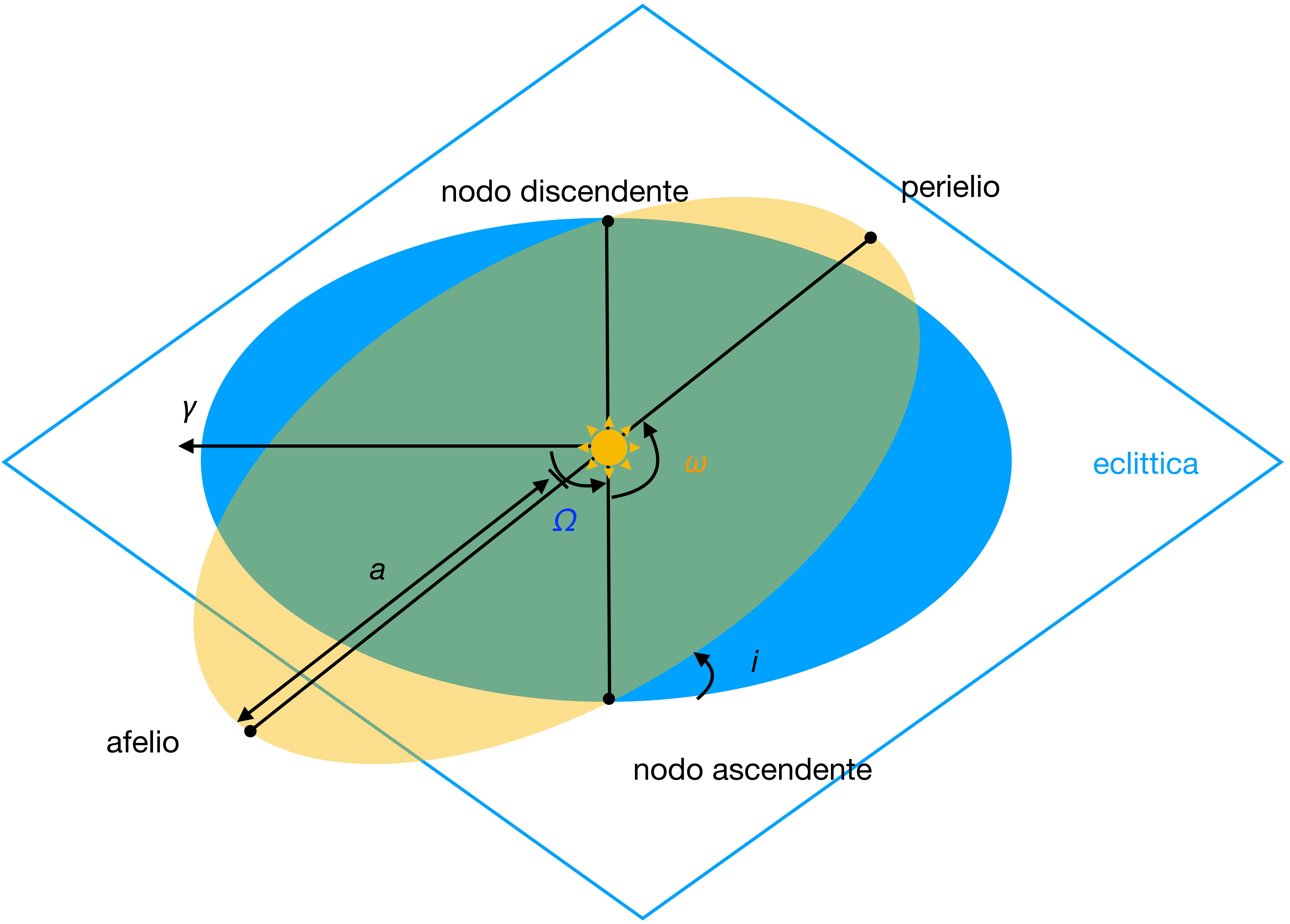
parametro, o semilatus rectus

segue che: $p = a\,|1 - e^2| = k^2/\mu$

e quindi: $a = \dfrac{k^2/\mu}{|1 - e^2|}$

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

equazione orbita

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e\cos f}$$

equazione sezione conica

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

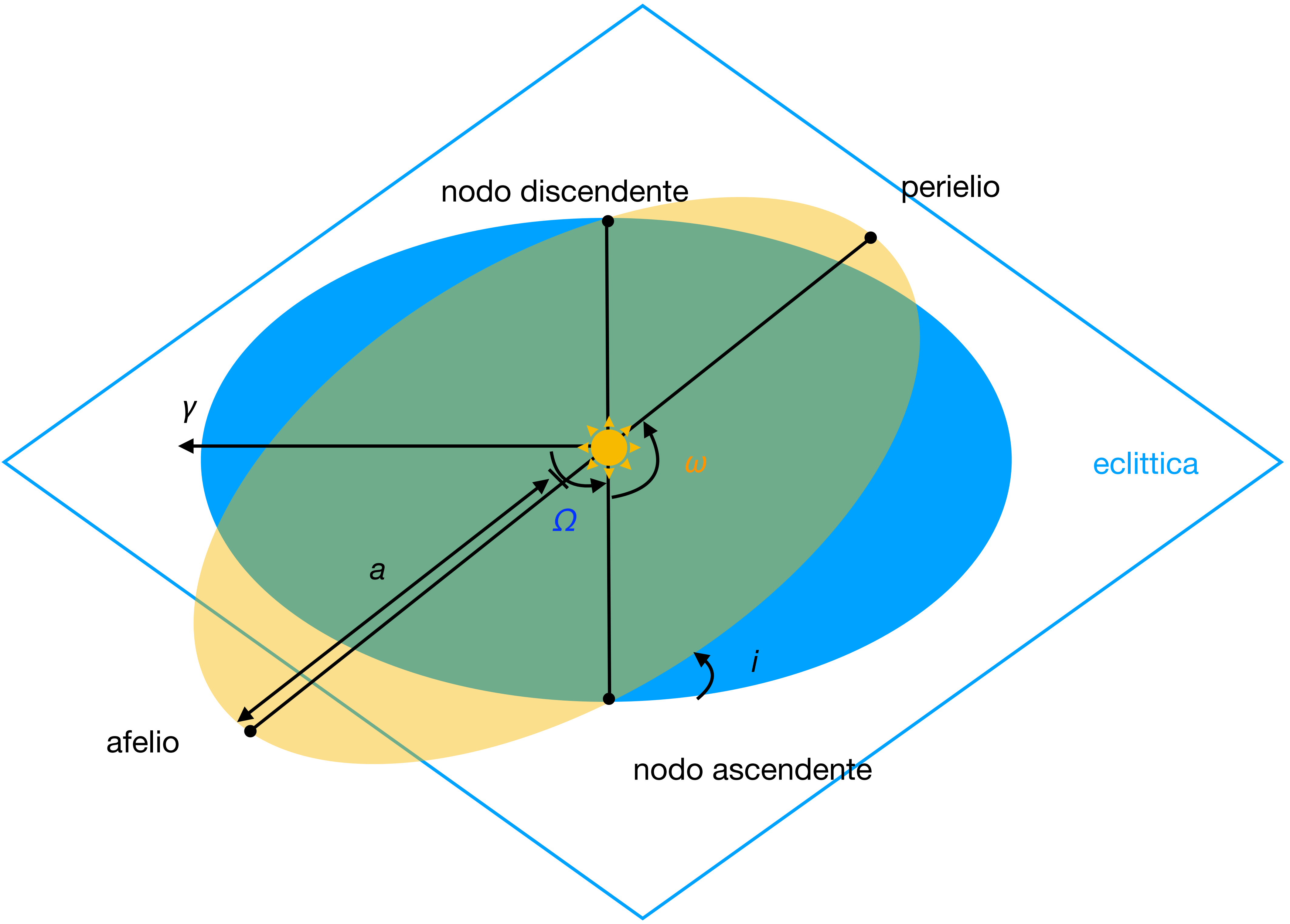
parametro, o semilatus rectus

segue che: $p = a|1 - e^2| = k^2/\mu$

e quindi: $a = \dfrac{k^2/\mu}{|1 - e^2|}$ ma $\mu^2(e^2 - 1) = 2hk^2$

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



equazione orbita

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e\cos f}$$

equazione sezione conica

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

parametro, o semilatus rectus

segue che: $p = a|1 - e^2| = k^2/\mu$

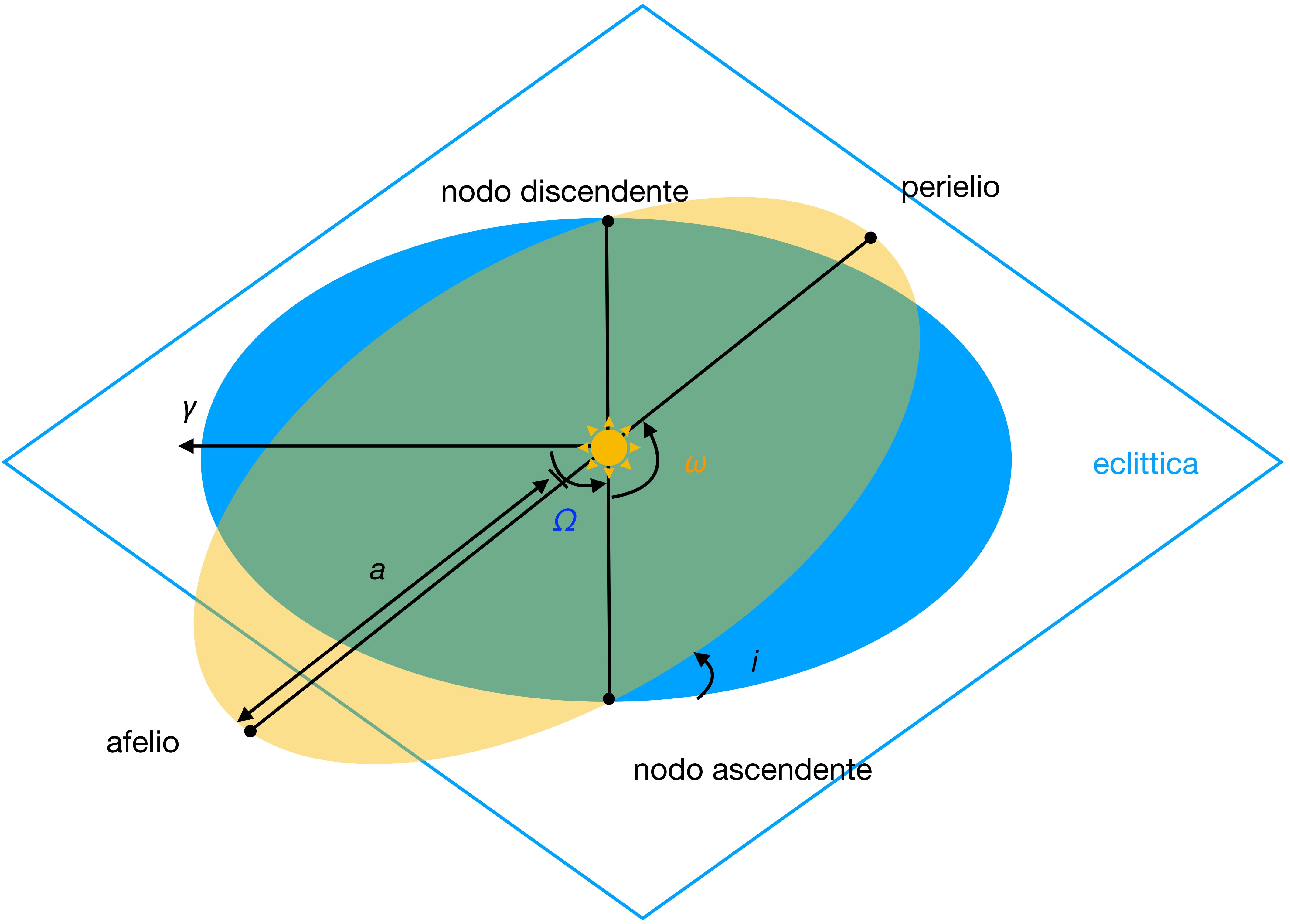
e quindi: $a = \dfrac{k^2/\mu}{|1 - e^2|}$ ma $\mu^2(e^2 - 1) = 2hk^2$

$$a = \begin{cases} -\mu/2h & \text{se } \boxed{0 < e < 1 \text{ (ellisse)} \quad \rightarrow h < 0, \text{ en. pot.} > \text{en. cin.}} \\ \mu/2h & \text{se } \boxed{e > 1 \text{ (iperbole)} \quad \rightarrow h > 0, \text{ en. cin.} > \text{en. pot.}} \end{cases}$$

a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

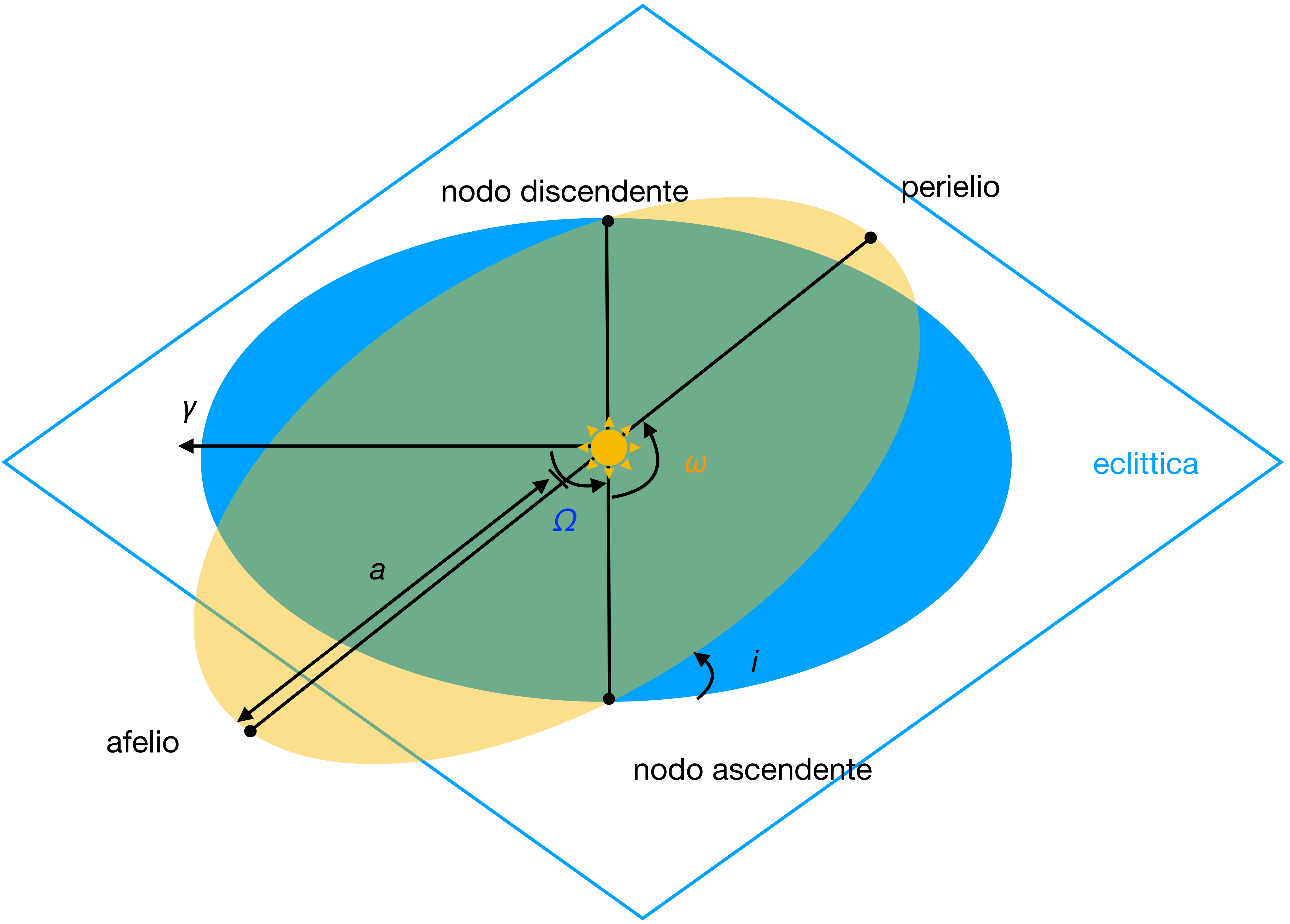
Elementi orbitali



a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali

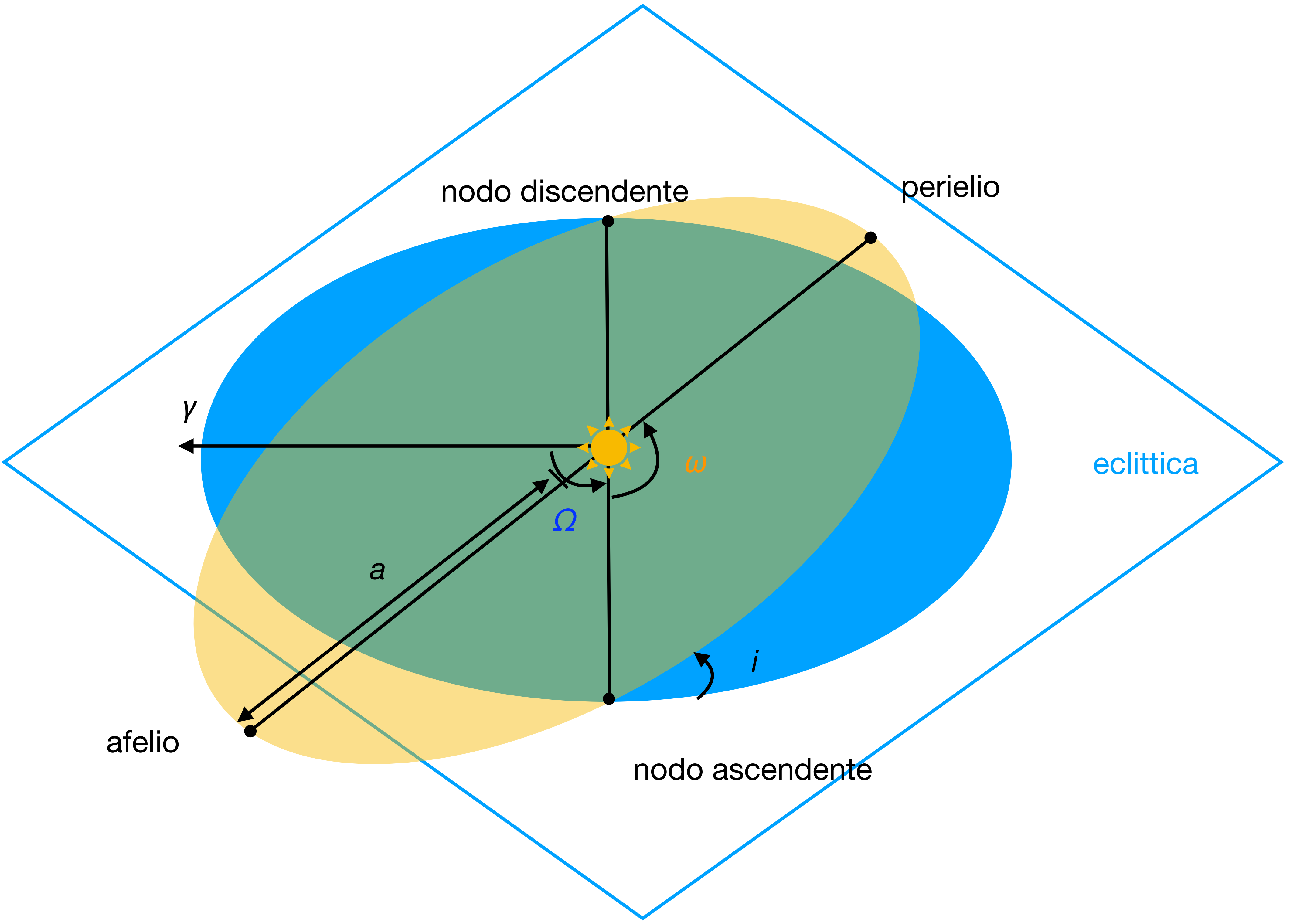


L'orientazione dell'orbita è data dalla direzione di ***k*** e ***e***

a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali

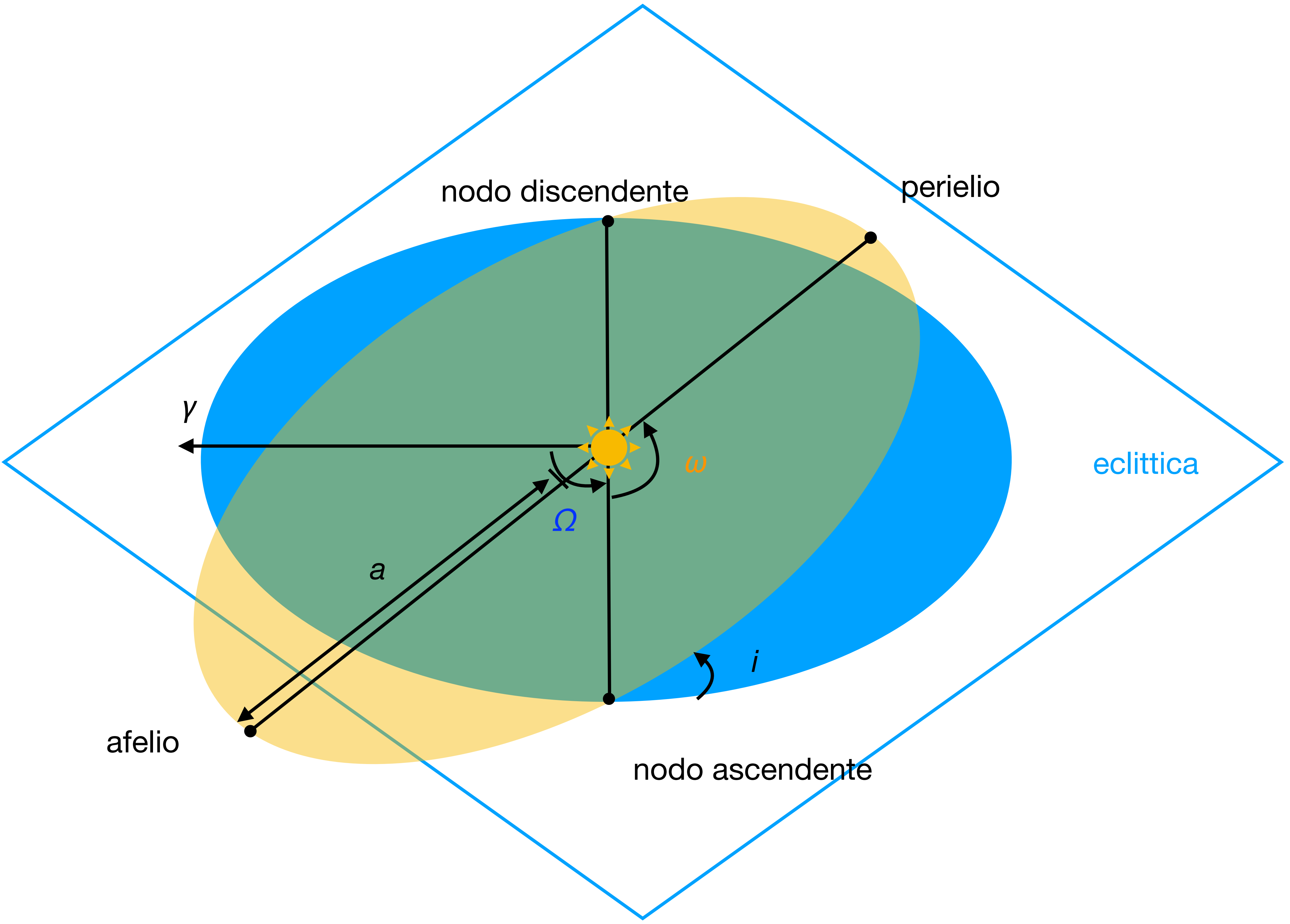


L'orientazione dell'orbita è data dalla direzione di ***k*** e ***e***

a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



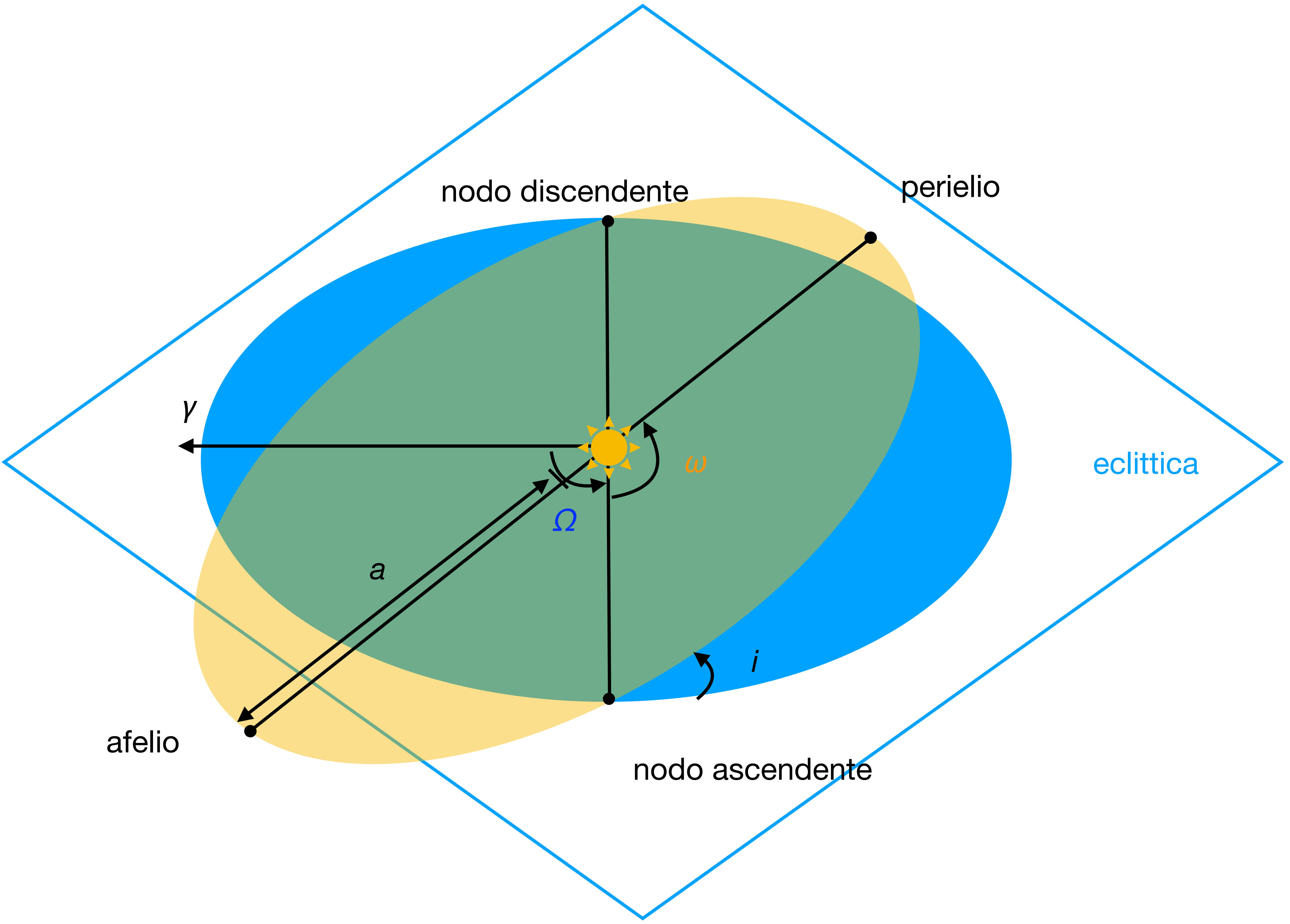
L'orientazione dell'orbita è data dalla direzione di ***k*** e ***e***

A*lternativamente, gli angoli Ω, ω e i contengono la stessa informazione*

a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



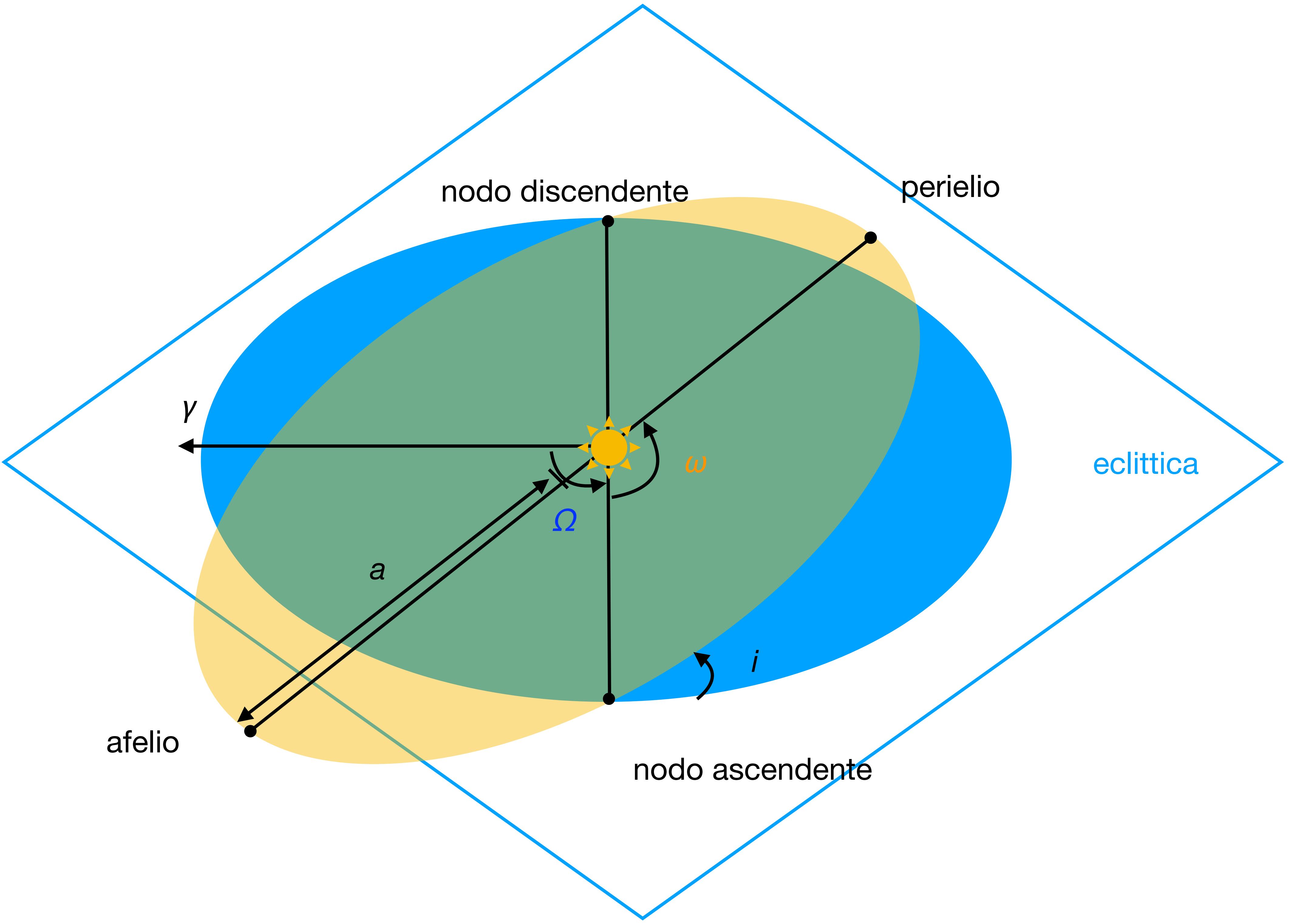
L'orientazione dell'orbita è data dalla direzione di ***k*** e ***e***

A*lternativamente, gli angoli Ω, ω e i contengono la stessa informazione*

a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

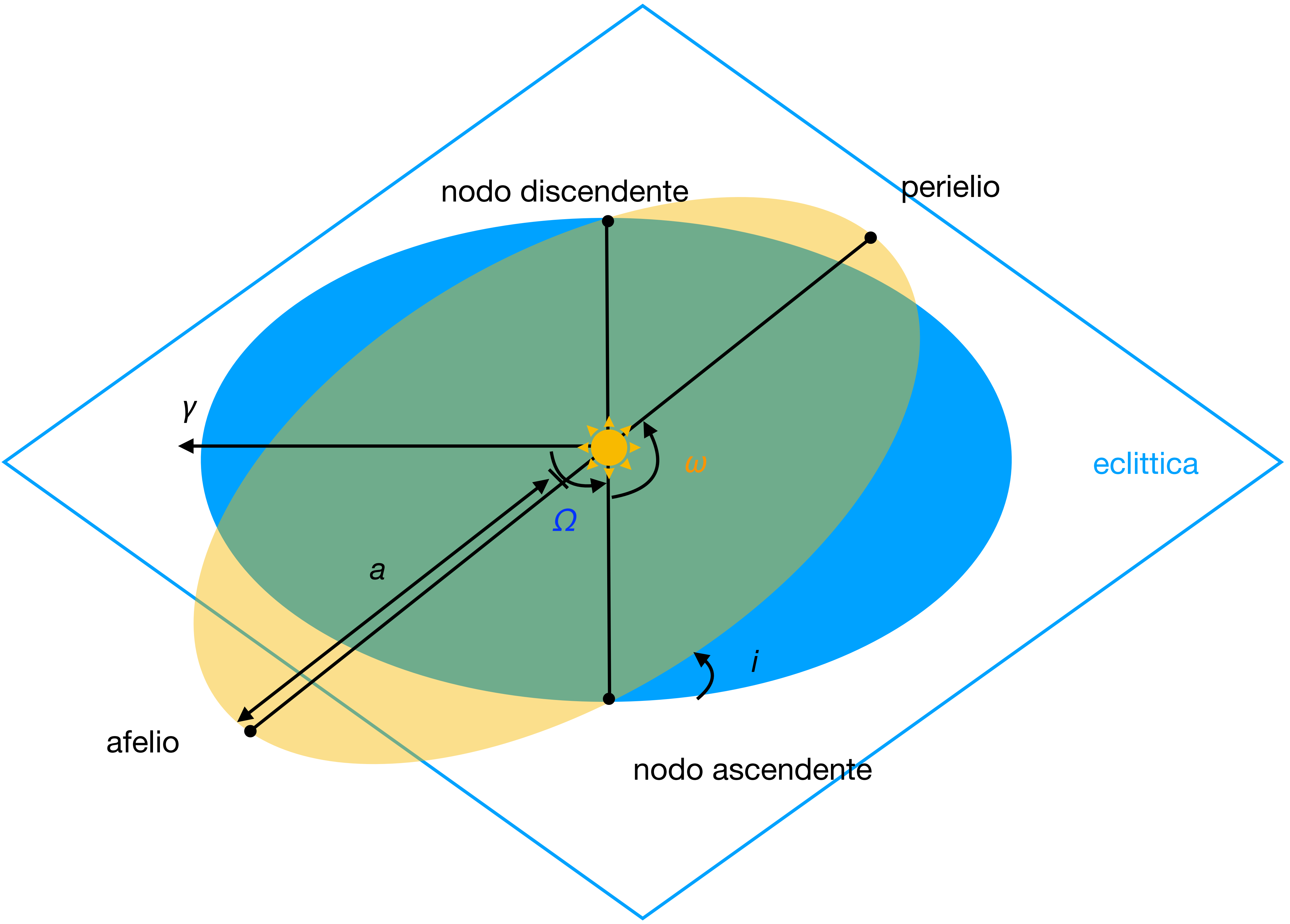
L'orientazione dell'orbita è data dalla direzione di ***k*** e ***e***

A*lternativamente, gli angoli Ω, ω e i contengono la stessa informazione*

i = inclinazione dell'orbita rispetto ad un piano di riferimento, in questo esempio l'eclittica; i = [0°,90°] se l'orbita è percorsa in senso anti-orario; i = [90°, 180°] se percorsa in senso orario

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

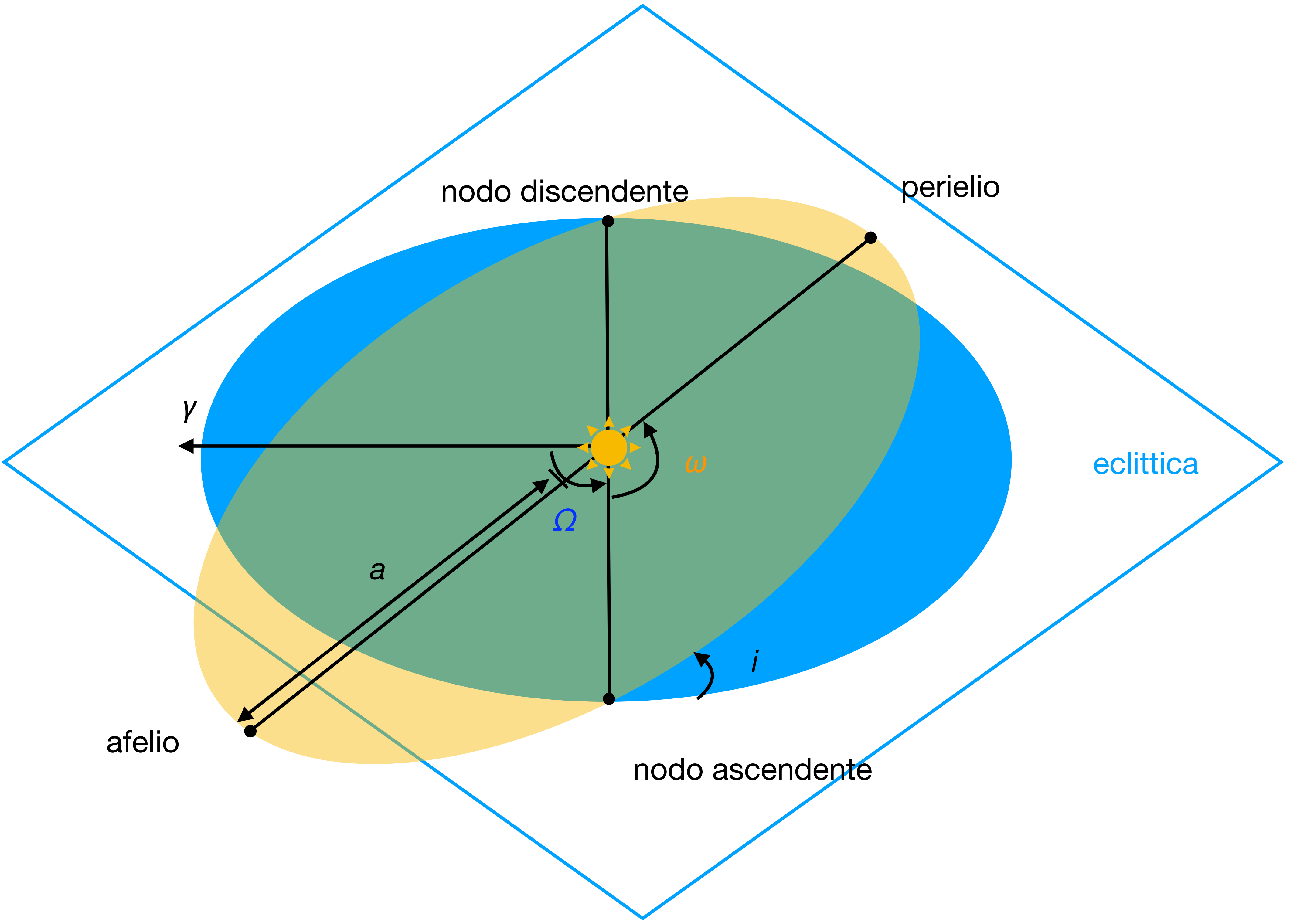
L'orientazione dell'orbita è data dalla direzione di ***k*** e ***e***

A*lternativamente, gli angoli Ω, ω e i contengono la stessa informazione*

i = inclinazione dell'orbita rispetto ad un piano di riferimento, in questo esempio l'eclittica; *i* = [0°,90°] se l'orbita è percorsa in senso anti-orario; *i* = [90°, 180°] se percorsa in senso orario

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

L'orientazione dell'orbita è data dalla direzione di ***k*** e ***e***

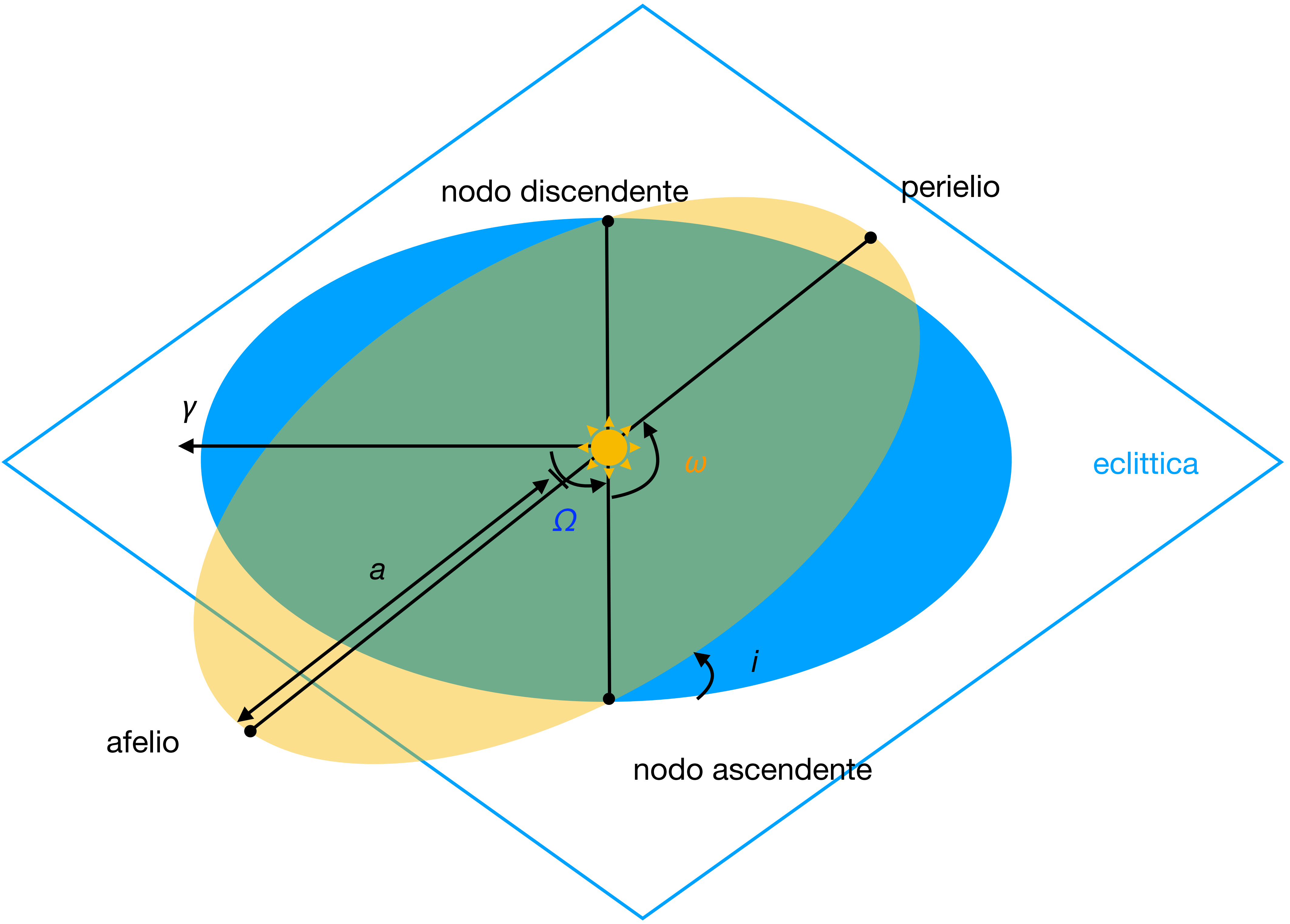
A*lternativamente, gli angoli Ω, ω e i contengono la stessa informazione*

i = inclinazione dell'orbita rispetto ad un piano di riferimento, in questo esempio l'eclittica; *i* = [0°,90°] se l'orbita è percorsa in senso anti-orario; *i* = [90°, 180°] se percorsa in senso orario

Ω = longitudine del nodo ascendente (punto in cui il corpo attraversa l'eclittica da sud a nord), contata in senso anti-orario dalla direzione del punto γ

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

L'orientazione dell'orbita è data dalla direzione di ***k*** e ***e***

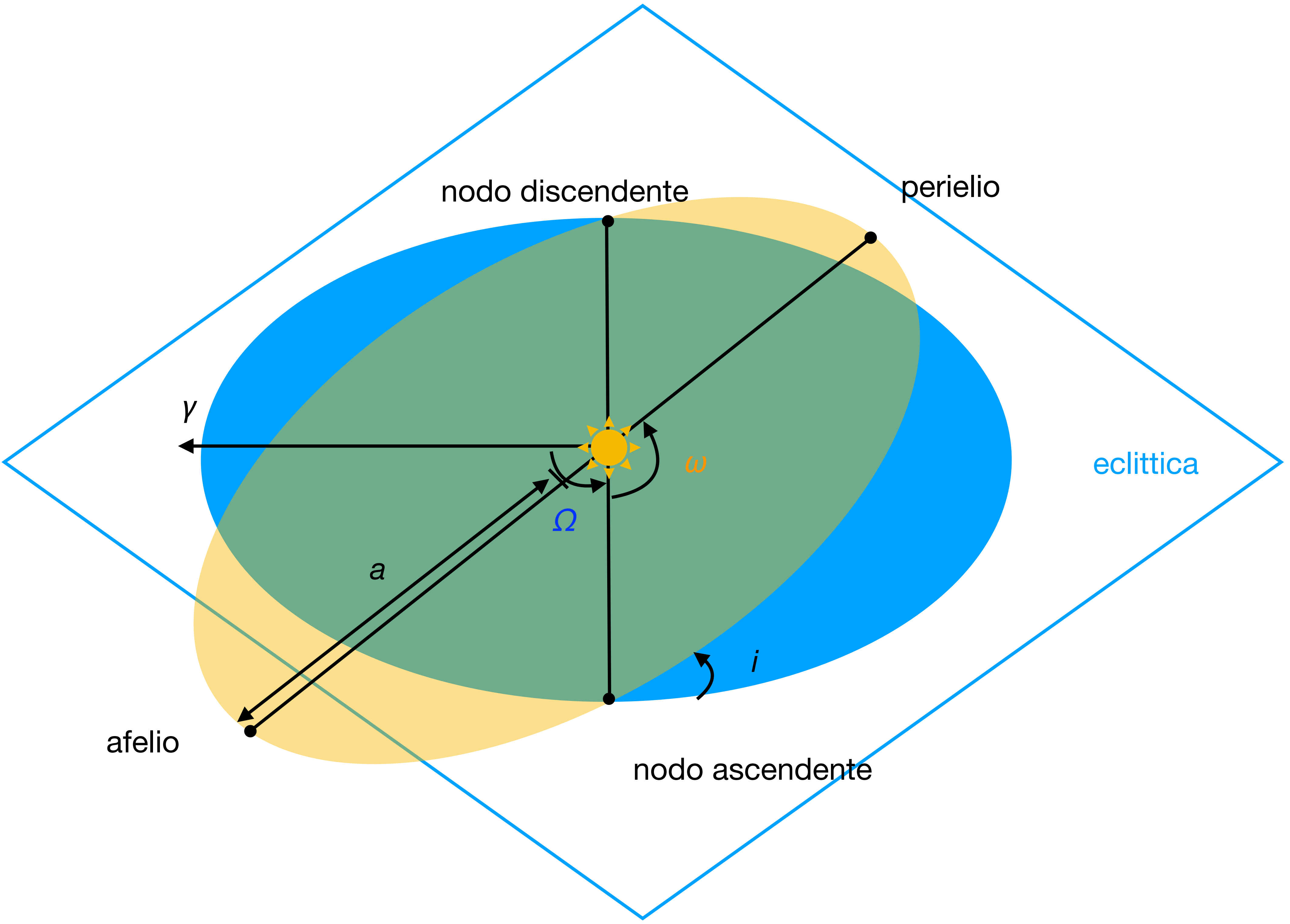
A*lternativamente, gli angoli Ω, ω e i contengono la stessa informazione*

i = inclinazione dell'orbita rispetto ad un piano di riferimento, in questo esempio l'eclittica; *i* = [0°,90°] se l'orbita è percorsa in senso anti-orario; *i* = [90°, 180°] se percorsa in senso orario

Ω = longitudine del nodo ascendente (punto in cui il corpo attraversa l'eclittica da sud a nord), contata in senso anti-orario dalla direzione del punto γ

*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

Elementi orbitali



a = semiasse maggiore
e = eccentricità
i = inclinazione orbita
Ω = longitudine nodo ascendente*
ω = argomento del perielio†
τ = tempo del passaggio al perielio

L'orientazione dell'orbita è data dalla direzione di ***k*** e ***e***

A*lternativamente, gli angoli Ω, ω e i contengono la stessa informazione*

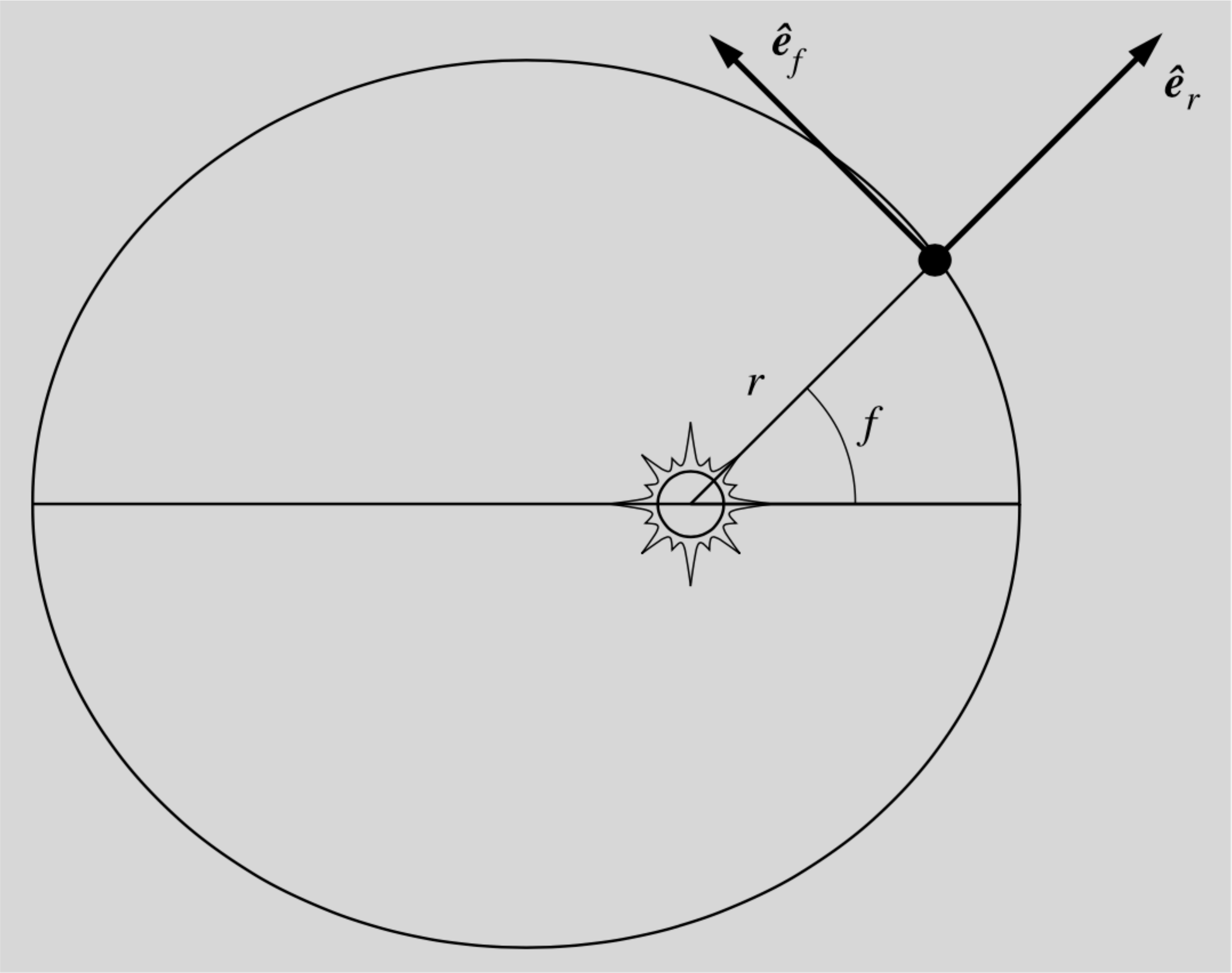
i = inclinazione dell'orbita rispetto ad un piano di riferimento, in questo esempio l'eclittica; *i* = [0°,90°] se l'orbita è percorsa in senso anti-orario; *i* = [90°, 180°] se percorsa in senso orario

Ω = longitudine del nodo ascendente (punto in cui il corpo attraversa l'eclittica da sud a nord), contata in senso anti-orario dalla direzione del punto γ

ω = argomento del perielio, indica la direzione del perielio misurata in senso orario dal nodo ascendente

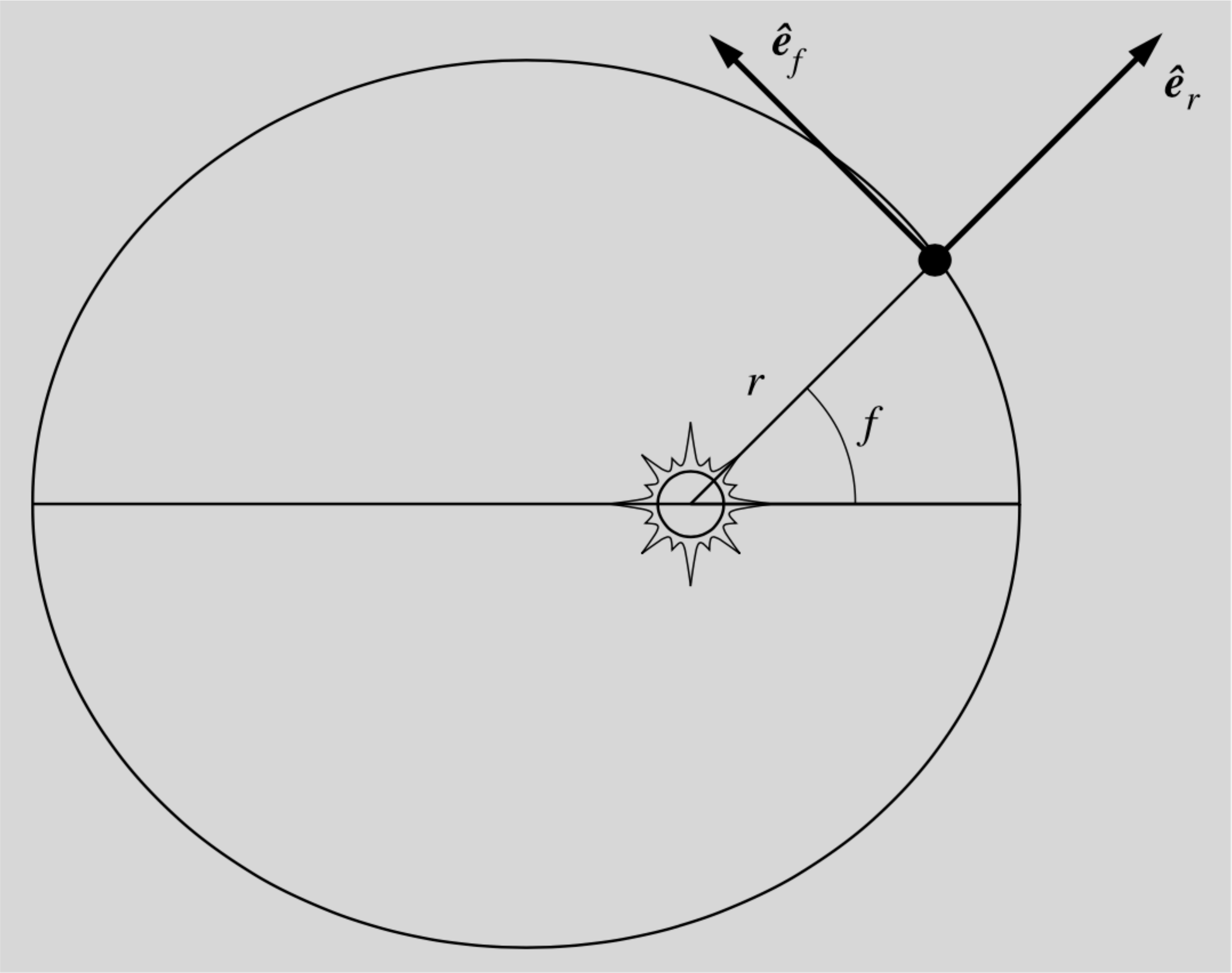
*definito sul piano di riferimento, eclittica
†definito sul piano dell'orbita

2 legge di Keplero



$\boldsymbol{e_f}$ e $\boldsymbol{e_r}$ cambiano mano a mano che il pianeta si muove lungo l'orbita

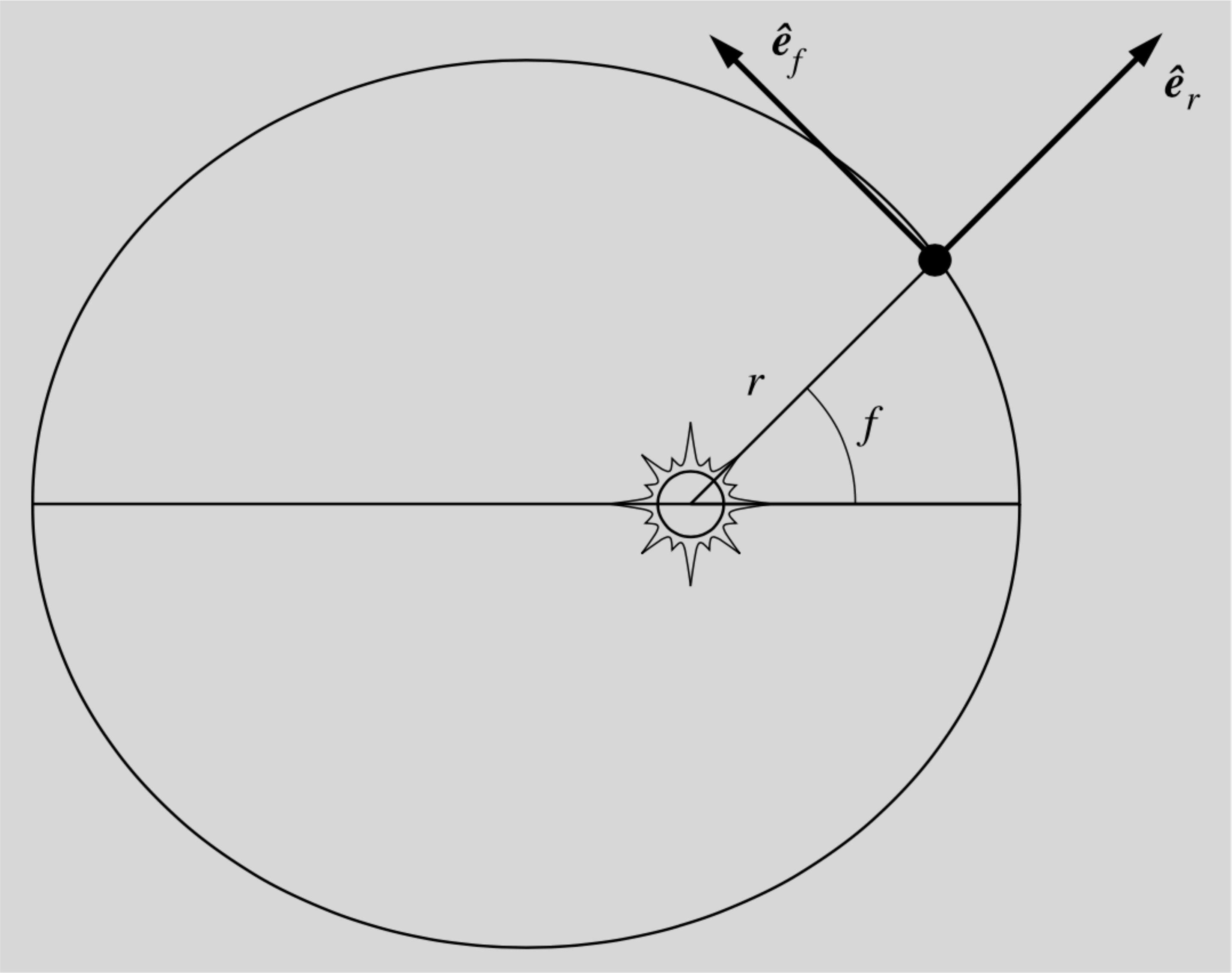
2 legge di Keplero



$\boldsymbol{e_f}$ e $\boldsymbol{e_r}$ cambiano mano a mano che il pianeta si muove lungo l'orbita

raggio vettore pianeta in coord. polari: $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$

2 legge di Keplero

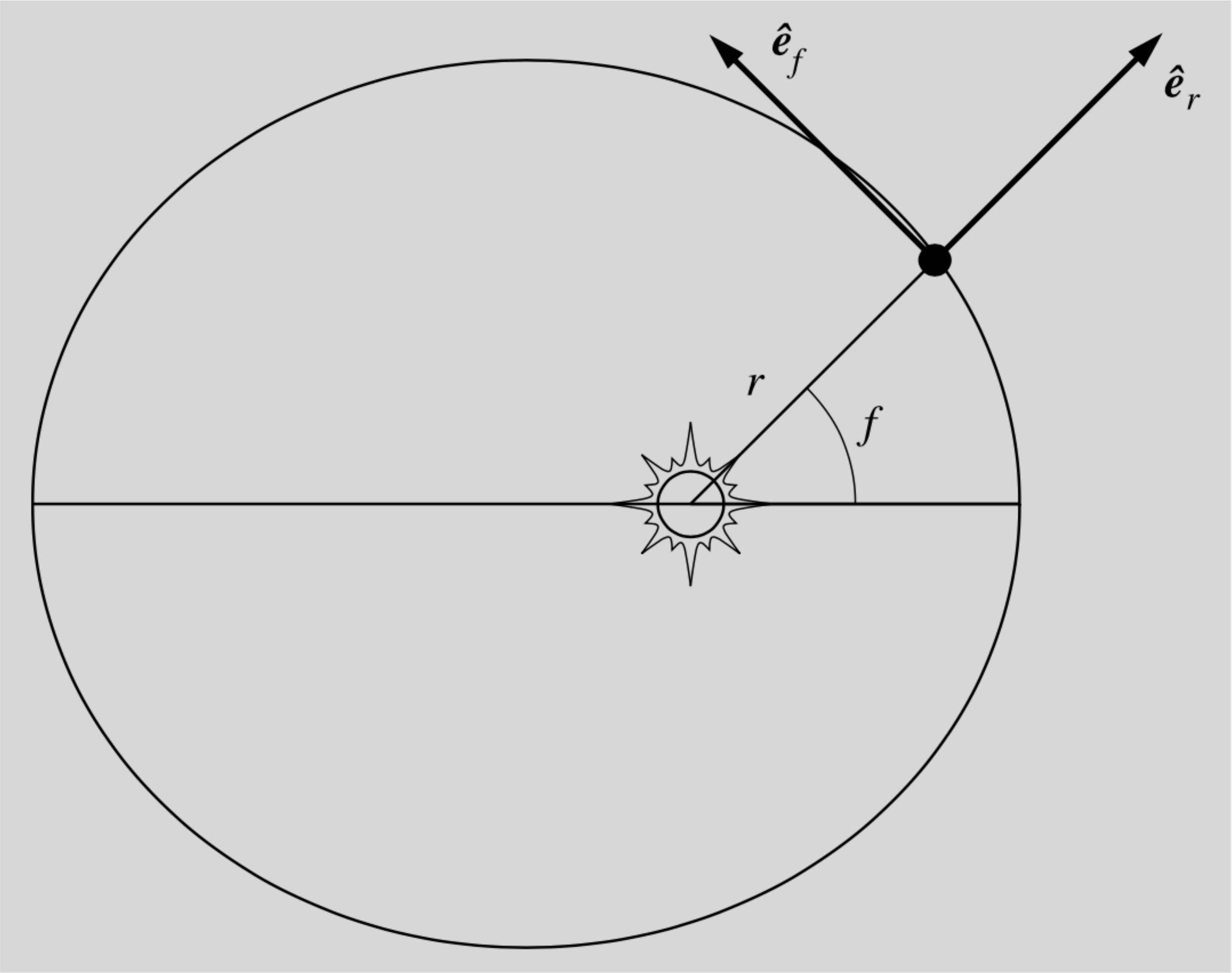


$\boldsymbol{e_f}$ e $\boldsymbol{e_r}$ cambiano mano a mano che il pianeta si muove lungo l'orbita

raggio vettore pianeta in coord. polari: $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$

se il pianeta si muove di vel. angolare θ: $\dot{\hat{e}}_r = \theta\,\hat{e}_f$ $\qquad \theta = \dot{f}$

2 legge di Keplero



e_f e e_r cambiano mano a mano che il pianeta si muove lungo l'orbita

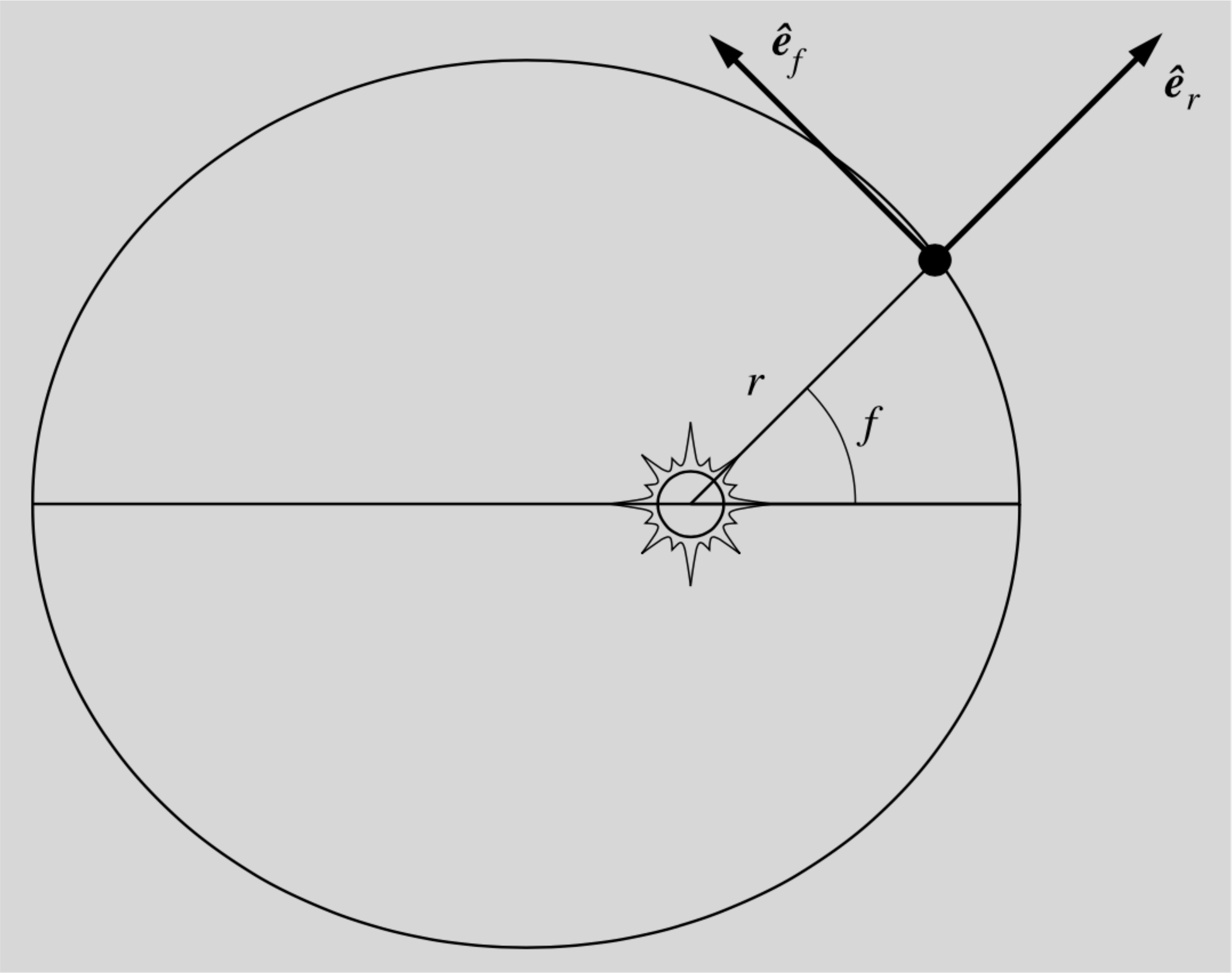
raggio vettore pianeta in coord. polari: $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$

se il pianeta si muove di vel. angolare θ: $\dot{\hat{e}}_r = \theta\,\hat{e}_f \qquad \theta = \dot{f}$

la velocità del pianeta diventa:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = v\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r = v\,\hat{e}_r + r\theta\,\hat{e}_f$$

2 legge di Keplero



e_f e e_r cambiano mano a mano che il pianeta si muove lungo l'orbita

raggio vettore pianeta in coord. polari: $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$

se il pianeta si muove di vel. angolare θ: $\dot{\hat{e}}_r = \theta\,\hat{e}_f \qquad \theta = \dot{f}$

la velocità del pianeta diventa:

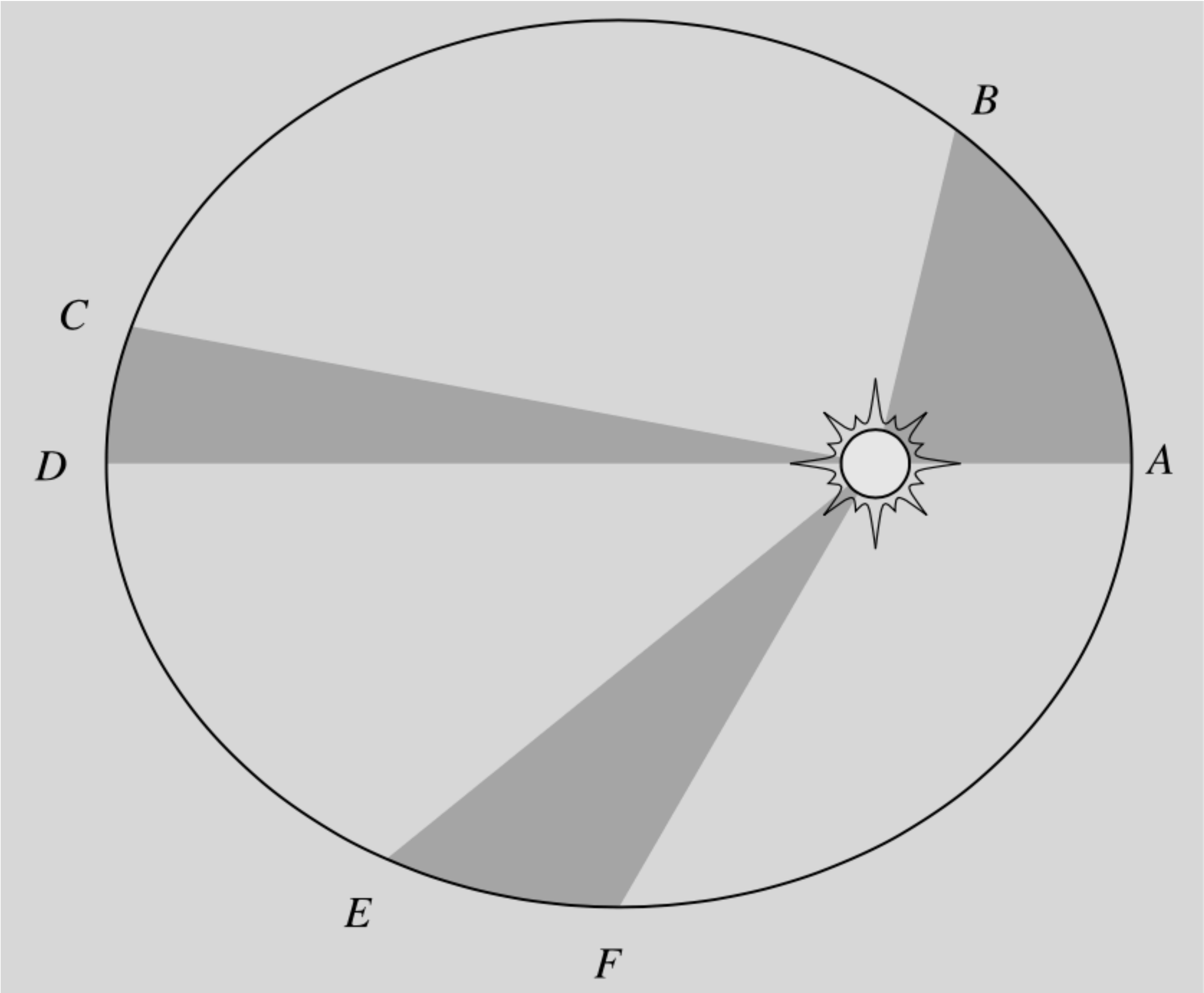
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = v\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r = v\,\hat{e}_r + r\theta\,\hat{e}_f$$

e il momento angolare risulta:

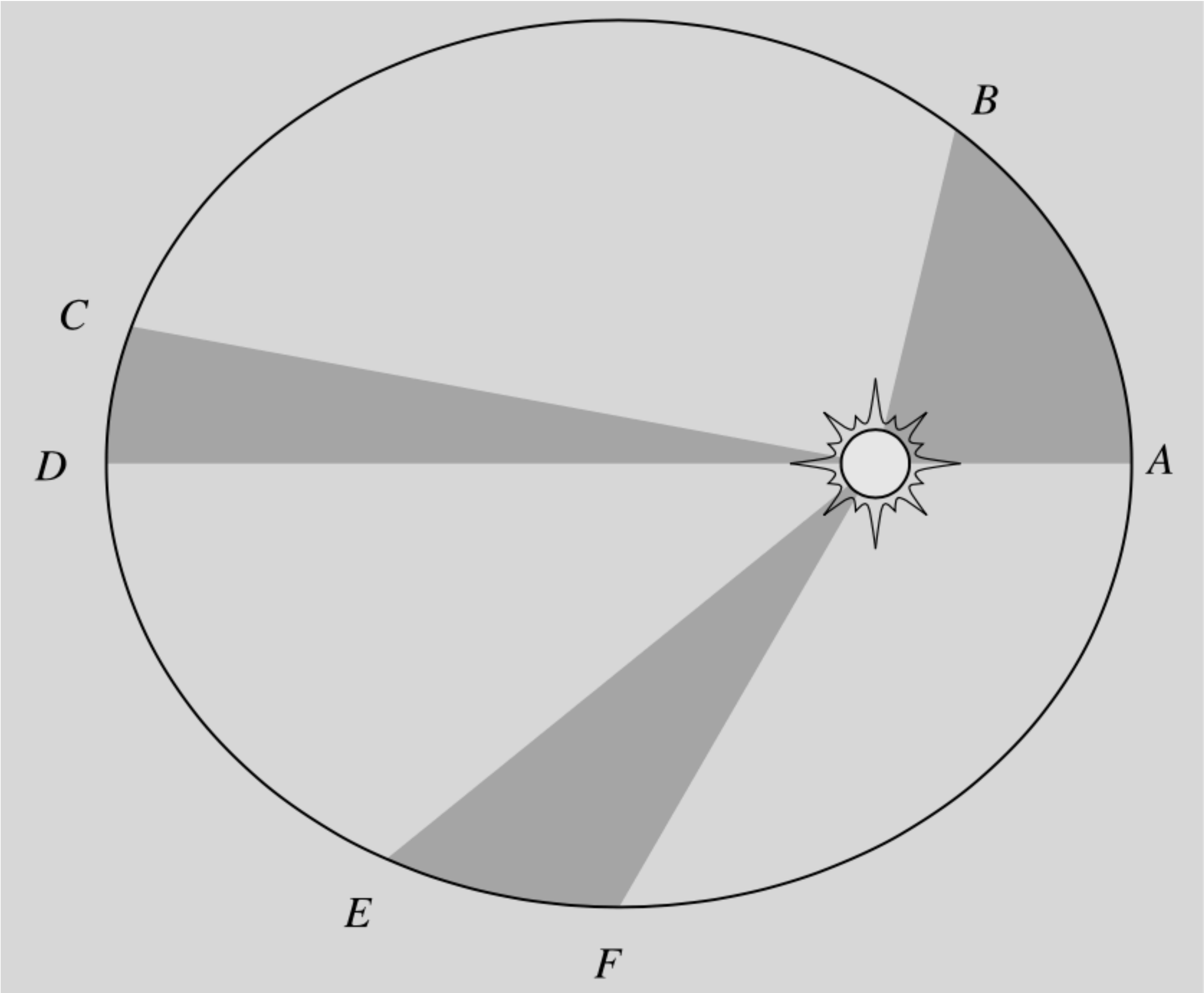
$$\vec{K} = \vec{r} \times \vec{v} = \underbrace{\vec{r} \times (v\,\hat{e}_r)}_{=0} + \vec{r} \times (r\theta\,\hat{e}_f) = r^2\theta\,\hat{e}_z$$

$$|K| = r^2\theta$$

2 legge di Keplero



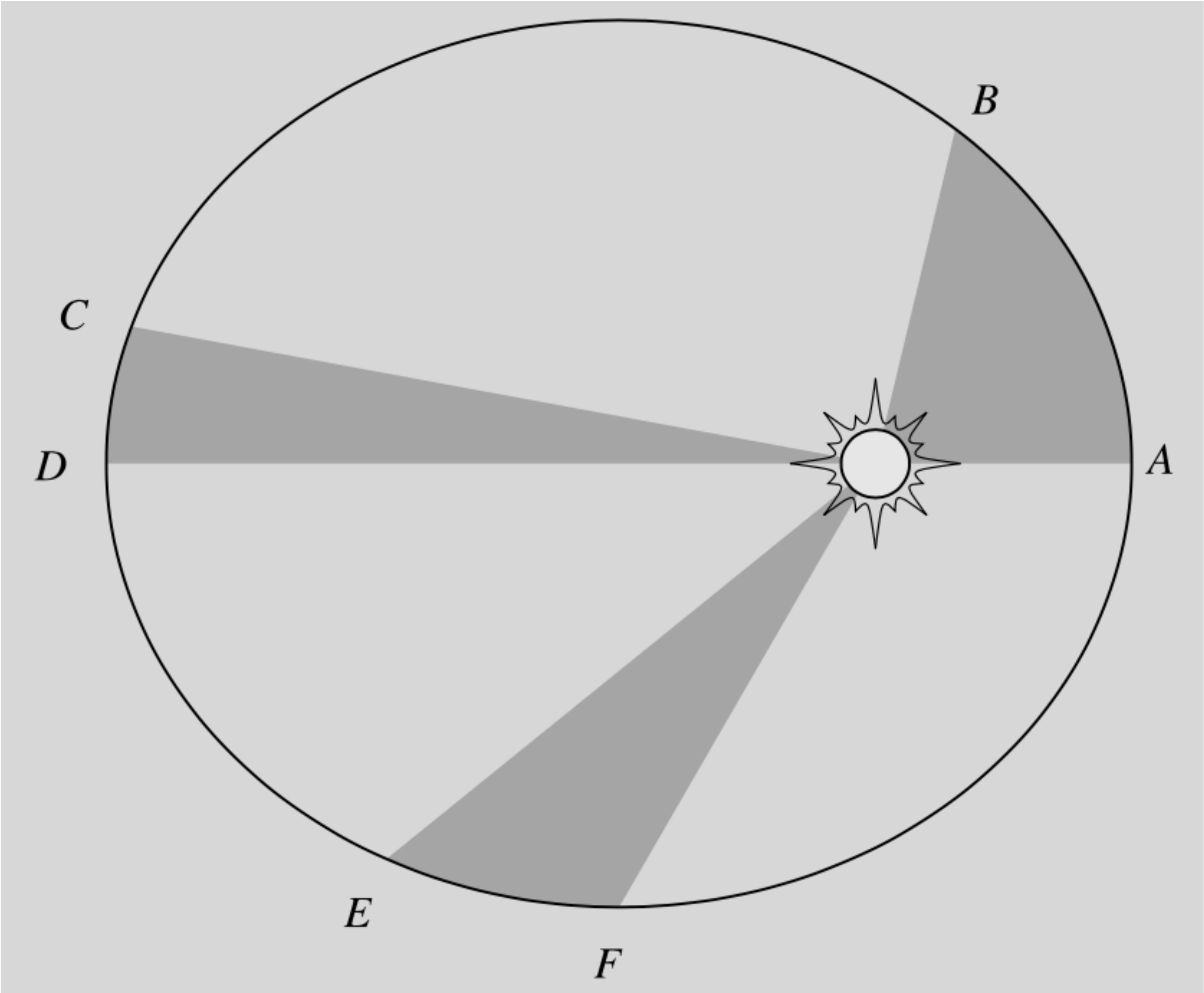
2 legge di Keplero



velocità areale pianeta: area spazzata dal raggio vettore per unità di tempo

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

2 legge di Keplero



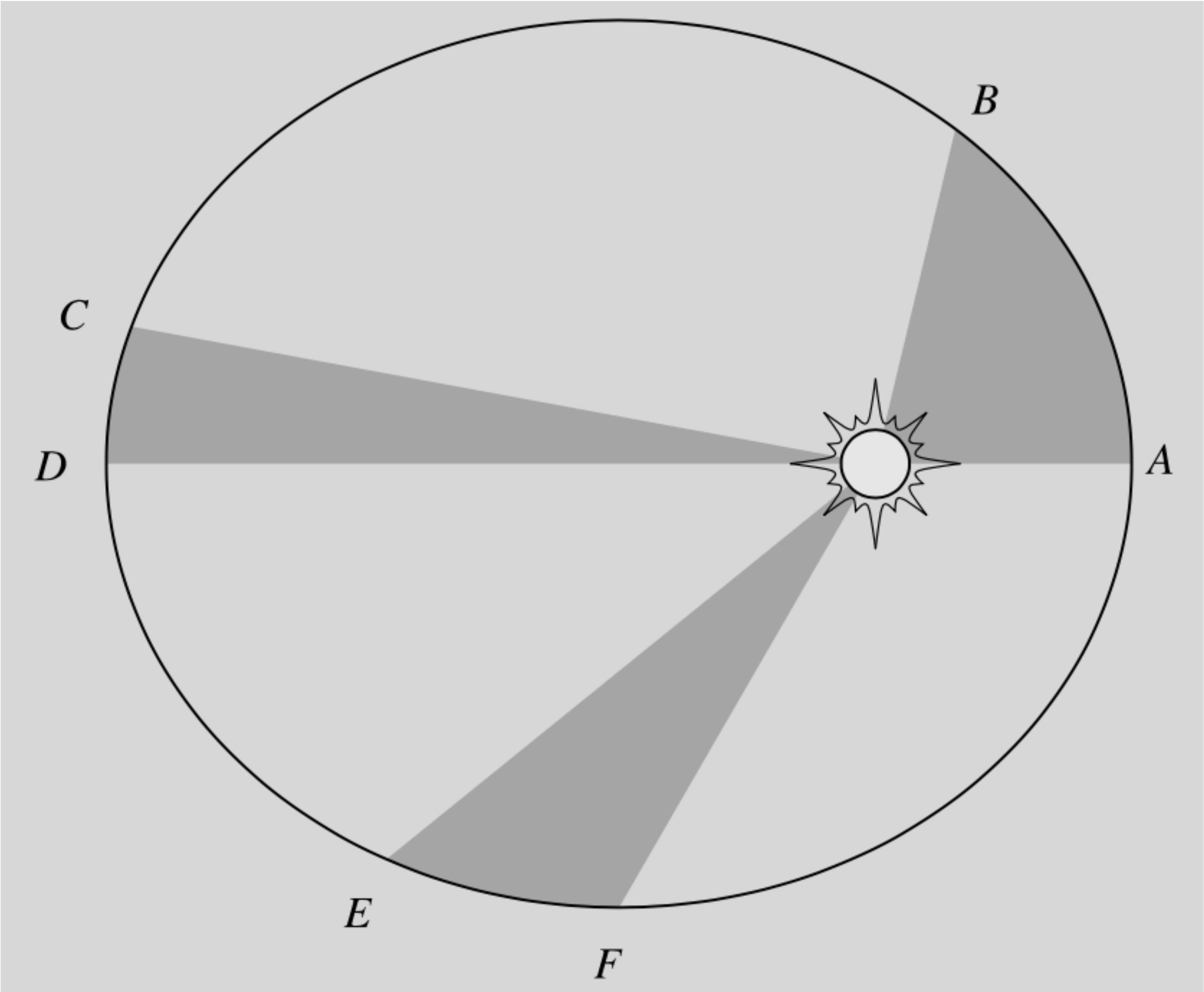
velocità areale pianeta: area spazzata dal raggio vettore per unità di tempo

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

compariamo con:

$$|K| = r^2 \dot{\theta}$$

2 legge di Keplero



velocità areale pianeta: area spazzata dal raggio vettore per unità di tempo

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

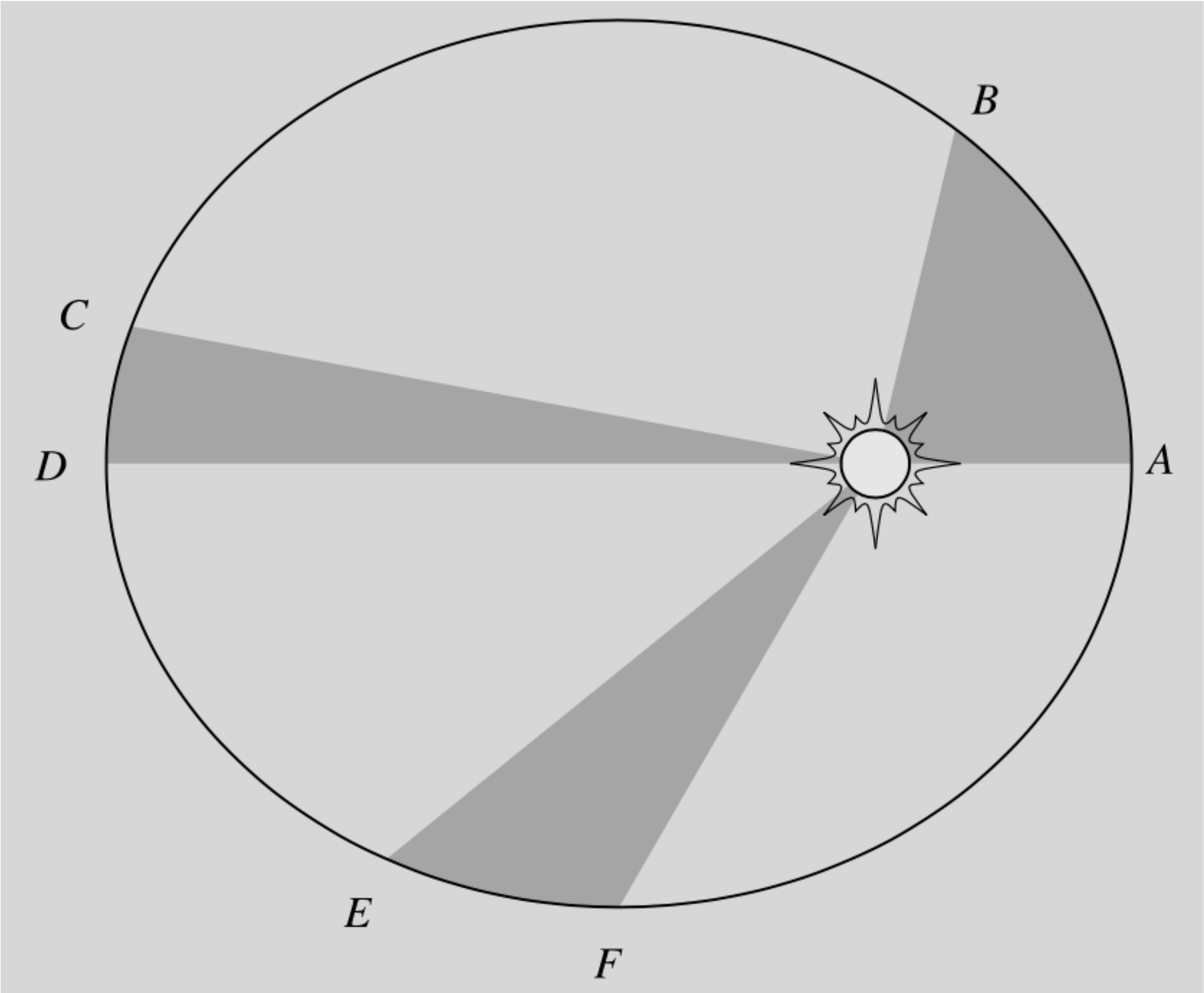
compariamo con:

$$|k| = r^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{A} = \frac{1}{2} k$$

k = costante, quindi $\dot{A}$ = costante

2 legge di Keplero



velocità areale pianeta: area spazzata dal raggio vettore per unità di tempo

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \vartheta$$

compariamo con:

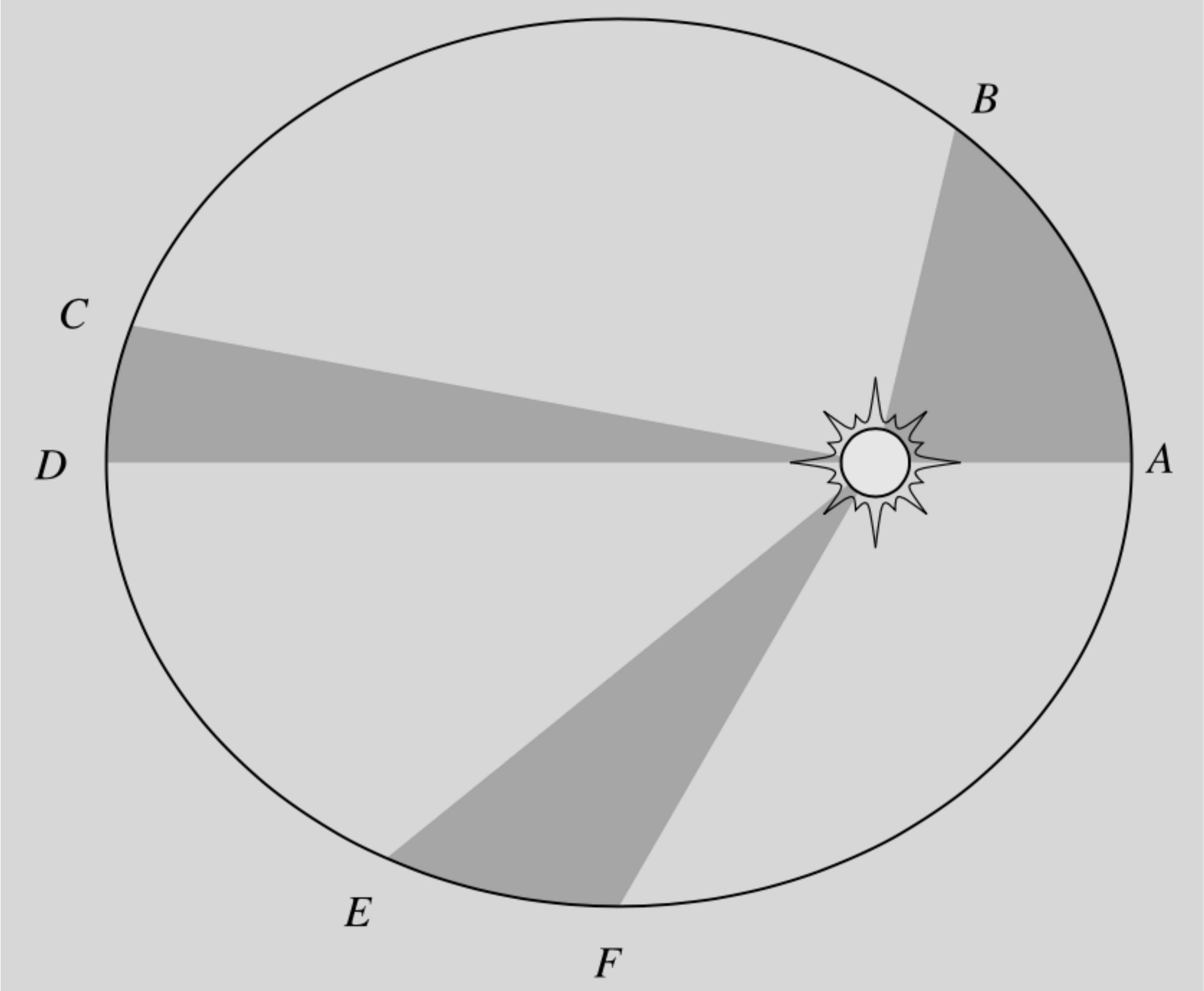
$$|K| = r^2 \vartheta$$

$$\Rightarrow \quad \dot{A} = \frac{1}{2} K$$

k = costante, quindi $\dot{A}$ = costante

Seconda legge di Keplero
Nel suo moto intorno al sole, un pianeta spazza un'area di orbita uguale in tempi uguali

2 legge di Keplero



in questa figura, le aree spazzate tra AB, CD ed EF sono uguali; sono percorse quindi in tempi uguali

velocità areale pianeta: area spazzata dal raggio vettore per unità di tempo

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

compariamo con:

$$|K| = r^2 \theta$$

$$\Rightarrow \quad \dot{A} = \frac{1}{2} K$$

k = costante, quindi $\dot{A}$ = costante

Seconda legge di Keplero
Nel suo moto intorno al sole, un pianeta spazza un'area di orbita uguale in tempi uguali

3 legge di Keplero

3 legge di Keplero

dalla definizione di velocità areale: $dA = \frac{1}{2} K \, dt$

3 legge di Keplero

dalla definizione di velocità areale: $dA = \frac{1}{2} K\, dt$

integro su un'orbita: $\oint dA = \frac{1}{2} K \int_0^P dt$

3 legge di Keplero

dalla definizione di velocità areale: $dA = \frac{1}{2} K \, dt$

integro su un'orbita: $\oint dA = \frac{1}{2} K \int_0^P dt$

area ellisse: $\pi a b = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$

3 legge di Keplero

dalla definizione di velocità areale: $dA = \frac{1}{2} K\, dt$

integro su un'orbita: $\oint dA = \frac{1}{2} K \int_0^P dt$

area ellisse: $\pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$

$$\Rightarrow \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} K P$$

3 legge di Keplero

dalla definizione di velocità areale: $dA = \frac{1}{2} K\, dt$

integro su un'orbita: $\oint dA = \frac{1}{2} K \int_0^P dt$

area ellisse: $\pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$

$$\Rightarrow \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} K P$$

combinando $a = -M/2h$ e $h = -M/2a$

3 legge di Keplero

dalla definizione di velocità areale: $dA = \frac{1}{2} K \, dt$

integro su un'orbita: $\oint dA = \frac{1}{2} K \int_0^P dt$

area ellisse: $\pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$

$$\Rightarrow \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} K P$$

combinando $a = -\mu/2h$ e $h = -\mu/2a$

$$\mu^2 (e^2-1) = 2 h K^2$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

3 legge di Keplero

dalla definizione di velocità areale: $dA = \frac{1}{2} K\, dt$

integro su un'orbita: $\oint dA = \frac{1}{2} K \int_0^P dt$

area ellisse: $\pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$

$\Rightarrow \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} K P$

combinando $a = -M/2h$ e $h = -M/2a$

$M^2(e^2-1) = 2h\, K^2 \quad M^2(e^2-1) = -2\frac{M}{2a} K^2$

3 legge di Keplero

dalla definizione di velocità areale: $dA = \frac{1}{2} K\, dt$

integro su un'orbita: $\oint dA = \frac{1}{2} K \int_0^P dt$

area ellisse: $\pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$

$$\Rightarrow \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} K P$$

combinando $a = -\mu/2h$ e $h = -\mu/2a$

$$\mu^2(e^2-1) = 2h K^2 \qquad \mu^2(e^2-1) = -2\frac{\mu}{2a} K^2$$

$$K^2 = -\mu a (e^2-1) \qquad \mu = G(m_1+m_2)$$

$$\Rightarrow K = \sqrt{G(m_1+m_2)\, a\, (1-e^2)}$$

3 legge di Keplero

dalla definizione di velocità areale: $dA = \frac{1}{2} K \, dt$

integro su un'orbita: $\oint dA = \frac{1}{2} K \int_0^P dt$

area ellisse: $\pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$

$$\Rightarrow \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} K P$$

combinando $a = -\mu/2h$ e $h = -\mu/2a$

$$\mu^2(e^2-1) = 2hK^2 \qquad \mu^2(e^2-1) = -2\frac{\mu}{2a}K^2$$

$$K^2 = -\mu a (e^2-1) \qquad \mu = G(m_1+m_2)$$

$$\Rightarrow K = \sqrt{G(m_1+m_2)\, a\, (1-e^2)}$$

unendo

3 legge di Keplero

dalla definizione di velocità areale: $dA = \frac{1}{2} K\, dt$

integro su un'orbita: $\oint dA = \frac{1}{2} K \int_0^P dt$

area ellisse: $\pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$

$$\Rightarrow \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} K P$$

combinando $a = -\mathcal{M}/2h$ e $h = -\mathcal{M}/2a$

$$\mathcal{M}^2(e^2-1) = 2hK^2 \qquad \mathcal{M}^2(e^2-1) = -2\frac{\mathcal{M}}{2a}K^2$$

$$K^2 = -\mathcal{M}\, a\, (e^2-1) \qquad \mathcal{M} = G(m_1+m_2)$$

$$\Rightarrow K = \sqrt{G(m_1+m_2)\, a\, (1-e^2)}$$

unendo

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} P \sqrt{G(m_1+m_2)\, a\, (1-e^2)}$$

$$\pi^2 a^4 = \frac{1}{4} P^2 \cdot a \cdot G(m_1+m_2)$$

$$\boxed{P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}}$$

3 legge di Keplero

dalla definizione di velocità areale: $dA = \frac{1}{2} K\, dt$

integro su un'orbita: $\oint dA = \frac{1}{2} K \int^{P} dt$

area ellisse: $\pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$

$$\Rightarrow \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} K P$$

combinando $a = -M/2h$ e $h = -M/2a$

$M^2(e^2-1) = 2hK^2$ $\quad M^2(e^2-1) = -2\frac{M}{2a}K^2$

(e^2-1) $\quad M = G(m_1+m_2)$

$\Rightarrow K = \sqrt{G(m_1+m_2)\, a\, (1-e^2)}$

unendo

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} P \sqrt{G(m_1+m_2)\, a\, (1-e^2)}$$

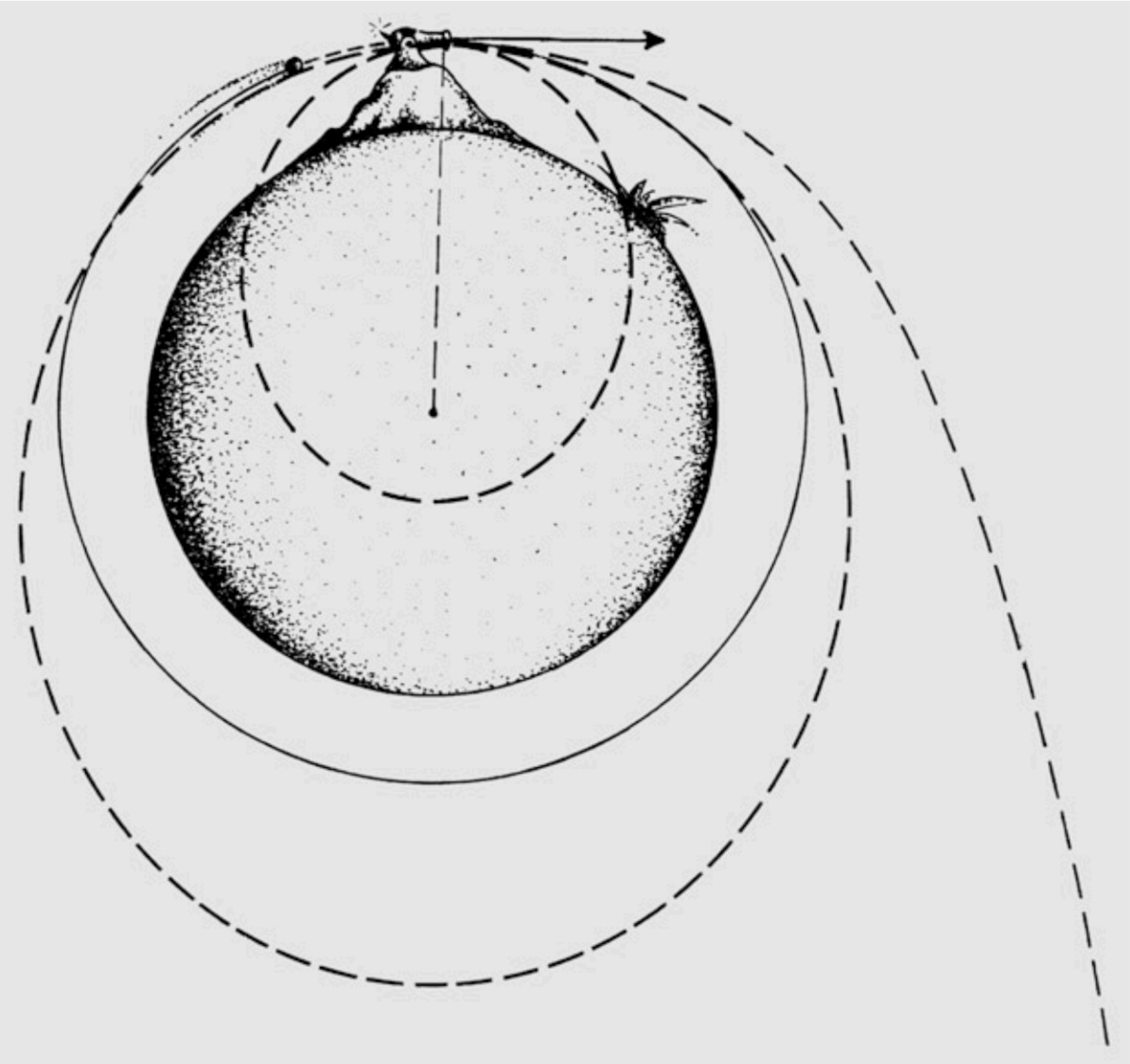
$$\pi^2 a^4 = \frac{1}{4} P^2 \cdot a \cdot G(m_1+m_2)$$

$$\boxed{P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}}$$

Terza legge di Keplero
I pianeti più distanti dal Sole orbitano con velocità angolare minore, secondo una precisa legge $P^2 \propto a^3$

Velocità di fuga

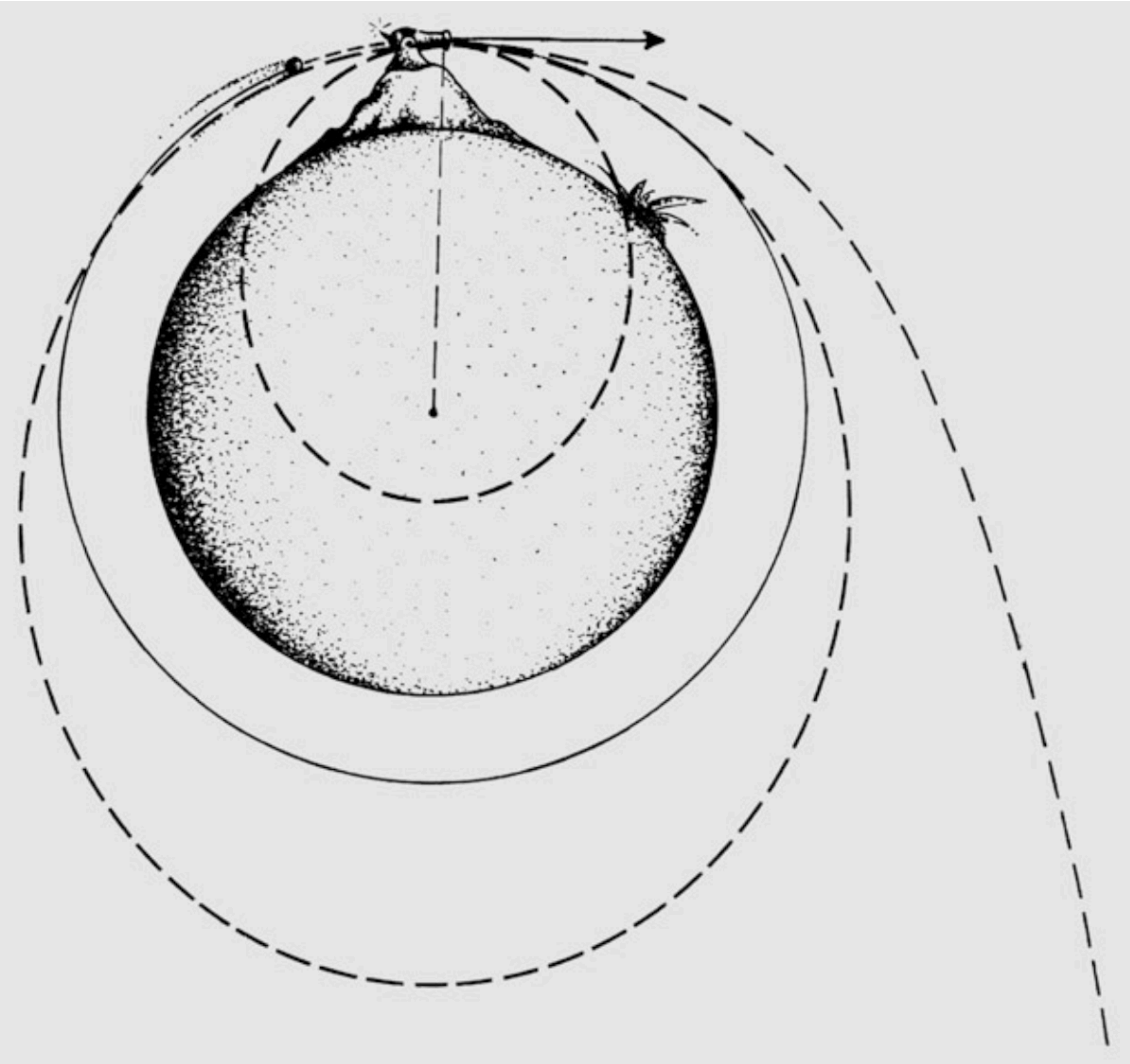
Un proiettile viene sparato orizzontalmente da una montagna su un pianeta senza atmosfera. Se la velocità iniziale è piccola, l'orbita è un'ellisse il cui pericentro è all'interno del pianeta e il proiettile colpirà la superficie del pianeta. Quando la velocità aumenta, il pericentro si sposta al di fuori del pianeta. Quando la velocità iniziale è v_c, l'orbita è circolare. Se la velocità viene aumentata ulteriormente, l'eccentricità dell'orbita cresce nuovamente e il pericentro è all'altezza del cannone. L'apocentro si allontana fino a quando l'orbita diventa parabolica quando la velocità iniziale è v_e. Con velocità ancora più elevate, l'orbita diventa iperbolica



Velocità di fuga

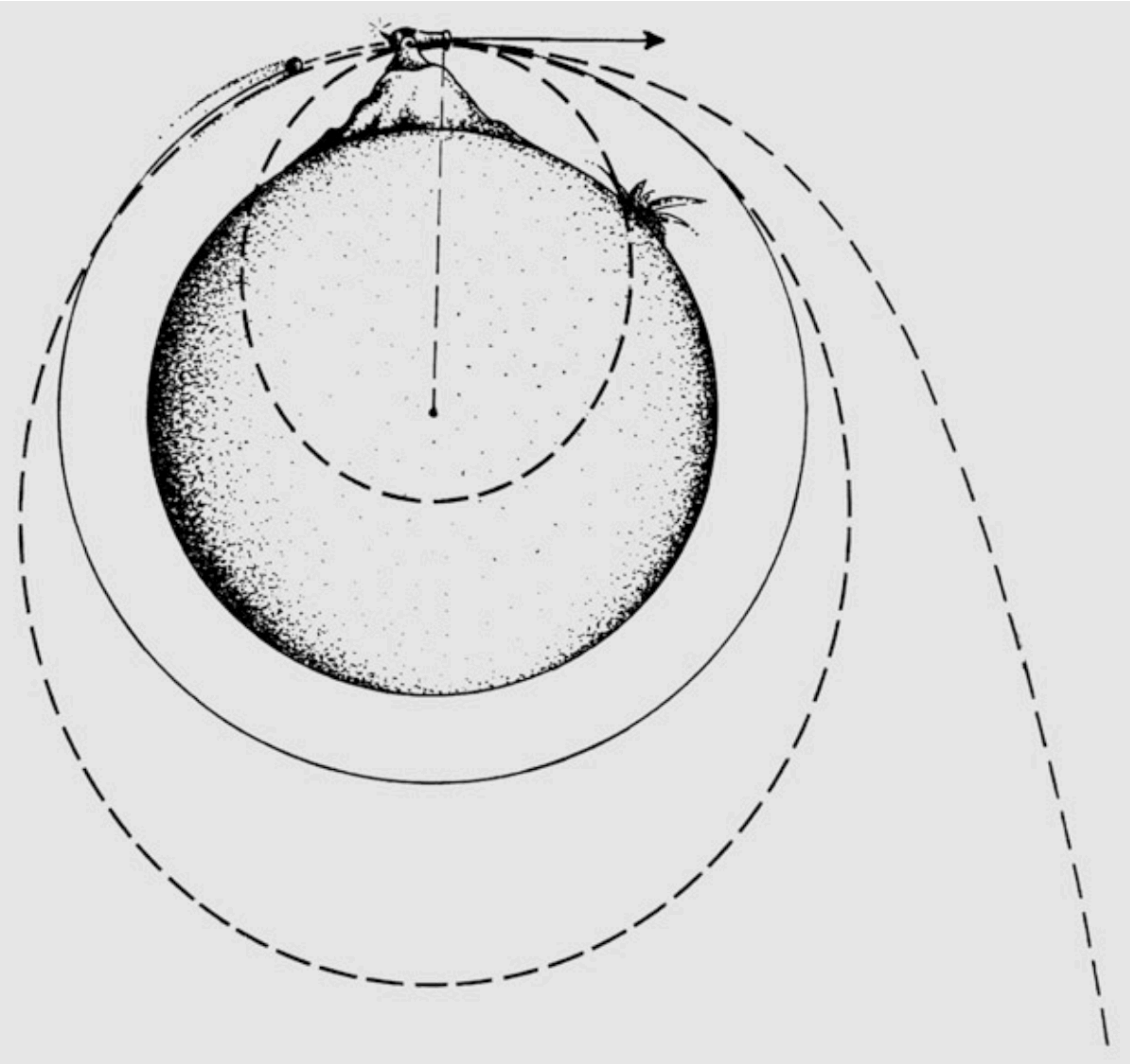
Un proiettile viene sparato orizzontalmente da una montagna su un pianeta senza atmosfera. Se la velocità iniziale è piccola, l'orbita è un'ellisse il cui pericentro è all'interno del pianeta e il proiettile colpirà la superficie del pianeta. Quando la velocità aumenta, il pericentro si sposta al di fuori del pianeta. Quando la velocità iniziale è v_c, l'orbita è circolare. Se la velocità viene aumentata ulteriormente, l'eccentricità dell'orbita cresce nuovamente e il pericentro è all'altezza del cannone. L'apocentro si allontana fino a quando l'orbita diventa parabolica quando la velocità iniziale è v_e. Con velocità ancora più elevate, l'orbita diventa iperbolica

Se un pianeta ha una velocità sufficientemente alta $v>v_e$, può sfuggire dal campo gravitazionale del corpo centrale
(o meglio, può allontanarsi indefinitamente:
$v = 0$ *quando* $r = \infty$*)*



Velocità di fuga

Un proiettile viene sparato orizzontalmente da una montagna su un pianeta senza atmosfera. Se la velocità iniziale è piccola, l'orbita è un'ellisse il cui pericentro è all'interno del pianeta e il proiettile colpirà la superficie del pianeta. Quando la velocità aumenta, il pericentro si sposta al di fuori del pianeta. Quando la velocità iniziale è v_c, l'orbita è circolare. Se la velocità viene aumentata ulteriormente, l'eccentricità dell'orbita cresce nuovamente e il pericentro è all'altezza del cannone. L'apocentro si allontana fino a quando l'orbita diventa parabolica quando la velocità iniziale è v_e. Con velocità ancora più elevate, l'orbita diventa iperbolica



Se un pianeta ha una velocità sufficientemente alta $v > v_e$, può sfuggire dal campo gravitazionale del corpo centrale
(o meglio, può allontanarsi indefinitamente: $v = 0$ quando $r = \infty$)

$$\boxed{v_e = \text{velocità di fuga}}$$

Velocità di fuga

se $v=v_e$

a distanza infinita, sia la velocità che il campo gravitazionale saranno nulli, quindi l'integrale dell'energia h = 0

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{G(m_1+m_2)}{r} = h$$

per r = ∞ h = 0

$$\boxed{}$$

Velocità di fuga

se $v = v_e$

a distanza infinita, sia la velocità che il campo gravitazionale saranno nulli, quindi l'integrale dell'energia h = 0

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{G(m_1 + m_2)}{r} = h$$

per r = ∞ h = 0

cons. en.: h = 0 anche al momento dello "sparo":

$$\frac{1}{2} v_e^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R}$$

Velocità di fuga

se $v=v_e$

a distanza infinita, sia la velocità che il campo gravitazionale saranno nulli, quindi l'integrale dell'energia h = 0

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{G(m_1+m_2)}{r} = h$$

per r = ∞ h = 0

cons. en.: h = 0 anche al momento dello "sparo":

$$\frac{1}{2}v_e^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{R}$$

quindi:

$$\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{R}}}$$

Velocità di fuga

se $v = v_e$

a distanza infinita, sia la velocità che il campo gravitazionale saranno nulli, quindi l'integrale dell'energia $h = 0$

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{G(m_1 + m_2)}{r} = h$$

per $r = \infty$ $h = 0$

cons. en.: $h = 0$ anche al momento dello "sparo":

$$\frac{1}{2} v_e^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R}$$

quindi:

$$\boxed{v_e = \sqrt{\frac{2G(m_1 + m_2)}{R}}}$$

sulla superficie della terra, $v_e \cong 11$ km/s

Velocità di fuga

la velocità di fuga si può esprimere anche in funzione della velocità su un orbita circolare v_c:

$$P = \frac{2\pi R_c}{V_c}$$

Velocità di fuga

la velocità di fuga si può esprimere anche in funzione della velocità su un orbita circolare v_c:

$$P = \frac{2\pi R_c}{v_c}$$

terza legge Keplero:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G(M_1 + M_2)}$$

Velocità di fuga

la velocità di fuga si può esprimere anche in funzione della velocità su un orbita circolare v_c:

$$P = \frac{2\pi R_c}{v_c}$$

terza legge Keplero: $$P^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G(M_1+M_2)}$$

$$\frac{4\pi^2 R_c^{\,2}}{v_c^{\,2}} = \frac{4\pi^2 R_c^3}{G(M_1+M_2)}$$

Velocità di fuga

la velocità di fuga si può esprimere anche in funzione della velocità su un orbita circolare v_c:

$$P = \frac{2\pi R_c}{v_c}$$

terza legge Keplero:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G(m_1 + m_2)}$$

$$\frac{4\pi^2 R_c^2}{v_c^2} = \frac{4\pi^2 R_c^3}{G(m_1 + m_2)}$$

e quindi:

$$v_c = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{R_c}}$$

Università degli Studi di Padova

Velocità di fuga

la velocità di fuga si può esprimere anche in funzione della velocità su un orbita circolare v_c:

$$P = \frac{2\pi R_c}{v_c}$$

terza legge Keplero: $$P^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G(m_1+m_2)}$$

$$\frac{4\pi^2 R_c^2}{v_c^2} = \frac{4\pi^2 R_c^3}{G(m_1+m_2)}$$

e quindi:

$$v_c = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{R_c}} \qquad v_e = \sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{R}}$$

Velocità di fuga

la velocità di fuga si può esprimere anche in funzione della velocità su un orbita circolare v_c:

$$P = \frac{2\pi R_c}{v_c}$$

terza legge Keplero:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G(m_1+m_2)}$$

$$\frac{4\pi^2 R_c^2}{v_c^2} = \frac{4\pi^2 R_c^3}{G(m_1+m_2)}$$

e quindi:

$$v_c = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{R_c}} \qquad v_e = \sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{R}}$$

$$\boxed{v_e = \sqrt{2}\, v_c}$$

Sistemi di molti corpi

equazione del moto della particella *k*, dovuta all'interazione con le altre *i≠k* particelle:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} G m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|r_i - r_k|^3}$$

Sistemi di molti corpi

equazione del moto della particella *k*, dovuta all'interazione con le altre *i≠k* particelle:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} G m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|r_i - r_k|^3}$$

---

si possono calcolare analiticamente solo il momento totale, il momento angolare totale e l'energia totale

Sistemi di molti corpi

equazione del moto della particella *k*, dovuta all'interazione con le altre *i≠k* particelle:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} G m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|r_i - r_k|^3}$$

---

si possono calcolare analiticamente solo il momento totale, il momento angolare totale e l'energia totale

Sistemi di molti corpi

equazione del moto della particella *k*, dovuta all'interazione con le altre *i*≠*k* particelle:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} G m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|r_i - r_k|^3}$$

si possono calcolare analiticamente solo il momento totale, il momento angolare totale e l'energia totale

se in un istante *t* si conoscono r_i e v_i, si possono ottenere posizioni e velocità in qualsiasi altro istante integrando numericamente le equazioni del moto

Sistemi di molti corpi

equazione del moto della particella *k*, dovuta all'interazione con le altre *i≠k* particelle:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} G m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|r_i - r_k|^3}$$

---

si possono calcolare analiticamente solo il momento totale, il momento angolare totale e l'energia totale

se in un istante *t* si conoscono r_i e v_i, si possono ottenere posizioni e velocità in qualsiasi altro istante integrando numericamente le equazioni del moto

Sistemi di molti corpi

equazione del moto della particella *k*, dovuta all'interazione con le altre *i≠k* particelle:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} G m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|r_i - r_k|^3}$$

---

si possono calcolare analiticamente solo il momento totale, il momento angolare totale e l'energia totale

se in un istante *t* si conoscono r_i e v_i, si possono ottenere posizioni e velocità in qualsiasi altro istante integrando numericamente le equazioni del moto

Se, come nel caso del sistema solare, un corpo domina la massa del sistema, si può usare un metodo differente:

Sistemi di molti corpi

equazione del moto della particella *k*, dovuta all'interazione con le altre *i≠k* particelle:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} G m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|r_i - r_k|^3}$$

---

si possono calcolare analiticamente solo il momento totale, il momento angolare totale e l'energia totale

se in un istante *t* si conoscono r_i e v_i, si possono ottenere posizioni e velocità in qualsiasi altro istante integrando numericamente le equazioni del moto

Se, come nel caso del sistema solare, un corpo domina la massa del sistema, si può usare un metodo differente:

Sistemi di molti corpi

equazione del moto della particella *k*, dovuta all'interazione con le altre *i*≠*k* particelle:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} G m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|r_i - r_k|^3}$$

---

si possono calcolare analiticamente solo il momento totale, il momento angolare totale e l'energia totale

se in un istante *t* si conoscono r_i e v_i, si possono ottenere posizioni e velocità in qualsiasi altro istante integrando numericamente le equazioni del moto

Se, come nel caso del sistema solare, un corpo domina la massa del sistema, si può usare un metodo differente:

i moti dei singoli pianeti si calcolano come sistema a 2 corpi (Sole+pianeta), e si calcolano le perturbazioni di tali moti dovuti agli altri pianeti

Sistemi di molti corpi

equazione del moto della particella *k*, dovuta all'interazione con le altre *i≠k* particelle:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} G m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|r_i - r_k|^3}$$

si possono calcolare analiticamente solo il momento totale, il momento angolare totale e l'energia totale

se in un istante *t* si conoscono r_i e v_i, si possono ottenere posizioni e velocità in qualsiasi altro istante integrando numericamente le equazioni del moto

Se, come nel caso del sistema solare, un corpo domina la massa del sistema, si può usare un metodo differente:

i moti dei singoli pianeti si calcolano come sistema a 2 corpi (Sole+pianeta), e si calcolano le perturbazioni di tali moti dovuti agli altri pianeti

Caso speciale è il sistema ristretto dei 3 corpi: un corpo senza massa si muove nel campo gravitazionale generato dagli altri 2

Sistemi di molti corpi

equazione del moto della particella *k*, dovuta all'interazione con le altre *i≠k* particelle:

$$\vec{a}_k = \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} G m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|r_i - r_k|^3}$$

---

si possono calcolare analiticamente solo il momento totale, il momento angolare totale e l'energia totale

se in un istante *t* si conoscono r_i e v_i, si possono ottenere posizioni e velocità in qualsiasi altro istante integrando numericamente le equazioni del moto

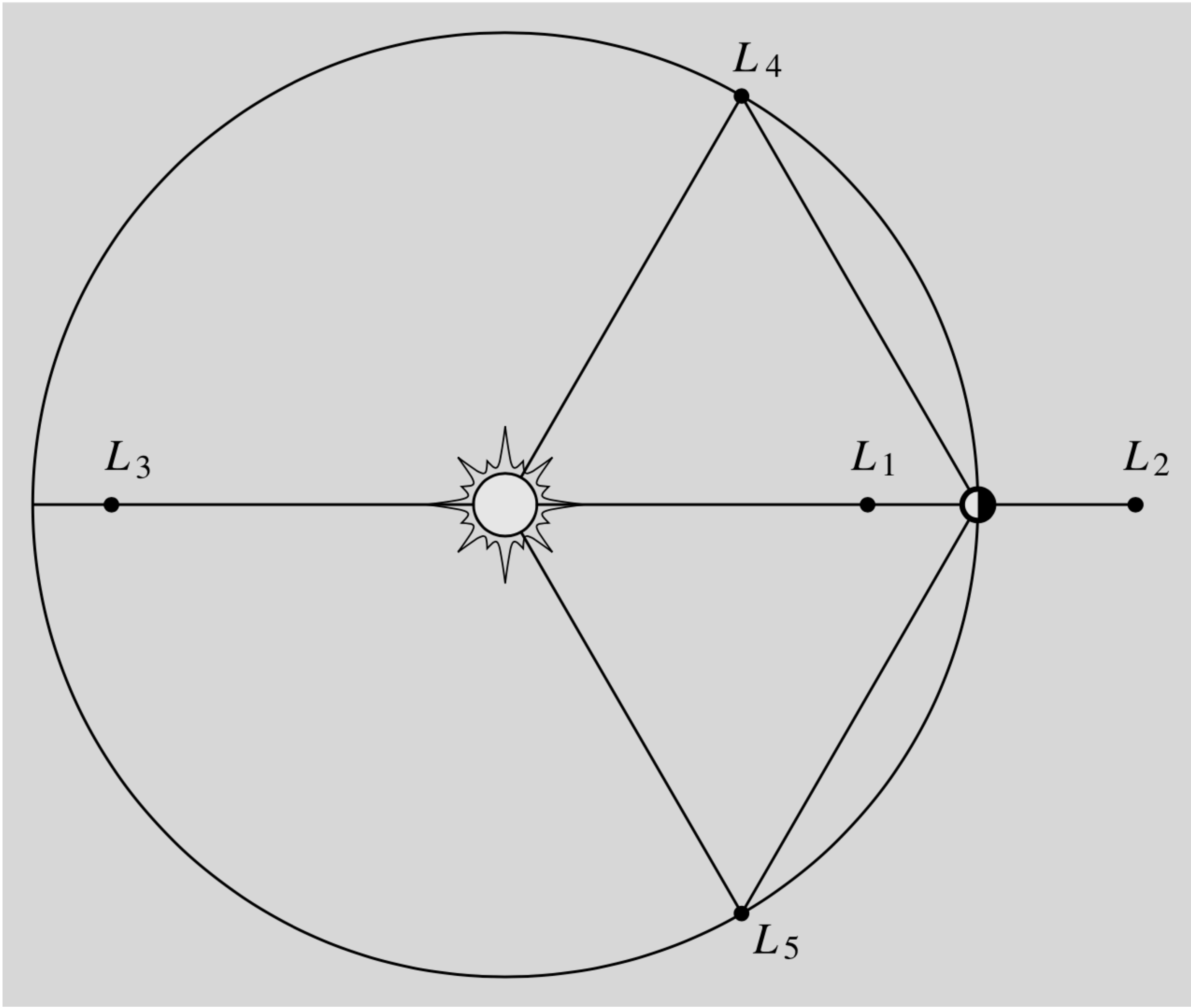
Se, come nel caso del sistema solare, un corpo domina la massa del sistema, si può usare un metodo differente:

i moti dei singoli pianeti si calcolano come sistema a 2 corpi (Sole+pianeta), e si calcolano le perturbazioni di tali moti dovuti agli altri pianeti

Caso speciale è il sistema ristretto dei 3 corpi: un corpo senza massa si muove nel campo gravitazionale generato dagli altri 2

Punti lagrangiani:

- L_1, L_2, L_3 equilibrio instabile;
- L_4, L_5 equilibrio stabile



Teorema del viriale

Teorema del viriale

Se un sistema contiene più di 2 particelle, le equazioni del moto non si possono risolvere analiticamente, ma solo numericamente

non ci dice niente sulle proprietà generali di tutte le orbite possibili

Gli unici integrali possibili sono il momento totale, il momento angolare totale e l'energia cinetica

Possiamo però ricavare delle proprietà statistiche

Teorema del viriale

Se un sistema contiene più di 2 particelle, le equazioni del moto non si possono risolvere analiticamente, ma solo numericamente

non ci dice niente sulle proprietà generali di tutte le orbite possibili

Gli unici integrali possibili sono il momento totale, il momento angolare totale e l'energia cinetica

Possiamo però ricavare delle proprietà statistiche

definiamo viriale *A* di un sistema di particelle:

$$A = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i$$

Teorema del viriale

Se un sistema contiene più di 2 particelle, le equazioni del moto non si possono risolvere analiticamente, ma solo numericamente

non ci dice niente sulle proprietà generali di tutte le orbite possibili

Gli unici integrali possibili sono il momento totale, il momento angolare totale e l'energia cinetica

Possiamo però ricavare delle proprietà statistiche

definiamo viriale *A* di un sistema di particelle:

$$A = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i$$

deriviamo A rispetto al tempo:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + m_i \vec{a}_i \cdot \vec{r}_i \right)$$

Teorema del viriale

Se un sistema contiene più di 2 particelle, le equazioni del moto non si possono risolvere analiticamente, ma solo numericamente

non ci dice niente sulle proprietà generali di tutte le orbite possibili

Gli unici integrali possibili sono il momento totale, il momento angolare totale e l'energia cinetica

Possiamo però ricavare delle proprietà statistiche

definiamo viriale *A* di un sistema di particelle:

$$A = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i$$

deriviamo A rispetto al tempo:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\underbrace{m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}_{2T_i} + \underbrace{m_i \vec{a}_i \cdot \vec{r}_i}_{\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} \right)$$

Teorema del viriale

Se un sistema contiene più di 2 particelle, le equazioni del moto non si possono risolvere analiticamente, ma solo numericamente

non ci dice niente sulle proprietà generali di tutte le orbite possibili

Gli unici integrali possibili sono il momento totale, il momento angolare totale e l'energia cinetica

Possiamo però ricavare delle proprietà statistiche

definiamo viriale *A* di un sistema di particelle:

$$A = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i$$

deriviamo A rispetto al tempo:

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}_{2T_i} + \underbrace{m_i \vec{a}_i \cdot \vec{r}_i}_{\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} \Big)$$

$$\frac{dA}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

T energia cinetica totale del sistema

Teorema del viriale

Teorema del viriale

$$\frac{dA}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\frac{dA}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

facciamone la media nel periodo τ:

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dA}{dt}\, dt =$$

$$= \langle 2T \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

Teorema del viriale

$$\frac{dA}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

facciamone la media nel periodo τ:

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dA}{dt}\, dt =$$

$$= \langle 2T \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

se il sistema rimane confinato, cioè le particelle restano legate al sistema, sia le velocità (quindi *T*) che i raggi vettore $\boldsymbol{r_i}$ rimarranno confinati, e quindi finiti

Teorema del viriale

$$\frac{dA}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

facciamone la media nel periodo τ:

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \frac{dA}{dt}\,dt =$$

$$= \langle 2T \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

se il sistema rimane confinato, cioè le particelle restano legate al sistema, sia le velocità (quindi T) che i raggi vettore $\boldsymbol{r_i}$ rimarranno confinati, e quindi finiti

Quindi anche $\dot{A}$ rimane finito

Teorema del viriale

$$\frac{dA}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

facciamone la media nel periodo τ:

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dA}{dt}\, dt =$$

$$= \langle 2T \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

se il sistema rimane confinato, cioè le particelle restano legate al sistema, sia le velocità (quindi T) che i raggi vettore $\boldsymbol{r_i}$ rimarranno confinati, e quindi finiti

Quindi anche $\dot{A}$ rimane finito

se $\tau \rightarrow \infty$ $\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = 0$

Teorema del viriale

$$\frac{dA}{dt} = 2T + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

facciamone la media nel periodo τ:

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dA}{dt}\,dt =$$

$$= \langle 2T \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

se il sistema rimane confinato, cioè le particelle restano legate al sistema, sia le velocità (quindi *T*) che i raggi vettore $\boldsymbol{r_i}$ rimarranno confinati, e quindi finiti

Quindi anche $\dot{A}$ rimane finito

se $\tau \rightarrow \infty$ $\qquad \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = 0$

$$\boxed{\Rightarrow \langle 2T \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle}$$

formulazione generale del teorema del viriale

Teorema del viriale

$$\langle 2T \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

Teorema del viriale

$$\langle 2T \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

se le forze in gioco sono solamente quelle gravitazionali tra le particelle

Teorema del viriale

$$\langle 2T \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

se le forze in gioco sono solamente
quelle gravitazionali tra le particelle

Teorema del viriale

$$\langle 2T \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

$$\vec{F}_i = - G m_i \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3}$$

$$r_{ij} = |r_i - r_j|$$

se le forze in gioco sono solamente quelle gravitazionali tra le particelle

Teorema del viriale

$$\langle 2T \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

$$\vec{F}_i = -G m_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3}$$

$$r_{ij} = |r_i - r_j|$$

se le forze in gioco sono solamente
quelle gravitazionali tra le particelle

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = -G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} m_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3} \cdot \vec{r}_i$$

Teorema del viriale

$$\langle 2T \rangle = -\left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

$$\vec{F}_i = -G m_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3}$$

$$r_{ij} = |r_i - r_j|$$

se le forze in gioco sono solamente quelle gravitazionali tra le particelle

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = -G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} m_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3} \cdot \vec{r}_i$$

$$= -G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} m_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Università degli Studi di Padova

Teorema del viriale

$$\langle 2T \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

$$\vec{F}_i = - G m_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3}$$

$$r_{ij} = |r_i - r_j|$$

se le forze in gioco sono solamente quelle gravitazionali tra le particelle

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = -G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} m_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3} \cdot \vec{r}_i$$

$$= -G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} m_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$= -G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = U$$

U energia potenziale

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Teorema del viriale

$$\langle 2T \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

$$\vec{F}_i = -G\, m_i \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3}$$

$$r_{ij} = |r_i - r_j|$$

se le forze in gioco sono solamente quelle gravitazionali tra le particelle

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = -G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} m_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3} \cdot \vec{r}_i$$

$$= -G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} m_i m_j \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_{ij}^3} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$= -G \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = U$$

U energia potenziale

$$\boxed{\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle}$$

formulazione gravitazionale del teorema del viriale

Università degli Studi di Padova

Limite di Jeans

Come vedremo, stelle e galassie si formano da nubi di gas che collassano su se' stesse, a causa dell'attrazione gravitazionale tra le particelle

Se l'energia potenziale eccede quella cinetica, la nube collassa (dal teorema del virale sappiamo che deve essere almeno il doppio di quella cinetica)

Questo ci da' modo di definire un criterio di collasso: se la massa di una nube eccede un certo limite, *U>2T* e la nube collassa

Tale massa dipenderà dalla pressione P del gas, dalla costante G e dalla densità:

$$M_J = CP^aG^b\rho^c$$

Tenendo conto delle unità di misura:

- $P = [\mathrm{kg\ m^{-1}\ s^{-2}}]$
- $G = [\mathrm{kg\ m^{3}\ s^{-2}}]$
- $\rho = [\mathrm{kg\ m^{-3}}]$
- $M = [\mathrm{kg}]$

$$\boxed{M_J = C\frac{P^{3/2}}{G^{3/2}\rho^2}}$$

Massa di Jeans