



Corso di Laurea in Chimica Industriale

Chimica Fisica II

Prologo

Il campo elettromagnetico

A.A. 2022-2023

Marco Ruzzi



Dipartimento di Scienze Chimiche
Università degli Studi di Padova
Via Marzolo 1 35129 Padova
E-mail: marco.ruzzi@unipd.it

Il campo elettromagnetico [1]

Nell'ambito dell'elettrodinamica classica le Equazioni di Maxwell rappresentano la descrizione più evoluta e sintetica di tutti i fenomeni elettrici, magnetici e ottici...
La soluzione delle Equazioni di Maxwell porta alla descrizione della luce in termini di campi elettrici e magnetici oscillanti...

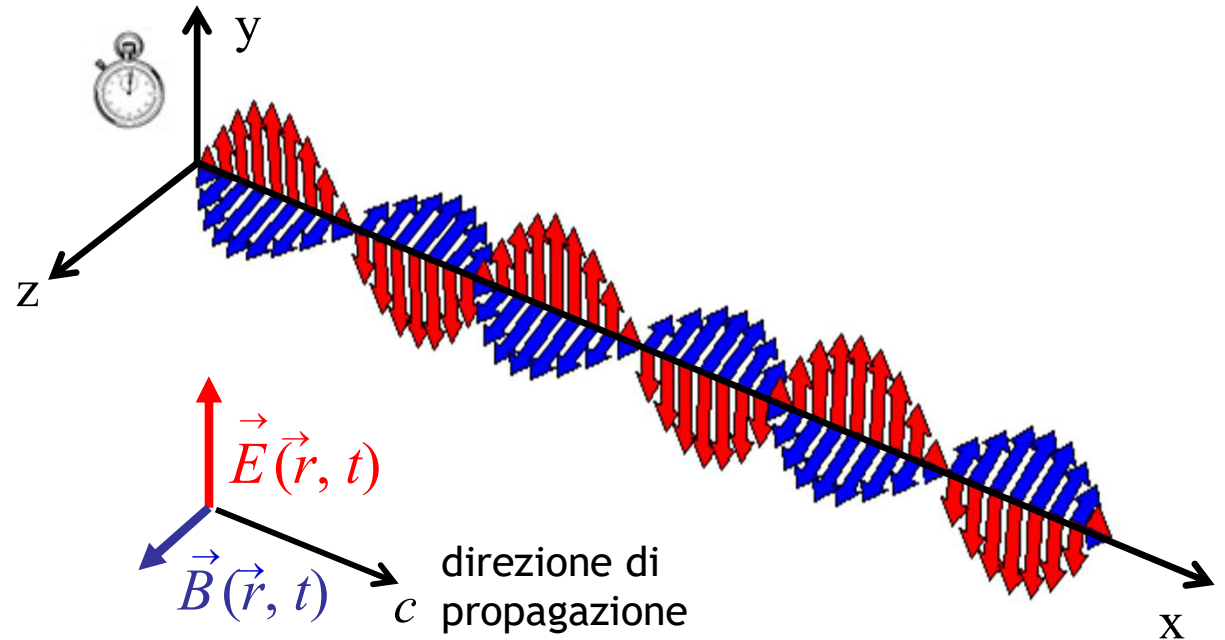
$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\sigma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\gamma} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\sigma$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\gamma} = \mu_0 i + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\sigma$$

forma integro-differenziale...



Il campo elettromagnetico [2]

Nell'ambito dell'elettrodinamica classica le Equazioni di Maxwell rappresentano la descrizione più evoluta e sintetica di tutti i fenomeni elettrici, magnetici e ottici...
La soluzione delle Equazioni di Maxwell porta alla descrizione della luce in termini di campi elettrici e magnetici oscillanti...

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\sigma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\gamma} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\sigma$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\gamma} = \mu_0 i + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\sigma$$

forma integro-differenziale...

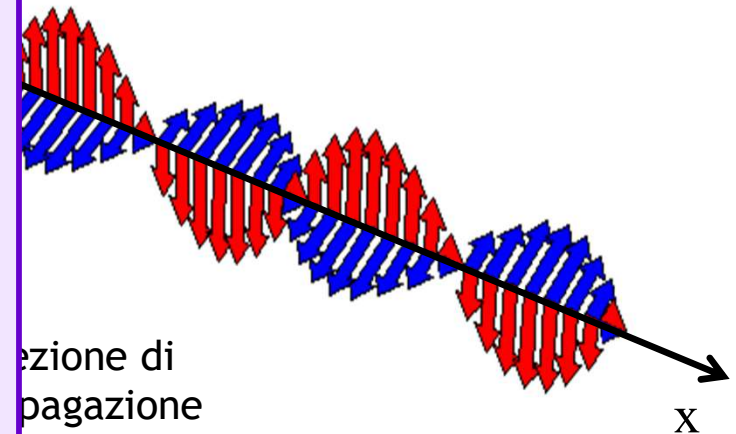
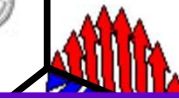
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

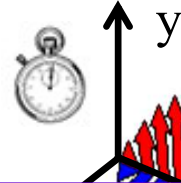
$$\nabla \wedge \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

forma operatoriale...



Il campo elettromagnetico [3]

Nell'ambito dell'elettrodinamica classica le Equazioni di Maxwell rappresentano la descrizione più evoluta e sintetica di tutti i fenomeni elettrici, magnetici e ottici...
La soluzione delle Equazioni di Maxwell porta alla descrizione della luce in termini di campi elettrici e magnetici oscillanti...



$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\sigma = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\gamma} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{u}_n d\sigma$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\gamma} = \mu_0 i + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u}_n d\sigma$$

forma integro-differenziale...

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

forma operatoriale...

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^{\nu}$$

$$\partial^{\mu} F^{\nu\rho} + \partial^{\nu} F^{\rho\mu} + \partial^{\rho} F^{\mu\nu} = 0$$

forma tensoriale...

complettà del linguaggio matematico

Il campo elettromagnetico [4]

La luce è una particolare radiazione elettromagnetica che può essere recepita dall'occhio umano ...



... ma lo spettro elettromagnetico non si esaurisce nel range del visibile.

Lo spettro elettromagnetico è costituito da diversi tipi di radiazione (raggi γ , raggi X, UV, luce visibile, IR, microonde, onde radio) che si differenziano per energia e sono caratterizzate da lunghezze d'onda (e frequenze) diverse...

In tutti i casi il campo elettromagnetico è in grado di propagarsi nel vuoto con velocità $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ (H. Hertz).

Nel vuoto vale:

$$c = \frac{\lambda}{P} = \lambda \nu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

In un determinato materiale (in assenza di estinzione di intensità) vale:

$$v = \frac{\lambda}{P} = \lambda \nu = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} < c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

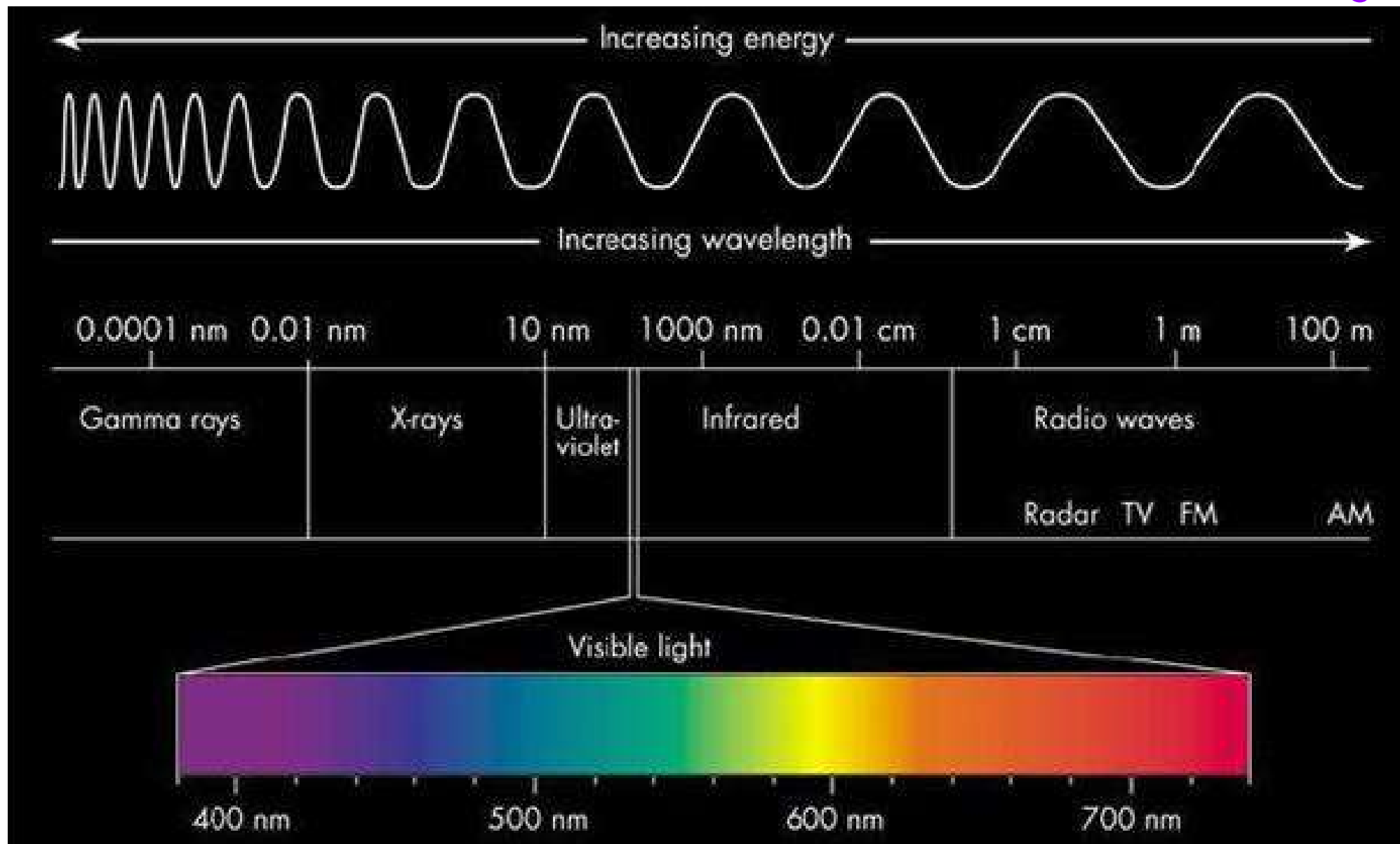
Il campo elettromagnetico [5]

Il range del visibile è dunque una ristretta regione dello spettro elettromagnetico...

$$c = \frac{\lambda}{P} = \lambda \nu$$

radiazioni ad alta energia

radiazioni a bassa energia



Il campo elettromagnetico [6]

L'elettrodinamica classica è in grado di interpretare la quasi totalità degli esperimenti che non richiedono una descrizione elementare dell'interazione radiazione-materia...

In particolare nell'ambito di esperimenti inerenti i seguenti fenomeni luminosi:

1. riflessione e trasmissione
2. rifrazione
3. dispersione
4. interferenza
5. diffrazione

non vi è modo di interpretare i risultati ottenuti sperimentalmente se non ammettendo il comportamento ondulatorio classico della luce.

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\sigma = 0$$

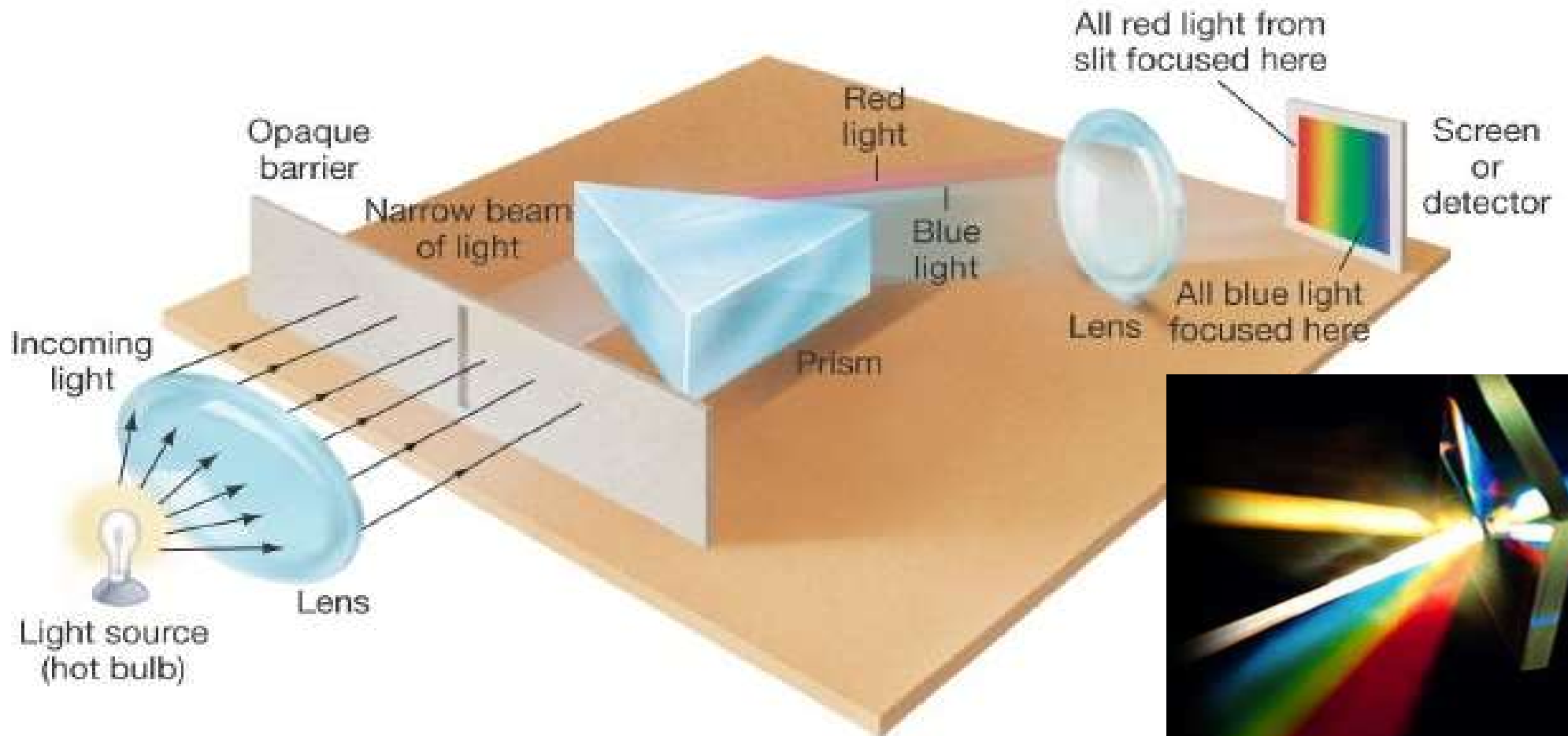
$$X_{\Gamma}(\vec{E}) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \hat{u}_t d\gamma = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\sigma$$

$$X_{\Gamma}(\vec{B}) = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \hat{u}_t d\gamma = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\sigma$$

Il campo elettromagnetico [7]

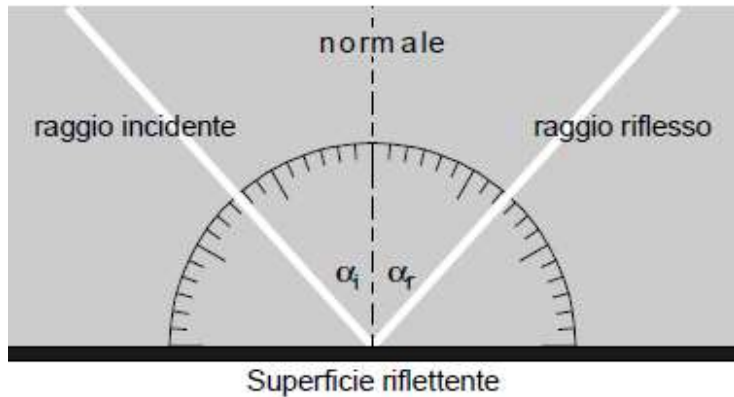
Fenomeni di rifrazione

Un prisma può essere utilizzato per disperdere (separare) le diverse componenti spettrali monocromatiche che costituiscono un raggio (treno d'onde) di luce bianca (policromatica). L'insieme delle componenti rifratte costituisce il caratteristico spettro continuo (multicolore) della luce visibile.



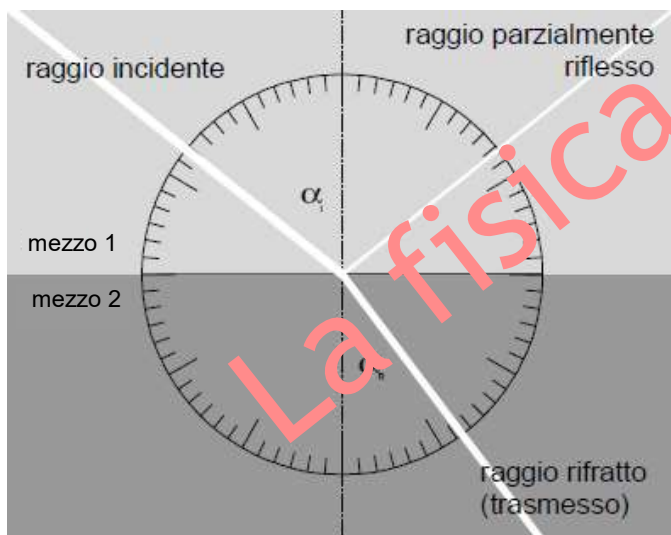
Il campo elettromagnetico [8]

La meccanica ondulatoria classica rende perfettamente conto degli esperimenti di riflessione e rifrazione effettuati...



Se la superficie del corpo è liscia (ad esempio uno specchio) la riflessione nel caso ideale è di tipo *speculare*. Per gli angoli di incidenza e di riflessione vale la seguente legge:

$$\alpha_i = \alpha_r.$$



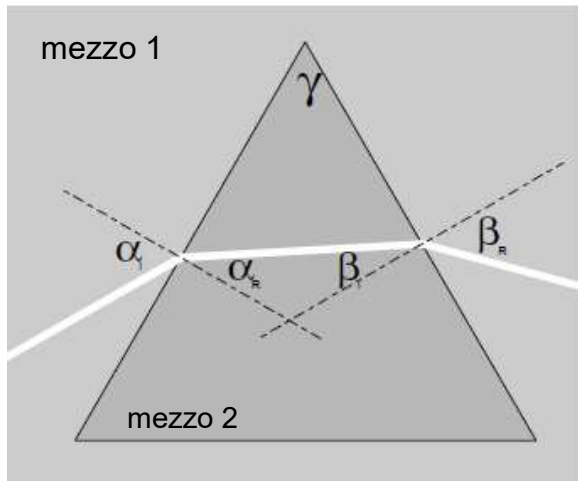
Il fenomeno della rifrazione è descritto dalla *legge di Snell*:

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{n_2}{n_1}$$

dove n_1 e n_2 sono gli indici di rifrazione dei due mezzi di propagazione della luce.

Il campo elettromagnetico [9]

La meccanica ondulatoria classica rende perfettamente conto degli esperimenti di dispersione effettuati...



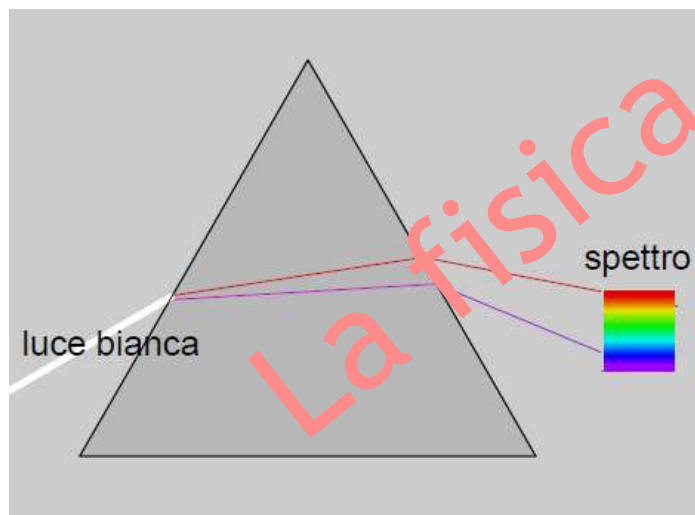
Nel caso del prisma la legge di Snell porta a:

$$\text{sen}(\alpha_i) = n \text{sen}(\alpha_r) \quad \text{e} \quad n \text{sen}(\beta_i) = \text{sen}(\beta_r)$$

dove si è posto $n_1 = 1$ (mezzo 1 è l'aria) e $n_2 = n$ indice di rifrazione del prisma.

Da cui:

$$\beta_r = \arcsen(n \text{sen}(\gamma - \arcsen(\frac{1}{n} \text{sen} \alpha_i)))$$



La dispersione dei colori avviene in virtù del fatto che n è in generale dipendente dalla lunghezza d'onda del raggio incidente:

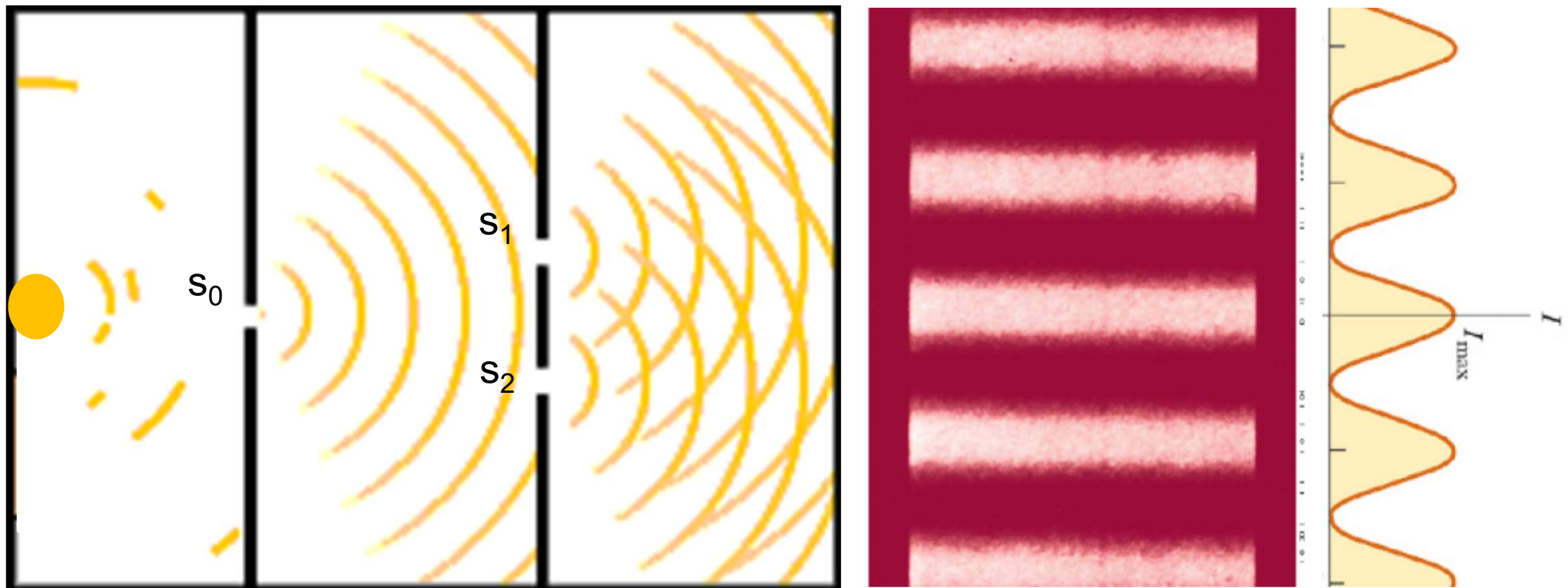
$$\beta_{R_{RED}} = \arcsen(n_{RED} \text{sen}(\gamma - \arcsen(\frac{1}{n_{RED}} \text{sen} \alpha_i)))$$

$$\beta_{R_{VIOL}} = \arcsen(n_{VIOL} \text{sen}(\gamma - \arcsen(\frac{1}{n_{VIOL}} \text{sen} \alpha_i)))$$

Il campo elettromagnetico [10]

Fenomeni di interferenza

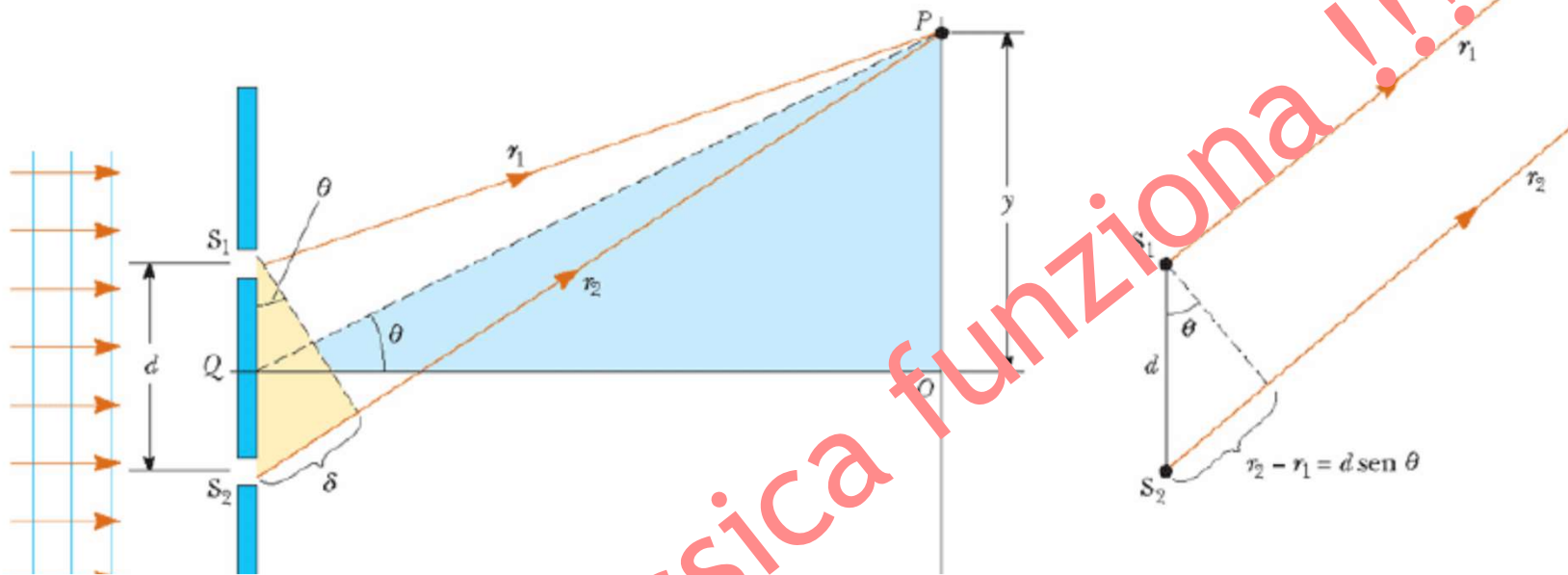
Quando due o più treni d'onda generati da sorgenti coerenti si sovrappongono in un punto dello spazio, quello che si osserva a seguito della sovrapposizione è una serie di frange di interferenza caratterizzate dall'alternarsi di bande parallele chiare (interferenza costruttiva) e scure (interferenza distruttiva).



Le fenditure s_1 e s_2 agiscono come sorgenti di luce coerenti (principio di Huygens). Nella regione al di là delle fenditure i treni d'onda provenienti da s_1 ed s_2 , sovrapponendosi, danno luogo, a seconda della differenza di fase tra le onde, a una interferenza costruttiva (frange chiare) o distruttiva (frange scure) della luce...

Il campo elettromagnetico [11]

La meccanica ondulatoria classica rende perfettamente conto degli esperimenti di interferenza effettuati...



Per $L \gg d$ la differenza di cammino ottico è: $\delta = r_2 - r_1 = d \cdot \sin \theta$

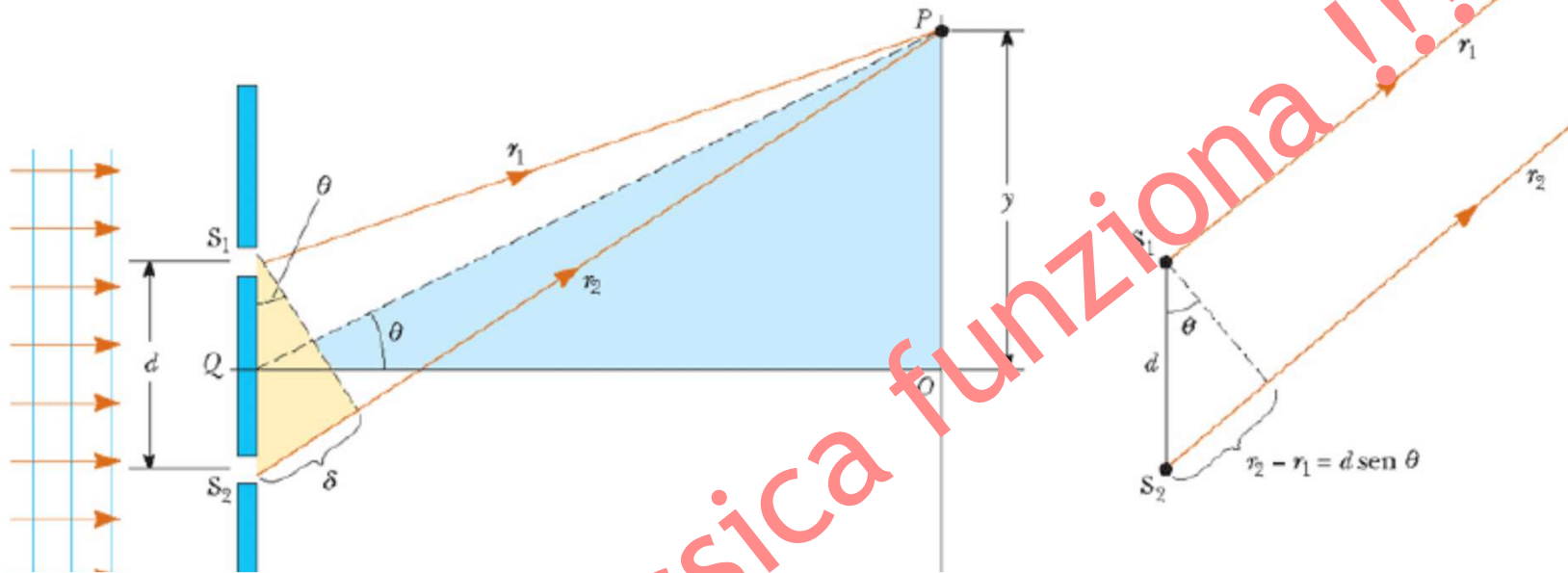
Se la differenza di cammino ottico è zero o un multiplo intero di lunghezza d'onda, le due onde arrivano in fase in P e si ha interferenza costruttiva.

La condizione per ottenere frange chiare (interferenza costruttiva) è:

$$\delta = d \cdot \sin \theta_{\text{chiare}} = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Il campo elettromagnetico [12]

La meccanica ondulatoria classica rende perfettamente conto degli esperimenti di interferenza effettuati...



Per $L \gg d$ la differenza di cammino ottico è: $\delta = r_2 - r_1 = d \cdot \sin \theta$

Se la differenza di cammino ottico è un multiplo dispari di mezza lunghezza d'onda, le due onde arrivano in P con una differenza di fase pari a 180 gradi e si ha interferenza distruttiva.

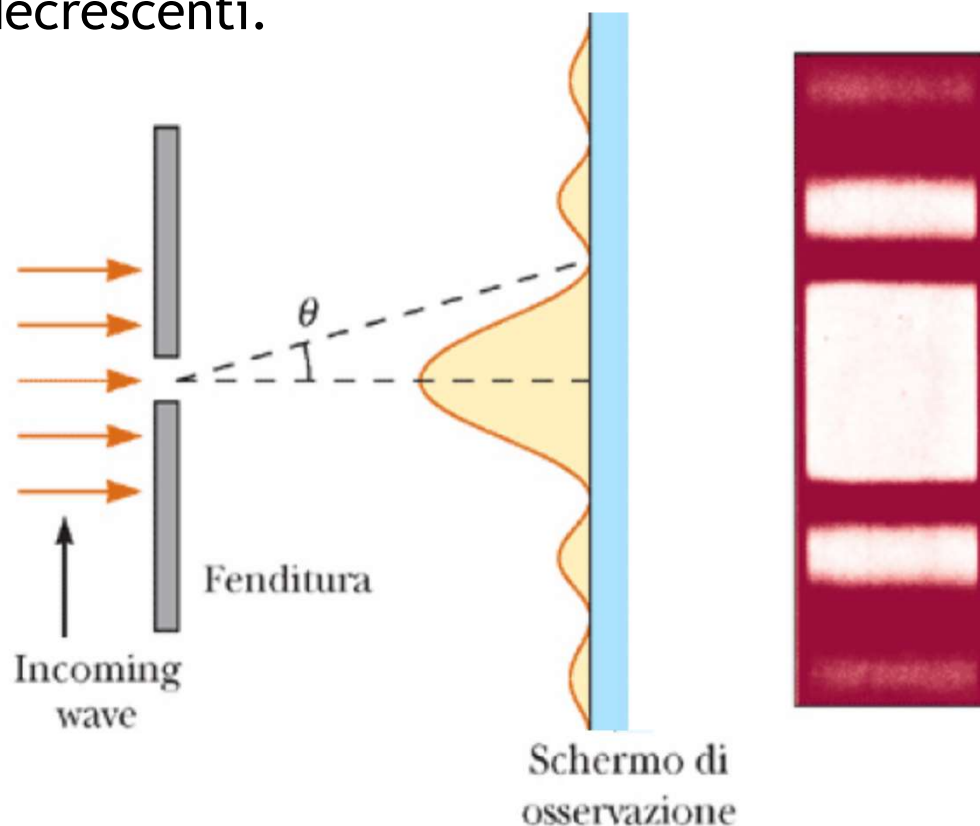
La condizione per ottenere frange scure (interferenza distruttiva) è:

$$\delta = d \cdot \sin \theta_{scure} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Il campo elettromagnetico [13]

Fenomeni di diffrazione

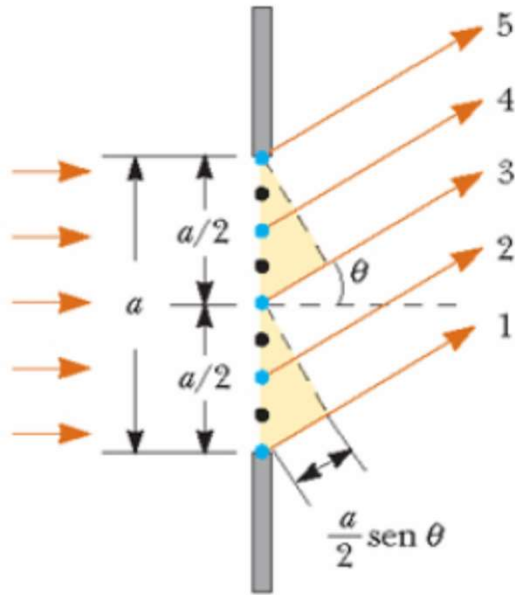
Quando, durante il suo percorso, un'onda incontra una fenditura (o un ostacolo) avente dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda dell'onda stessa si osserva, a seguito degli effetti di bordo, una figura di diffrazione consistente in una banda centrale larga ed intensa affiancata da bande secondarie laterali di intensità via via decrescenti.



Ogni punto della fenditura agisce come sorgente puntiforme di luce coerente (principio di Huygens). Nella regione al di là delle fenditure i treni d'onda generati da tutti i punti, sovrapponendosi, dando luogo, a seconda della differenza di fase tra le onde, a frange di diffrazione costruttive (frange chiare) o distruttive (frange scure) della luce...

Il campo elettromagnetico [14]

La meccanica ondulatoria classica rende perfettamente conto degli esperimenti di diffrazione effettuati...



Dividiamo la fenditura in due parti uguali e consideriamo gli estremi della metà fenditura inferiore. Se la differenza di cammino tra l'onda 1 e l'onda 3 è pari a mezza lunghezza d'onda (sfasamento di 180°) si ha interferenza distruttiva :

$$\frac{a}{2} \cdot \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin \vartheta = \frac{\lambda}{a}$$

Stessa cosa vale per tutte le coppie di punti che distano tra loro di una quantità $a/2$ (esempio onda 3 e 5)

Se si divide la fenditura in quattro parti e si ripete il ragionamento si ha:

$$\frac{a}{4} \cdot \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin \vartheta = \frac{2\lambda}{a}$$

Se si divide la fenditura in sei parti:

$$\frac{a}{6} \cdot \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin \vartheta = \frac{3\lambda}{a}$$

La condizione generale per l'interferenza distruttiva è:

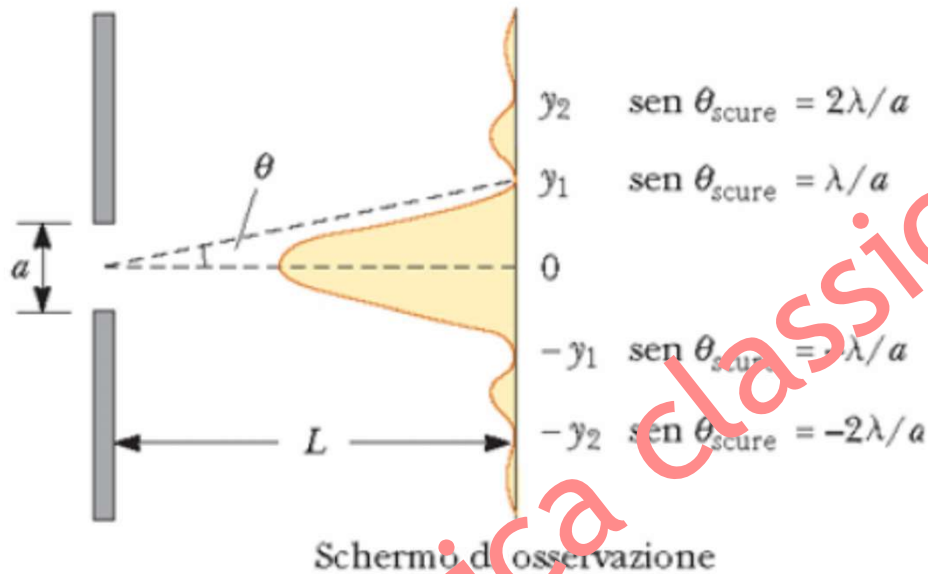
$$\sin \vartheta_{scure} = m \cdot \frac{\lambda}{a} \quad (m = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

Il campo elettromagnetico [15]

La meccanica ondulatoria classica rende perfettamente conto degli esperimenti di diffrazione effettuati...

La condizione generale per l'interferenza distruttiva è:

$$\sin \theta_{\text{scure}} = m \cdot \frac{\lambda}{a} \quad (m = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots)$$

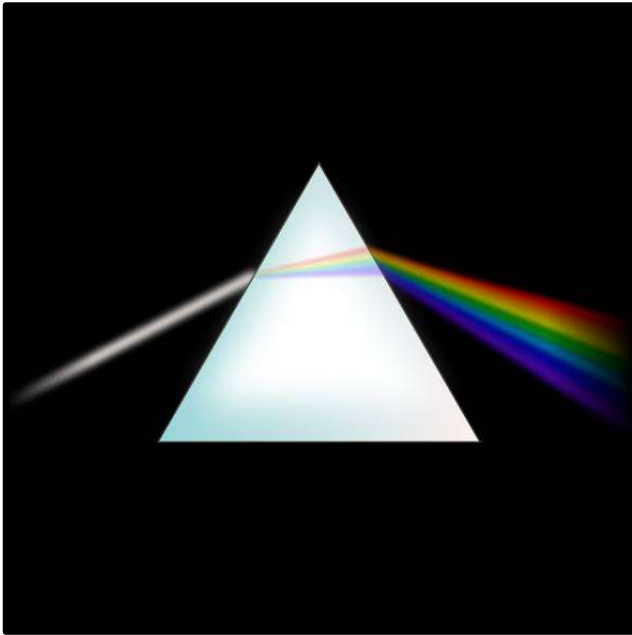


Qualitativamente si ha una larga frangia centrale chiara, con ai lati un alternarsi di frange chiare molto meno intense. Le varie frange scure si trovano per i valori di θ che soddisfano la relazione sopra.

La fisica classica funziona !!!

Il campo elettromagnetico [16]

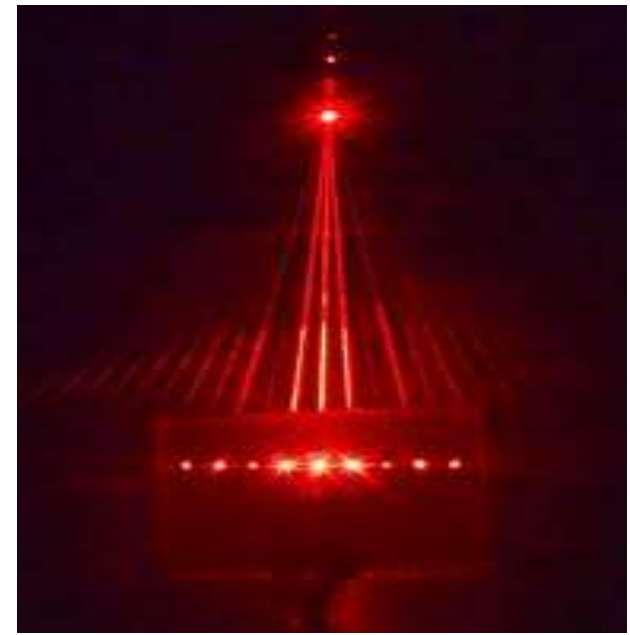
La meccanica ondulatoria classica rende perfettamente conto degli esperimenti di rifrazione (riflessione e trasmissione), interferenza e diffrazione effettuati...



rifrazione



interferenza



diffrazione

“La fisica, così come la conosciamo, sarà completata in pochi mesi”

...aveva dunque ragione Lord Kelvin ?

Il campo elettromagnetico [17]

Nell'ambito dell'elettrodinamica classica le equazioni di Maxwell costituiscono la descrizione più evoluta di tutti i fenomeni di natura elettromagnetica...

Teorema di Gauss per il campo elettrico
Flusso del campo elettrico
attraverso una superficie chiusa

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Teorema di Gauss per il campo magnetico
Flusso del campo magnetico
attraverso una superficie chiusa

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\sigma = 0$$

Legge di Faraday-Lenz per il campo elettrico
Circuitazione del campo elettrico (variabile nel tempo)
lungo una linea chiusa Γ .
Il flusso $\Phi_{\Sigma}(B)$ viene calcolato attraverso una superficie Σ
che ha come bordo la linea Γ .

$$X_{\Gamma}(\vec{E}) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \hat{u}_t d\gamma = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\sigma$$

Legge di Ampere-Maxwell per il campo magnetico
Circuitazione del campo magnetico (variabile nel tempo)
lungo una linea chiusa Γ .
Il flusso $\Phi_{\Sigma}(E)$ viene calcolato attraverso la superficie Σ
che ha come bordo la linea Γ .

$$X_{\Gamma}(\vec{B}) = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \hat{u}_t d\gamma = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\sigma$$

Il campo elettromagnetico [18]

Nell'ambito dell'elettrodinamica classica le equazioni di Maxwell costituiscono la descrizione più evoluta di tutti i fenomeni di natura elettromagnetica...

Teorema di Gauss per il campo elettrico
Flusso del campo elettrico
attraverso una superficie chiusa

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Teorema di Gauss per il campo magnetico
Flusso del campo magnetico
attraverso una superficie chiusa

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\sigma = 0$$

Legge di Faraday-Lenz per il campo elettrico
Circuitazione del campo elettrico (variabile nel tempo)
lungo una linea chiusa Γ .
Il flusso $\Phi_{\Sigma}(B)$ viene calcolato attraverso una superficie Σ
che ha come bordo la linea Γ .

$$X_{\Gamma}(\vec{E}) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \hat{u}_t d\gamma = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\sigma$$



Circuitazione del campo elettrico (statico)
lungo una linea chiusa Γ .

$$X_{\Gamma}(\vec{E}) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \hat{u}_t d\gamma = 0$$

Legge di Ampere-Maxwell per il campo magnetico
Circuitazione del campo magnetico (variabile nel tempo)
lungo una linea chiusa Γ .
Il flusso $\Phi_{\Sigma}(E)$ viene calcolato attraverso la superficie Σ
che ha come bordo la linea Γ .

$$X_{\Gamma}(\vec{B}) = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \hat{u}_t d\gamma = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\sigma$$



Circuitazione del campo magnetico (statico)
lungo una linea chiusa Γ .

$$X_{\Gamma}(\vec{B}) = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \hat{u}_t d\gamma = \mu_0 I$$

Il campo elettromagnetico [19]

Nell'ambito dell'elettrodinamica classica le equazioni di Maxwell costituiscono la descrizione più evoluta di tutti i fenomeni di natura elettromagnetica...

Teorema di Gauss per il campo elettrico
Flusso del campo elettrico
attraverso una superficie chiusa

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Teorema di Gauss per il campo magnetico
Flusso del campo magnetico
attraverso una superficie chiusa

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

Legge di Faraday-Lenz per il campo elettrico
Circuitazione del campo elettrico (variabile nel tempo)
lungo una linea chiusa Γ .
Il flusso $\Phi_{\Sigma}(B)$ viene calcolato attraverso una superficie Σ
che ha come bordo la linea Γ .

$$X_{\Gamma}(\vec{E}) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \hat{u}_t d\gamma = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\sigma$$



Circuitazione del campo elettrico (statico)
lungo una linea chiusa Γ .

$$X_{\Gamma}(\vec{E}) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \hat{u}_t d\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \vec{E} = 0$$

Legge di Ampere-Maxwell per il campo magnetico
Circuitazione del campo magnetico (variabile nel tempo)
lungo una linea chiusa Γ .
Il flusso $\Phi_{\Sigma}(E)$ viene calcolato attraverso la superficie Σ
che ha come bordo la linea Γ .

$$X_{\Gamma}(\vec{B}) = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \hat{u}_t d\gamma = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\sigma$$



Circuitazione del campo magnetico (statico)
lungo una linea chiusa Γ .

$$X_{\Gamma}(\vec{B}) = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \hat{u}_t d\gamma = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Il campo elettromagnetico [20]

Sulla base dell'elettrodinamica classica campi elettrici e campi magnetici possono essere descritti, rispettivamente, in termini di potenziali scalare e vettore...

Campi elettrici statici sono irrotazionali (conservativi)

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

L'integrale di linea di \vec{E} su una curva aperta Γ dipende solo dagli estremi della curva:

$$L_{\Gamma}(\vec{E}) = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \hat{u}_t d\gamma = \int_A^B dU = U(B) - U(A)$$

Campi magnetici (statici e dinamici) sono solenoidali

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Il flusso di \vec{B} attraverso una superficie aperta Σ dipende solo dalla linea su cui poggia la superficie:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\sigma$$

Il campo \vec{E} può essere espresso in termini di un campo scalare $V(x,y,z)$:

$$\vec{E} = \nabla V(x, y, z)$$

Il potenziale scalare $V(x,y,z)$ è definito a meno di una costante addittiva:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= V'(x, y, z) \\ &= V(x, y, z) + V_0 \end{aligned}$$

Il campo \vec{B} può essere espresso in termini di potenziale vettore $\vec{A}(x, y, z)$:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}(x, y, z)$$

Il potenziale vettore $\vec{A}(x, y, z)$ è definito a meno di un campo vettoriale del tipo ∇f :

$$\begin{aligned} \vec{A}(x, y, z) &= \vec{A}'(x, y, z) \\ &= \vec{A}(x, y, z) + \nabla f(x, y, z) \end{aligned}$$

Il campo elettromagnetico [21]

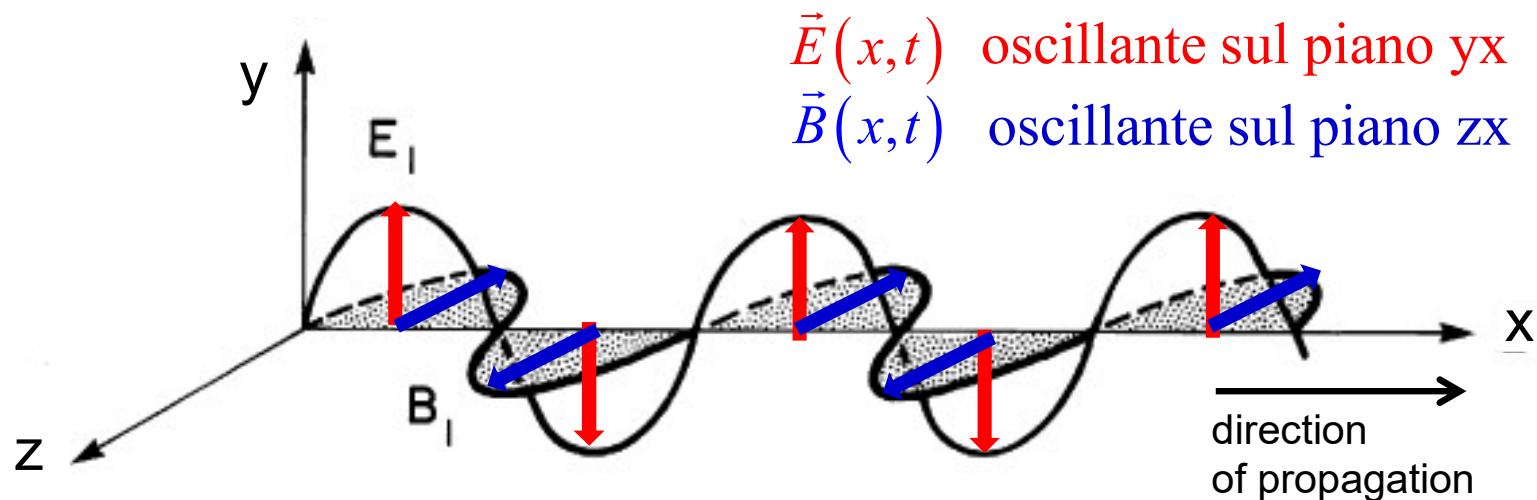
Onde elettromagnetiche piane

Le equazioni di Maxwell sono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali nello spazio e nel tempo che ammette come soluzioni un campo elettrico $\vec{E}(\vec{r},t)$ e un campo magnetico $\vec{B}(\vec{r},t)$ variabili nel tempo e associati tra loro.

Un'onda elettromagnetica dunque è un segnale che si propaga nel vuoto tramite variazioni di campo elettrico e variazioni di campo magnetico concatenate tra loro. A tali variazioni è associata una quantità di energia che costituisce l'energia della radiazione.

Le sorgenti di onde elettromagnetiche sono costituite da dipoli elettrici oscillanti o dipoli magnetici oscillanti e più in generale da cariche elettriche in movimento...

Una soluzione particolarmente semplice delle equazioni di Maxwell è costituita dall'onda piana armonica monocromatica...



Il campo elettromagnetico [22]

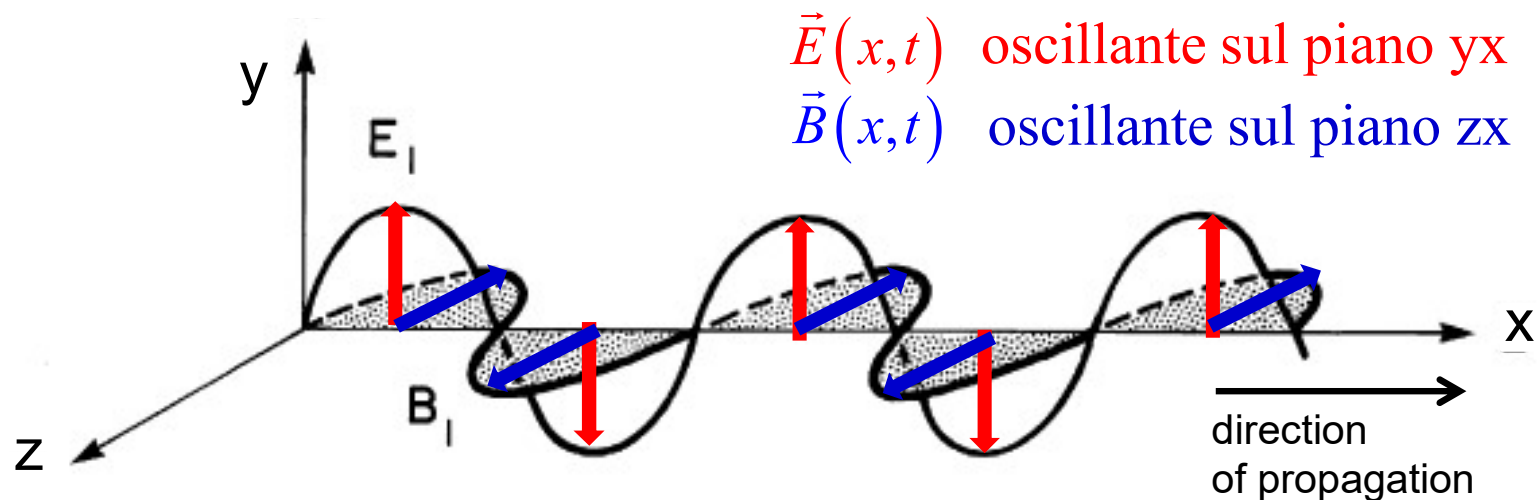
Un'onda piana armonica monocromatica è un'onda caratterizzata da componenti elettriche $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e magnetiche $\vec{B}(\vec{r}, t)$ polarizzate su piani mutuamente perpendicolari e descritte analiticamente da funzioni sinusoidali con una specifica frequenza (e lunghezza d'onda).

Per un'onda elettromagnetica con componente elettrica polarizzata sul piano yx e componente magnetica polarizzata sul piano zx valgono:

$$\vec{E}(x, t) \perp \vec{B}(x, t) \quad \forall x \quad \forall t$$

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{P}t + \delta\right) = \vec{E}_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \delta) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\bar{\nu}$$

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{P}t + \delta\right) = \vec{B}_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \delta) \quad \omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu$$



Il campo elettromagnetico [23]

Ancora sull'onda piana...

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{P}t + \delta\right) = \vec{E}_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \delta) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\bar{\nu}$$

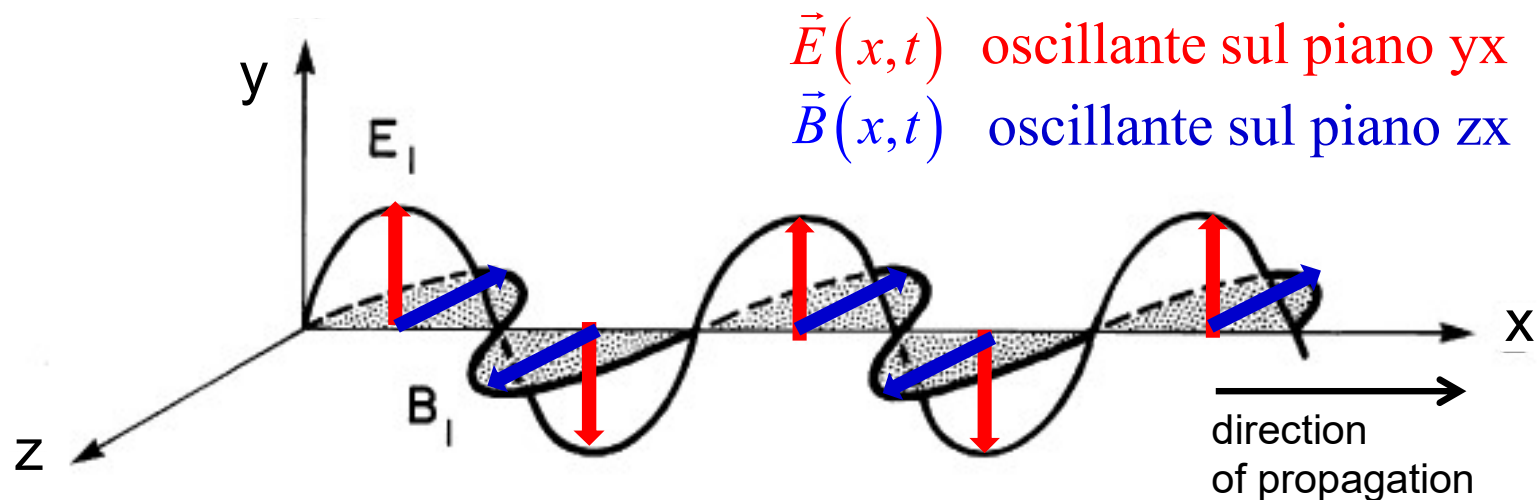
$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{P}t + \delta\right) = \vec{B}_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \delta) \quad \omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu$$

dove:

\vec{E}_0 e \vec{B}_0 sono le ampiezze del campo elettrico e del campo magnetico;

k e ω sono il numero d'onda e la frequenza angolare dell'onda;

δ è la fase dell'onda e determina il valore dell'ampiezza dell'onda nel punto iniziale ($x=0$) e all'istante iniziale ($t=0$);



Il campo elettromagnetico [24]

Sulla base delle equazioni di Maxwell si può dimostrare che l'intensità di un'onda elettromagnetica dipende in modo lineare dal quadrato dell'ampiezza della componente elettrica:

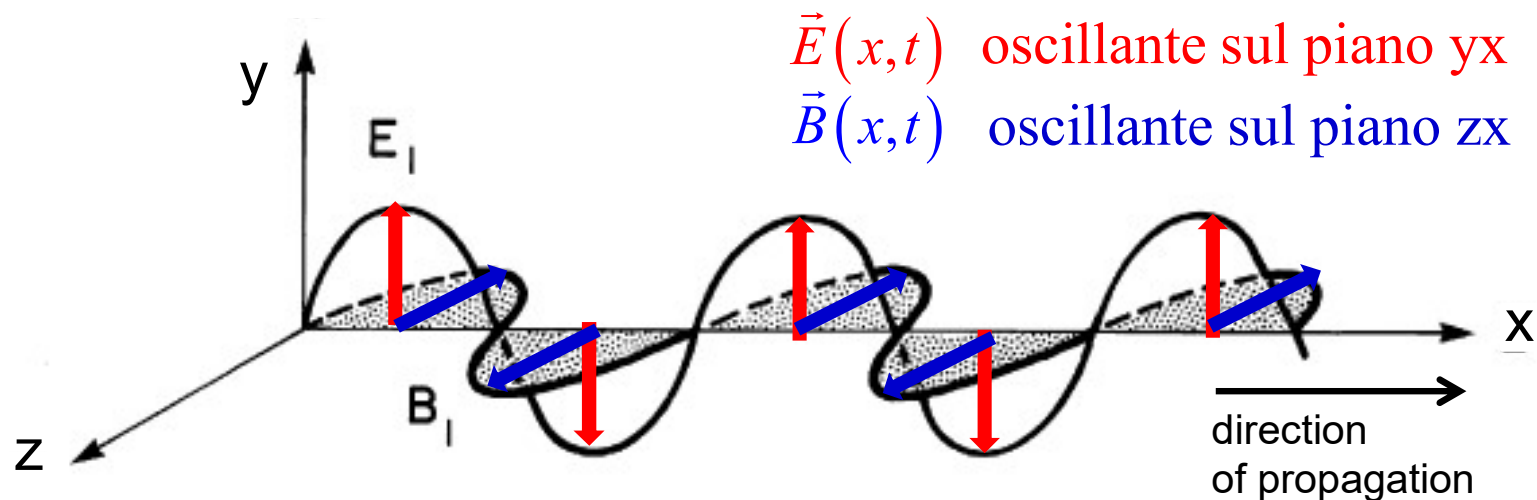
$$I(x,t) = c\epsilon_0 [\vec{E}(x,t) \cdot \vec{E}(x,t)] = c\epsilon_0 \vec{E}^2(x,t)$$

Sperimentalmente quello che si rileva è l'intensità media calcolata su n periodi... :

$$\langle I(x,t) \rangle = \frac{1}{nP} \int_0^{nP} c\epsilon_0 \vec{E}^2(x,t) dt = \frac{1}{nP} \int_0^{nP} c\epsilon_0 \vec{E}_0^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta) dt = \dots$$

e dopo aver integrato...

$$\langle I(x,t) \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 [\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0] = \frac{1}{2} c\epsilon_0 \vec{E}_0^2$$



Il campo elettromagnetico [25]

Rappresentazione di un'onda armonica piana monocromatica ($\nu \sim 0.25$ Hz, $P=4$ s).

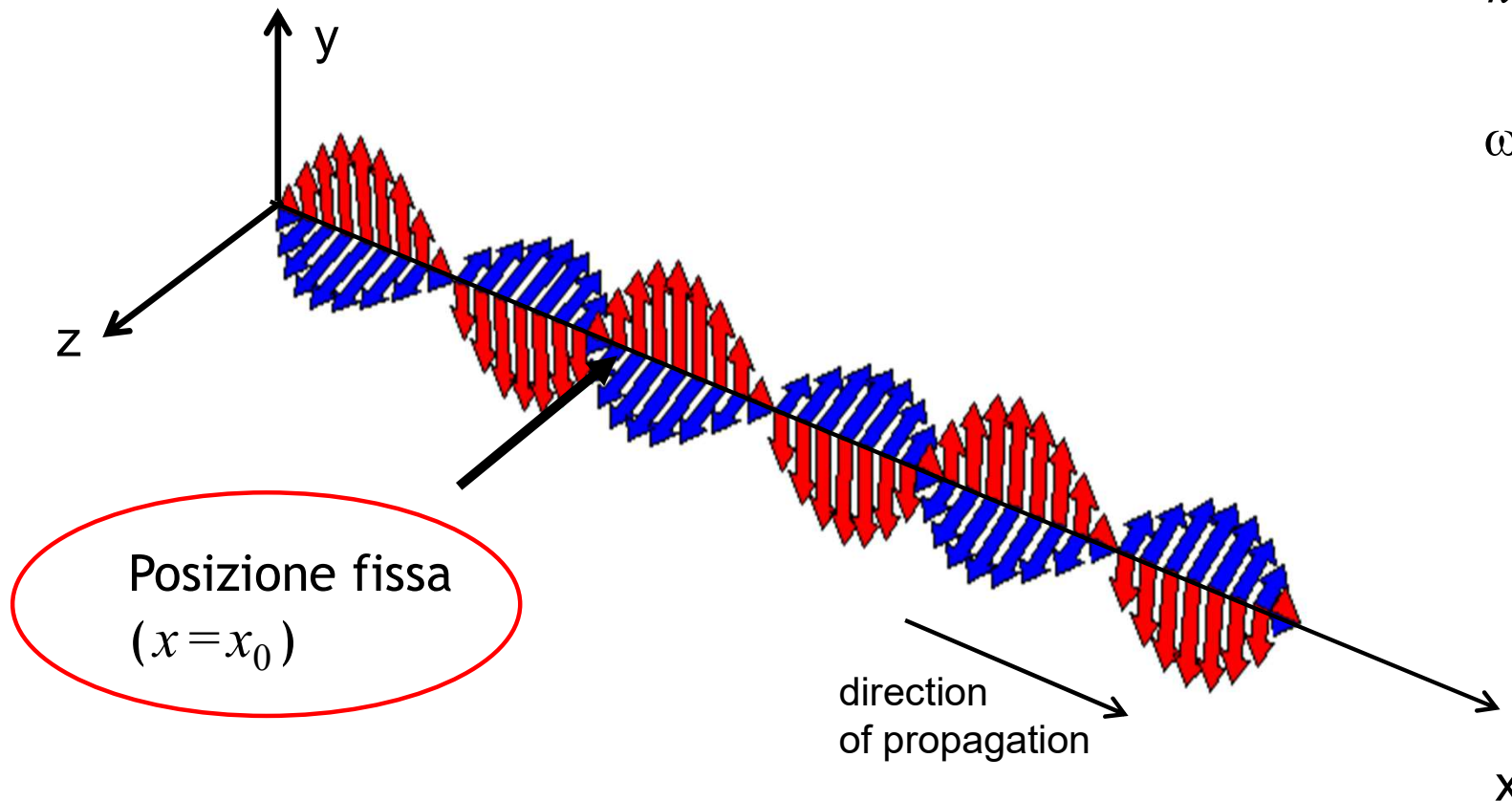
Per una determinata posizione $x=x_0$ l'ampiezza dell'onda dipende solo dal tempo:

$$\vec{E}(x,t)\Big|_{x_0} = \vec{E}(x_0,t) = \vec{E}_0 \text{sen}(kx_0 - \omega t + \delta) = \vec{E}_0 \text{sen}(-\omega t + (kx_0 + \delta)) = \vec{E}_0 \text{sen}(-\omega t + \delta_0)$$

$$\vec{B}(x,t)\Big|_{x_0} = \vec{B}(x_0,t) = \vec{B}_0 \text{sen}(kx_0 - \omega t + \delta) = \vec{B}_0 \text{sen}(-\omega t + (kx_0 + \delta)) = \vec{B}_0 \text{sen}(-\omega t + \delta_0)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \bar{\nu}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi \nu$$



Il campo elettromagnetico [26]

Rappresentazione di un'onda armonica piana monocromatica ($\nu \sim 0.25$ Hz, $P=4$ s).

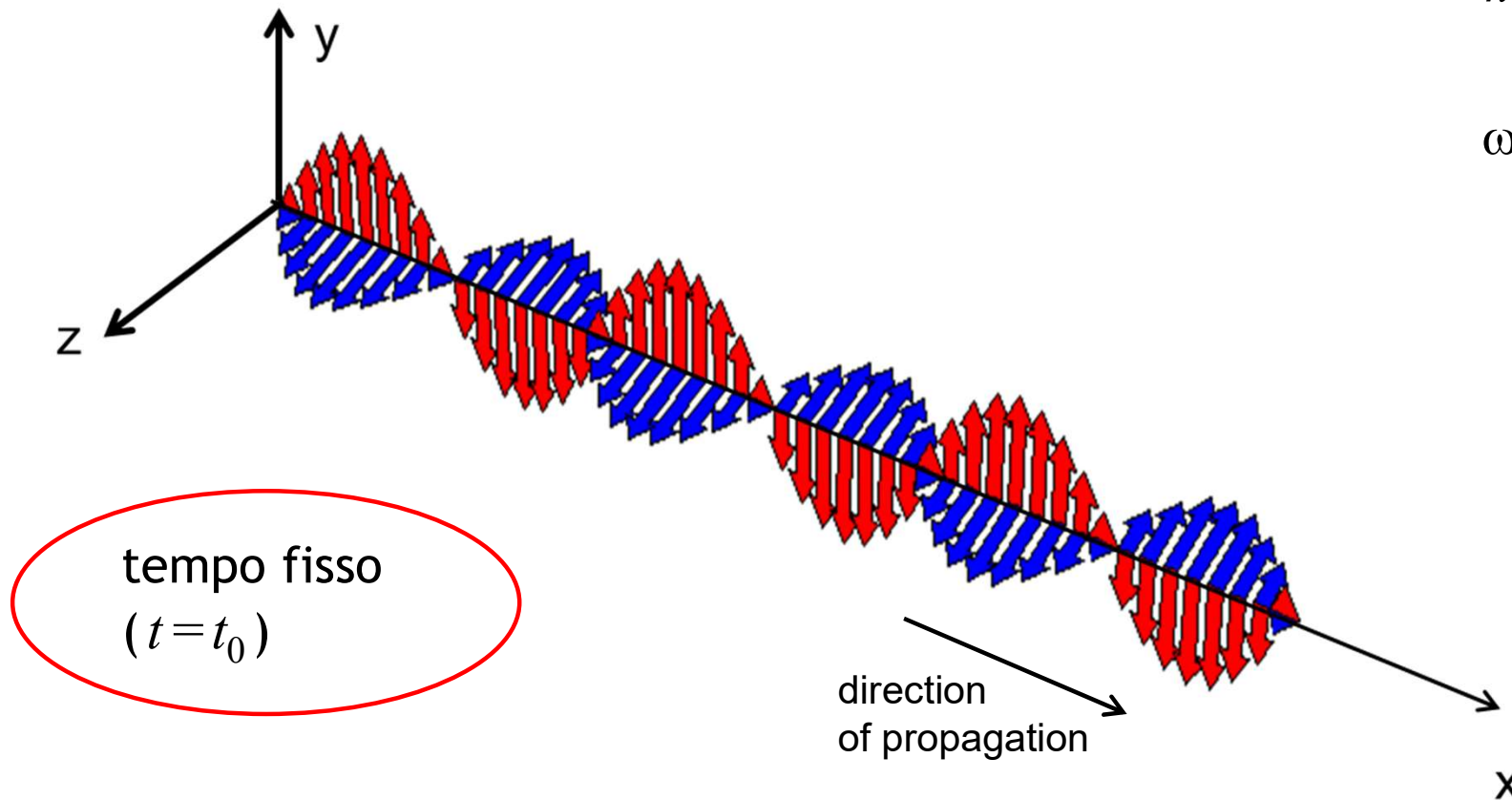
Per un determinato istante $t=t_0$ l'ampiezza dell'onda dipende solo dallo spazio:

$$\vec{E}(x,t)\Big|_{t_0} = \vec{E}(x,t_0) = \vec{E}_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t_0 + \delta) = \vec{E}_0 \operatorname{sen}(kx + (-\omega t_0 + \delta)) = \vec{E}_0 \operatorname{sen}(kx + \delta_0)$$

$$\vec{B}(x,t)\Big|_{t_0} = \vec{B}(x,t_0) = \vec{B}_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t_0 + \delta) = \vec{B}_0 \operatorname{sen}(kx + (-\omega t_0 + \delta)) = \vec{B}_0 \operatorname{sen}(kx + \delta_0)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \bar{\nu}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi \nu$$



Il campo elettromagnetico [27]

L'equazione differenziale delle onde

In meccanica classica i campi scalari o vettoriali dipendenti dal tempo, associati ad ogni processo dinamico, sono descrivibili in termini esatti da equazioni differenziali.

In particolare *tutti* i tipi di moto ondulario *devono* verificare una equazione differenziale di carattere generale detta equazione differenziale delle onde di d'Alembert.

Un'espressione analitica del tipo:

$$\xi = \xi(x, t)$$

descrive un'onda 1-dimensionale che si propaga senza distorsione lungo la direzione x o $-x$ se e solo se è soluzione dell'equazione differenziale delle onde:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Equazione di d'Alembert

con ovvio significato dei simboli...

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \bar{v}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi \nu$$

Il campo elettromagnetico [28]

Osservazione

L'estensione dell'equazione delle onde al caso 3-dimensionale risulta immediata...

La forma analitica:

$$\zeta = \xi(\vec{r}, t) = \xi(x, y, z, t)$$

descrive un'onda che si propaga senza distorsione nello spazio 3-dimensionale lungo una determinata direzione definita dal vettore velocità \vec{v} se e solo se è soluzione dell'equazione differenziale d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{\vec{v}^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Introducendo l'operatore Laplaciano definito come prodotto scalare di due operatori gradiente:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$$

ossia:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

l'equazione sopra si riscrive sinteticamente nella forma;

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{\vec{v}^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$



Il campo elettromagnetico [29]

Esempio

Si verifichi che le equazioni delle onde piane che si propagano lungo l'asse x previste dalla risoluzione delle equazioni di Maxwell sono effettivamente delle onde monodimensionali.

Per il campo elettrico valgono (in modulo):

$$E(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x, t) = k E_0 \cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, t) = -k^2 E_0 \sin(kx - \omega t + \delta) = -k^2 E(x, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x, t) = -\omega E_0 \cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x, t) = -\omega^2 E_0 \sin(kx - \omega t + \delta) = -\omega^2 E(x, t)$$

E' facile verificare che la forma analitica delle onde piane monocromatiche è anche soluzione dell'equazione delle onde di d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Il campo elettromagnetico [30]

Valgono...

$$-k^2 E(x, t) + \frac{1}{v^2} \omega^2 E(x, t) = 0$$

$$E(x, t) \left(-k^2 + \frac{1}{v^2} \omega^2 \right) = 0$$

e l'ultima relazione scritta è certamente un'identità in quanto vale:

$$E(x, t) \left(-\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \frac{1}{(\lambda/P)^2} \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 \right) = 0$$

$$E(x, t) \left(-\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right) = 0$$

E' stato dimostrato dunque che un campo elettrico descritto dalla forma analitica:

$$E(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

rappresenta effettivamente un segnale che si propaga come un'onda lungo l'asse x.

Allo stesso modo si dimostra che l'espressione per la componente magnetica:

$$B(x, t) = B_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

è certamente l'espressione di un'onda.



Il campo elettromagnetico [31]

Esempio

Si verifichi che l'equazione di un'onda piana monocromatica che si propaga lungo una determinata direzione \vec{r} dello spazio tridimensionale e caratterizzata da un vettore d'onda \vec{k} è effettivamente un'onda tridimensionale.

Per il campo elettrico vale (in modulo):

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) = E_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)$$

con ovvio significato dei simboli:

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

$$\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k} \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad k_x = k_y = k_z = \frac{k}{\sqrt{3}}$$

Valgono:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta) = E_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E(\vec{r}, t) = k_x E_0 \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} E(\vec{r}, t) = k_y E_0 \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E(\vec{r}, t) = k_z E_0 \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)$$

Il campo elettromagnetico [32]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(\vec{r}, t) = -k_x^2 E_0 \operatorname{sen}(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta) = -k_x^2 E(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E(\vec{r}, t) = -k_y^2 E_0 \operatorname{sen}(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta) = -k_y^2 E(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E(\vec{r}, t) = -k_z^2 E_0 \operatorname{sen}(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta) = -k_z^2 E(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(\vec{r}, t) = -\omega E_0 \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E(\vec{r}, t) = -\omega^2 E_0 \operatorname{sen}(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \delta) = -\omega^2 E(\vec{r}, t)$$

Vale:

$$\frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\vec{v}^2} \frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial t^2} =$$

$$-k_x^2 E(\vec{r}, t) - k_y^2 E(\vec{r}, t) - k_z^2 E(\vec{r}, t) - \frac{1}{\vec{v}^2} (-\omega^2 E(\vec{r}, t)) =$$

$$-E(\vec{r}, t) \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{1}{\vec{v}^2} \omega^2 \right)$$

Il campo elettromagnetico [33]

A partire dall'espressione trovata...

$$\begin{aligned} & -E(\vec{r}, t) \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{1}{\vec{v}^2} \omega^2 \right) = \\ & -E(\vec{r}, t) \left(k^2 - \frac{1}{\vec{v}^2} \omega^2 \right) = \\ & -E(\vec{r}, t) \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - \frac{1}{(\lambda/P)^2} \left(\frac{2\pi}{P} \right)^2 \right) = \\ & -E(\vec{r}, t) \left(\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

si evince che vale l'equazione di d'Alembert.

L'espressione analitica:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \operatorname{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \delta)$$

verifica dunque l'equazione di d'Alembert e questo dimostra che descrive effettivamente un'onda che si propaga nello spazio 3D lungo la direzione identificata dal vettore: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.



Il campo elettromagnetico [34]

Osservazione importante

E' stato dimostrato che le espressioni:

$$E(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

$$B(x, t) = B_0 \sin(kx - \omega t + \delta)$$

verificano entrambe l'equazione di d'Alembert e dunque rappresentano delle onde (che si propagano nella direzione dell'asse x positivo).

E' facile dimostrare allora che anche le espressioni:

$$E(x, t) = E_0 \sin(kx + \omega t + \delta)$$

$$B(x, t) = B_0 \sin(kx + \omega t + \delta)$$

verificano entrambe l'equazione di d'Alembert e dunque rappresentano delle onde (che si propagano in questo caso nella direzione dell'asse x negativo).

Per le note proprietà delle equazioni differenziali, combinazioni lineari di soluzioni sono ancora soluzioni. In tal caso anche le espressioni che descrivono la sovrapposizione (combinazione lineare) di due onde sono ancora un'onda...

$$E_{\rightleftharpoons}(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \delta) + E_0 \sin(kx + \omega t + \delta)$$

$$B_{\rightleftharpoons}(x, t) = B_0 \sin(kx - \omega t + \delta) + B_0 \sin(kx + \omega t + \delta)$$

Due onde che si propagano in senso opposto e che si sovrappongono generano ancora un'onda...



Il campo elettromagnetico [35]

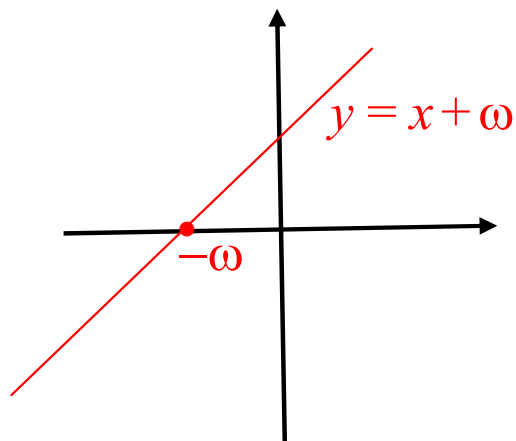
Nota aggiunta...

Dimostriamo che le espressioni:

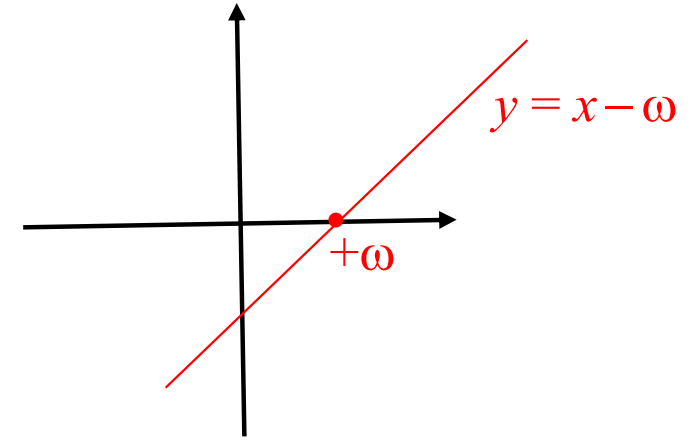
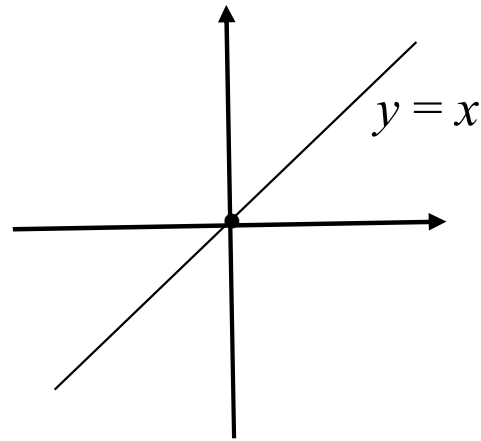
$$E(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$E(x, t) = E_0 \sin(kx + \omega t)$$

rappresentano, rispettivamente, la componente elettrica di un'onda armonica piana monocromatica che si propaga nella direzione dell'asse x positivo (la prima) e nella direzione dell'asse x negativo (la seconda). In entrambe si è posta la fase δ nulla per semplicità di notazione.



Rappresentazione analitica
di una retta traslata
di un valore ω verso l'asse x negativo



Rappresentazione analitica
di una retta traslata
di un valore ω verso l'asse x positivo

Le rappresentazioni analitiche $y = f(x - \omega)$ e $y = f(x + \omega)$ riferite alla traslazione continuano a valere anche nel caso in cui si consideri una qualsiasi funzione $y = f(x)$ non lineare...

Il campo elettromagnetico [36]

Nota aggiunta...

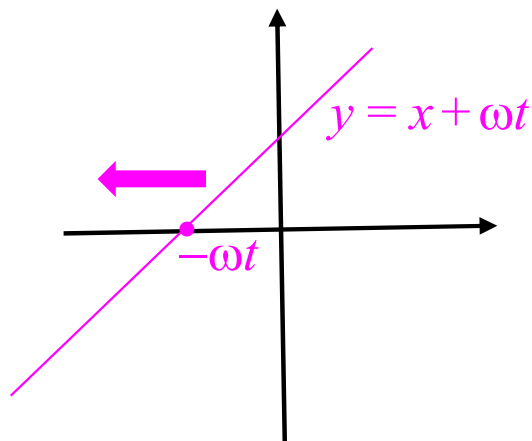
Dimostriamo che le espressioni:

$$E(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t)$$

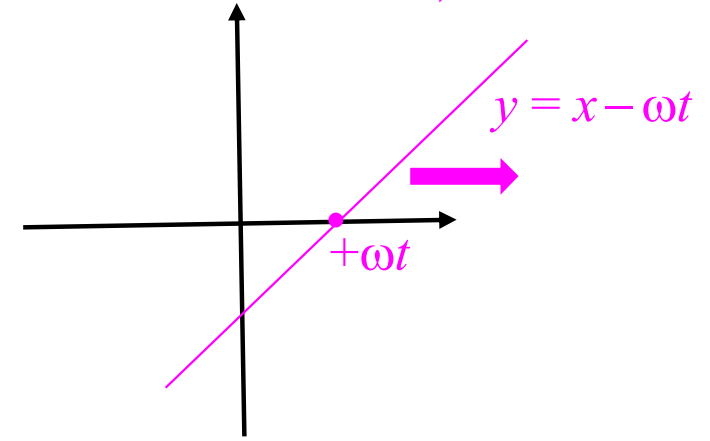
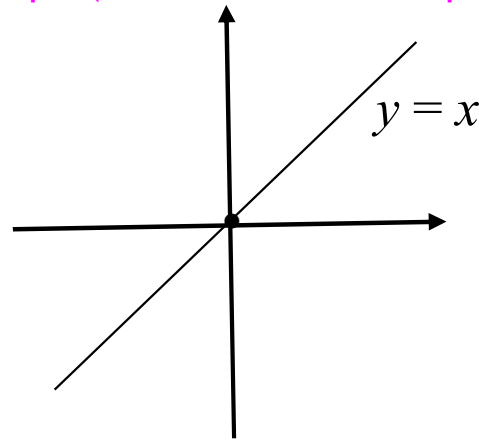
$$E(x, t) = E_0 \sin(kx + \omega t)$$

rappresentano, rispettivamente, la componente elettrica di un'onda armonica piana monocromatica che si propaga nella direzione dell'asse x positivo (la prima) e nella direzione dell'asse x negativo (la seconda). In entrambe si è posta la fase δ nulla per semplicità di notazione.

Se inseriamo nella rappresentazione analitica il tempo allora le espressioni scritte rappresentano delle traslazioni che vanno aumentando nel tempo (le rette si stanno spostando verso sx e verso dx ...)



Rappresentazione analitica di una retta che trasla con il tempo di un valore ωt verso l'asse x negativo



Rappresentazione analitica di una retta che trasla con il tempo di un valore ωt verso l'asse x positivo

Le rappresentazioni analitiche $y = f(x - \omega t)$ e $y = f(x + \omega t)$ riferite a rette che traslano continuano a valere anche nel caso in cui si consideri una qualsiasi funzione $y = f(x)$ non lineare...

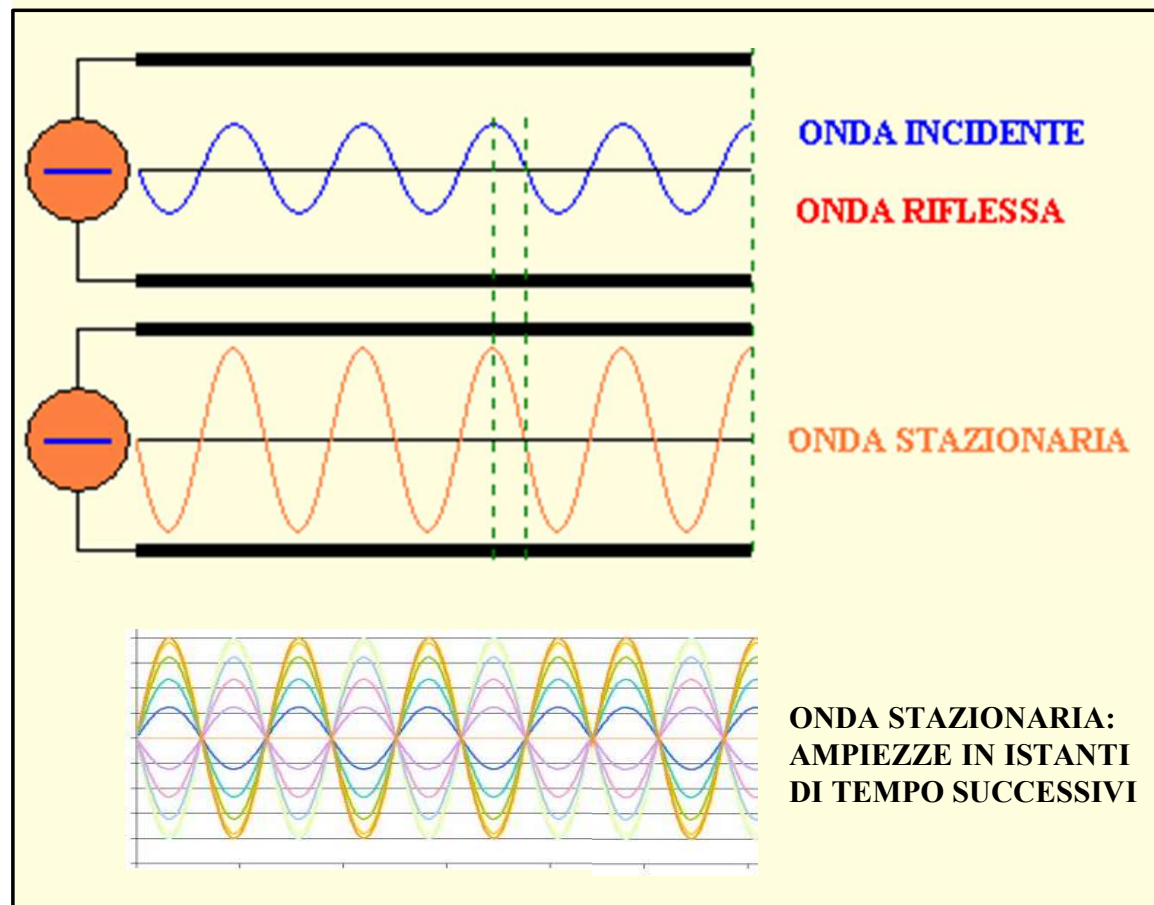


Il campo elettromagnetico [37]

Onde stazionarie

La sovrapposizione spaziale (interferenza) di due onde che si propagano in senso opposto genera in generale un'onda stazionaria.

Un'onda stazionaria è un'onda localizzata che non si propaga nello spazio. In tal caso le posizioni di nodi e antinodi sono fisse nello spazio e non dipendono dal tempo. Ad un'onda stazionaria non è associato alcun un trasporto di energia...



Onde stazionarie dunque hanno ampiezza che varia nel tempo in modo periodico ma sono caratterizzate da una dipendenza spaziale di tipo stazionario.

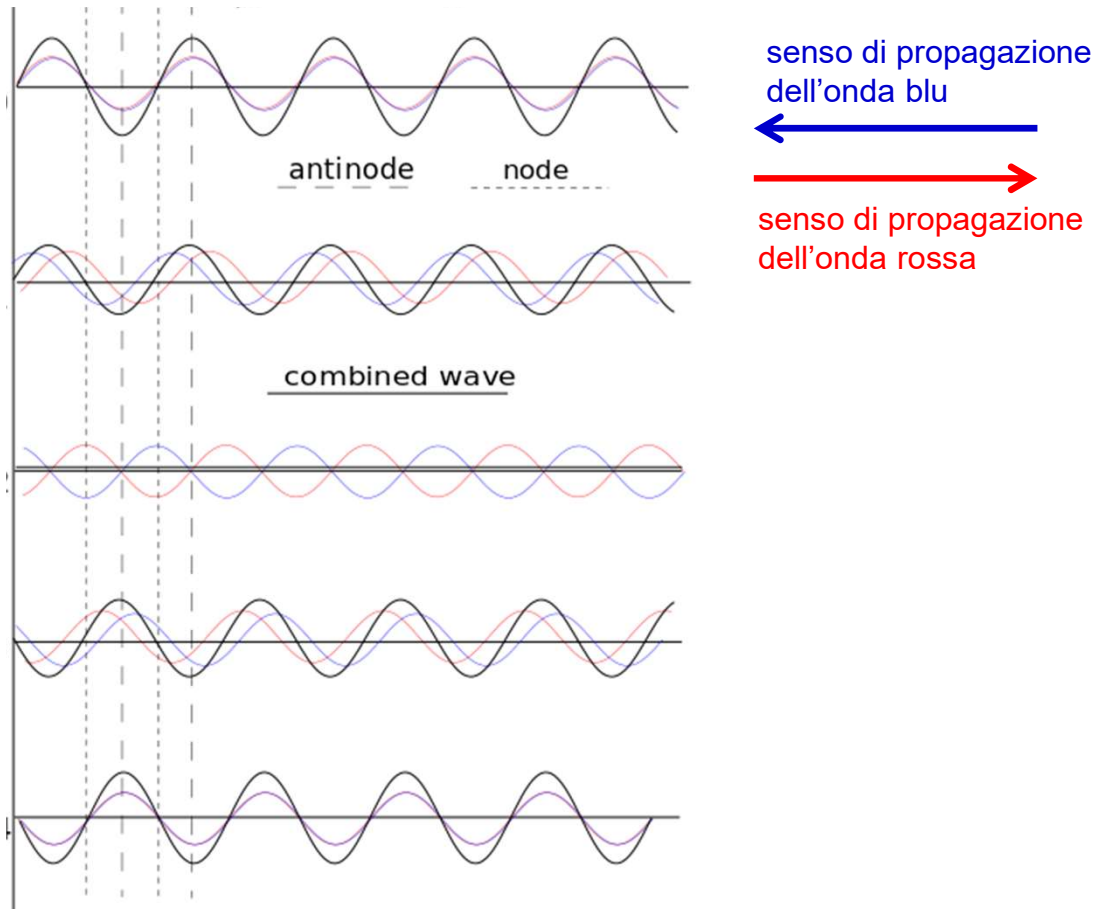
Il campo elettromagnetico [38]

Onde stazionarie

La sovrapposizione spaziale (interferenza) di due onde che si propagano in senso opposto genera in generale un'onda stazionaria.

Un'onda stazionaria è un'onda localizzata che non si propaga nello spazio. In tal caso le posizioni di nodi e antinodi sono fisse nello spazio e non dipendono dal tempo. Ad un'onda stazionaria non è associato alcun un trasporto di energia...

Rappresentazione delle ampiezze di un'onda stazionaria (in nero) in istanti di tempo successivi



Onde stazionarie dunque hanno ampiezza che varia nel tempo in modo periodico ma sono caratterizzate da una dipendenza spaziale di tipo stazionario.

Il campo elettromagnetico [39]

Nel caso di onde stazionarie generate per sovrapposizione di due onde elettromagnetiche piane, armoniche, monocromatiche, che si propagano in senso opposto valgono:

$$E_{\rightleftarrows}(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \delta) + E_0 \sin(kx + \omega t + \delta)$$

$$B_{\rightleftarrows}(x, t) = B_0 \sin(kx - \omega t + \delta) + B_0 \sin(kx + \omega t + \delta)$$

Considerando (ad esempio) la componente elettrica...

$$E_{\rightleftarrows}(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t + \delta) + E_0 \sin(kx + \omega t + \delta)$$

assumendo per semplicità:

$$\delta = 0 \quad (\text{nodo per } x = 0 \text{ e } t = 0)$$

è possibile utilizzare le formule di prostaferesi e riscrivere l'onda stazionaria nella forma più semplice:

$$E_{\rightleftarrows}(x, t) = 2E_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

ossia:

$$E_{\rightleftarrows}(x, t) = E_0(x) \cos(\omega t) \quad \text{con: } E_0(x) = 2E_0 \sin(kx)$$

Un'espressione analoga vale anche per la componente magnetica $B_{\rightleftarrows}(x, t)$...

Il campo elettromagnetico [40]

Per l'onda stazionaria, l'espressione scritta:

$$E_{\rightleftharpoons}(x, t) = E_0(x) \cos(\omega t)$$

$$\text{con: } E_0(x) = 2E_0 \sin(kx)$$

evidenzia in modo semplice la dipendenza dell'ampiezza dalle sole coordinate spaziali. In tal caso è facile studiare l'andamento dell'ampiezza al variare dello spazio e trovare le posizioni di nodi e antinodi dell'onda...

Posizioni dei nodi:

$$kx = 0 + n\pi \quad \Rightarrow \quad (2\pi/\lambda)x = 0 + n\pi \quad \Rightarrow \quad x = n(\lambda/2) \quad \text{con: } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Posizioni degli antinodi (massimi e minimi):

$$kx = \pi/2 + n\pi \quad \Rightarrow \quad (2\pi/\lambda)x = \pi/2 + n\pi \quad \Rightarrow \quad x = (1/2 + n)(\lambda/2) \quad \text{con: } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Il campo elettromagnetico [41]

Osservazione

Alcuni sistemi nei quali è possibile indurre onde stazionarie 1-dimensionali sono:
un'onda elettrica longitudinale in un cavo coassiale di lunghezza finita...
una corda di chitarra fissata agli estremi...
un'onda e.m. all'interno di un risonatore 1-dim di dimensioni finite...

In tutti i casi le onde che si formano a seguito di un'opportuna perturbazione del sistema sono onde stazionarie...

Valgono: $E_{\rightleftharpoons}(x, t) = E_0(x) \cos(\omega t)$ con: $E_0(x) = 2E_0 \sin(kx)$

In questi casi le onde sono vincolate in uno spazio 1-dim finito (di lunghezza L).
E' dunque necessario imporre all'onda i seguenti vincoli:

1. Ampiezza nulla (nodo) in $x = 0$ per ogni istante di tempo t :

$$E_{\rightleftharpoons}(0, t) = E_0(0) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad E_0(0) = 2E_0 \sin(k0) = 0 \quad \forall t$$

Questo vincolo è sempre verificato!

2. Ampiezza nulla (nodo) in $x = L$ per ogni istante di tempo t :

$$E_{\rightleftharpoons}(L, t) = E_0(L) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad E_0(L) = 2E_0 \sin(kL) = 0 \quad \forall t$$

Il vincolo è verificato per:

$$kL = 0 + n\pi \quad \Rightarrow \quad (2\pi/\lambda)L = 0 + n\pi \quad \Rightarrow \quad L = n(\lambda/2) \quad \text{con: } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

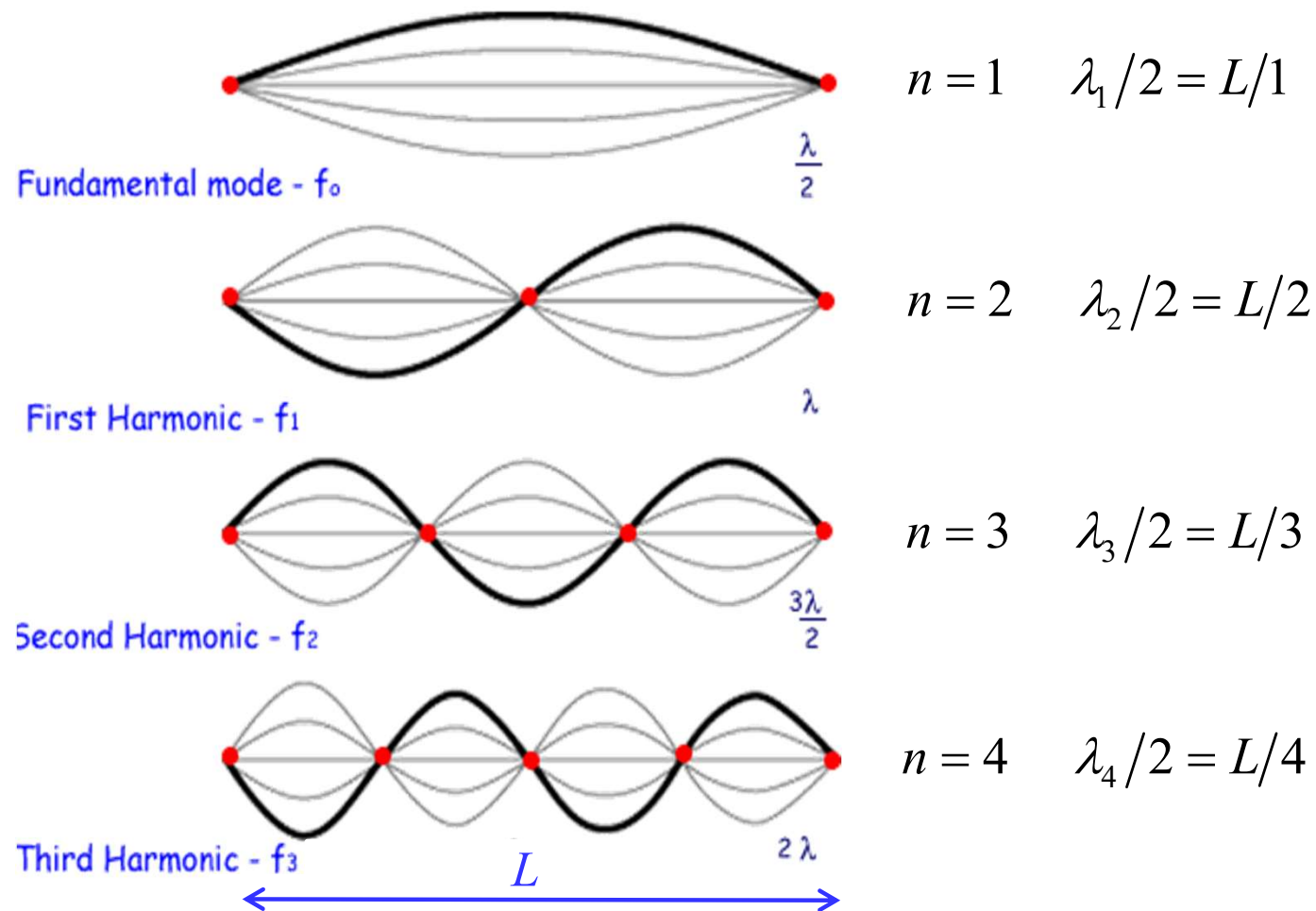
Il campo elettromagnetico [42]

A seguito di una opportuna perturbazione esterna, nei sistemi considerati, si realizzano solo onde stazionarie del tipo:

$$E_{\rightleftharpoons}(x,t) = E_0(x) \cos(\omega t) \quad \text{con: } E_0(x) = 2E_0 \sin(kx)$$

con lunghezze d'onda che soddisfano il seguente vincolo:

$$\lambda/2 = L/n \quad \text{con: } n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ (il valore } n=0 \text{ non ha ovviamente senso fisico...)}$$



(Harmonics are sometimes called 'overtones')

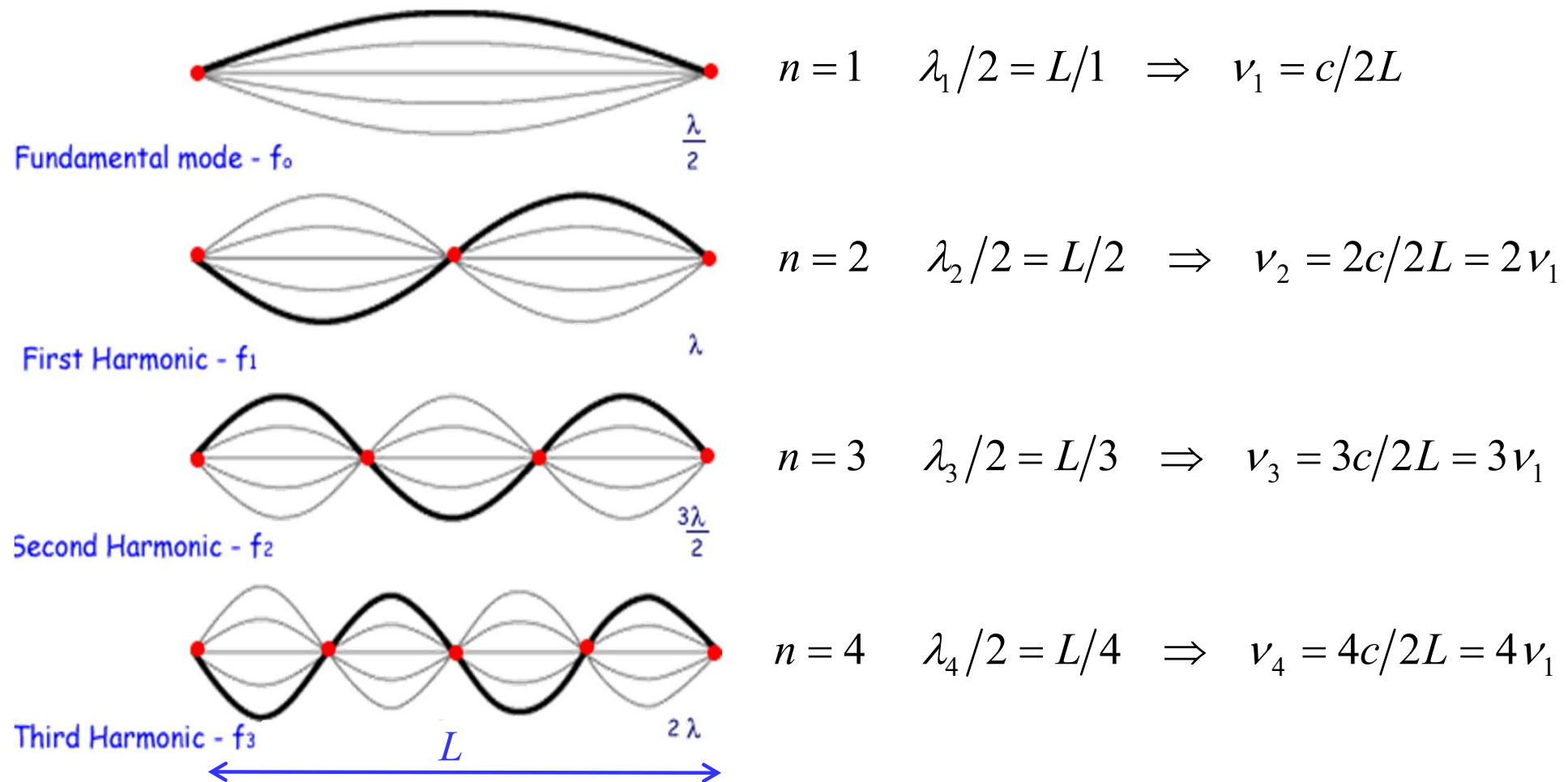
Il campo elettromagnetico [43]

A seguito di una opportuna perturbazione esterna, nei sistemi considerati, si realizzano solo onde stazionarie del tipo:

$$E_{\rightleftharpoons}(x,t) = E_0(x) \cos(\omega t) \quad \text{con: } E_0(x) = 2E_0 \sin(kx)$$

con lunghezze d'onda che soddisfano il seguente vincolo:

$$\lambda/2 = L/n \quad \text{con: } n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ (il valore } n=0 \text{ non ha ovviamente senso fisico...)}$$



(Harmonics are sometimes called 'overtones')

