Compiti d'Esame di Analisi 2B

Anno 2022

Roberto Monti

Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Prova scritta del 16/6/2022

---

6 +2 **Esercizio 1 (8 punti)** Siano $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ tre numeri reali tali che $x + y + z = 4$. Provare che $xyz^2 \leq 4$ e calcolare per quali numeri – se esistono – si ha l'uguaglianza.

Risposte: uguaglianza per $x =$ 1 $\quad y =$ 1 $\quad z =$ 2

Esercizio 2 (8 punti) Sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \pi, x^2 + y^2 \neq 0\}$ si consideri la 1–forma differenziale:

$$\omega = \frac{y \cos x}{\sin^2 x + y^2} dx - \frac{\sin x}{\sin^2 x + y^2} dy.$$

3 i) Stabilire se ω è chiusa in A.

3 ii) Stabilire se ω è esatta in A ed eventualmente calcolarne un potenziale.

2 iii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega$$

dove $\gamma : [0, 2\pi] \to A$ è la circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Risposte: i) ω chiusa si/no $\quad$ ii) potenziale $f =$ non c'è $\quad$ iii) $I = -2\pi$

Esercizio 3 (8 punti) Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$ ed $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < 1\}$.

4 i) Calcolare l'integrale

$$I_1 = \int_A \log \frac{1}{f(x, y)} dxdy.$$

4 ii) Calcolare l'integrale

$$I_2 = \int_A \sqrt{\log \frac{1}{f(x, y)}} dxdy.$$

Risposte: i) $I_1 =$ 2 $\quad$; ii) $I_2 = \sqrt{2\pi}$

3+5 **Esercizio 4 (8 punti)** Enunciare e dimostrare il teorema sul cambiamento di variabile per l'integrale di Lebesgue.

---

3 ore a disposizione

Esercizio Siano $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ tre numeri tali che $x+y+z = 4$. Provare che $\frac{1}{4} xyz^2 \leq 1$ e stabilire per quali numeri - se esistono - si raggiunge l'uguaglianza.

Risoluzione. Usiamo il Teorema sui moltiplicatori di Lagrange. Sia $h(x,y,z) = x+y+z$ la funzione di vincolo,

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ h(x,y,z) = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } z \geq 0 \}$$

è compatto, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{1}{4} xyz^2$ è continua. Dunque f ha massimo su M. Sarà raggiunto dove $xyz > 0$. Possiamo usare i moltiplicatori di Lagrange. Esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che nel punto di massimo

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla h(x,y,z)$$

ovvero

$$\begin{cases} \frac{1}{4} yz^2 = \lambda \\ \frac{1}{4} xz^2 = \lambda \\ \frac{1}{2} xyz = \lambda . \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si deduce che $y = x$. Il sistema si riduce a

$$\begin{cases} \frac{1}{4} xz^2 = \lambda \\ \frac{1}{2} x^2 z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} xz^2 = \frac{1}{2} x^2 z \underset{\substack{x \neq 0 \\ z \neq 0}}{\Longrightarrow} z = 2x .$$

Dal vincolo $x+y+z=4$ si deduce $x=1$, $y=1$, $z=2$.

Il valore massimo di f su M è:

$$f(1,1,2) = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 1.$$

L'uguaglianza è raggiunta nel solo punto $(1,1,2)$.

$\square$

Esercizio Sull'insieme $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \pi, \ x^2+y^2 \neq 0 \}$ si consideri la 1-forma differenziale:

$$\omega = \frac{y \cos x}{\sin^2 x + y^2} \, dx - \frac{\sin x}{\sin^2 x + y^2} \, dy ,$$

i) Stabilire se ω è chiusa in A.

ii) Stabilire se ω è esatta in A ed eventualmente calcolarne un potenziale.

iii) Data $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma \omega .$$

Risoluzione, i) Conti:

$$① = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y \cos x}{\sin^2 x + y^2} \right) = \frac{\cos x (\sin^2 x + y^2) - y \cos x \cdot 2y}{(\sin^2 x + y^2)^2}$$

$$= \frac{\cos x (\sin^2 x - y^2)}{(\sin^2 x + y^2)^2}$$

$$② = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{- \sin x}{\sin^2 x + y^2} \right) = \frac{- \cos x (\sin^2 x + y^2) + \sin x \, 2 \sin x \cos x}{(\sin^2 x + y^2)^2}$$

$$= \frac{\cos x (\sin^2 x - y^2)}{(\sin^2 x + y^2)^2}$$

Siccome ① = ② su A, deduciamo che ω è chiusa su A

ii) Cerchiamo un potenziale $f \in C^1(A)$:

$$(*)\quad \begin{cases} f_x = \dfrac{y\cos x}{\sin^2 x + y^2} \\[2ex] f_y = \dfrac{-\sin x}{\sin^2 + y^2} \end{cases}$$

Integro la prima equazione in x con integrale indefinito:

$$f(x,y) = \int \frac{y\cos x}{\sin^2 x + y^2}\, dx = \int \frac{\frac{\cos x}{y}}{1 + \frac{\sin^2 x}{y^2}}$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{y}\right) + c(y)$$

con $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da determinare. Il conto è possibile solo quando $y \neq 0$.

Derivando in y:

$$f_y(x,y) = \frac{-\frac{\sin x}{y^2}}{1 + \frac{\sin^2 x}{y^2}} + c'(y)$$

$$= \frac{-\sin x}{\sin^2 x + y^2} + c'(y)$$

Confrontando con la seconda equazione in $(*)$ si trova $c'(y) = 0$.

Tenuto conto che $y \neq 0$, deduciamo che esistono due costanti $c^{\pm} \in \mathbb{R}$ tali che

$$c(y) = \begin{cases} c^+ & \text{per } y > 0 \\ c^- & \text{per } y < 0 \end{cases}$$

Dunque

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\sin x}{y}\right) + c^+ & \text{per } y > 0 \\ \\ \arctan\left(\frac{\sin x}{y}\right) + c^- & \text{per } y < 0 \end{cases}$$

Bisogna vedere che f si estende in modo continuo ad $y = 0$ per $x \neq 0$ ($|x| < \pi$ con $x \neq 0$). Per $x \in (0, \pi)$:

$$\lim_{y \to 0^+} f(x,y) = \frac{\pi}{2} + c^+$$

$$\lim_{y \to 0^-} f(x,y) = -\frac{\pi}{2} + c^-$$

Per avere raccordo continuo deve essere $\frac{\pi}{2} + c^+ = -\frac{\pi}{2} + c^-$.

Per $x \in (-\pi, 0)$ si ha:

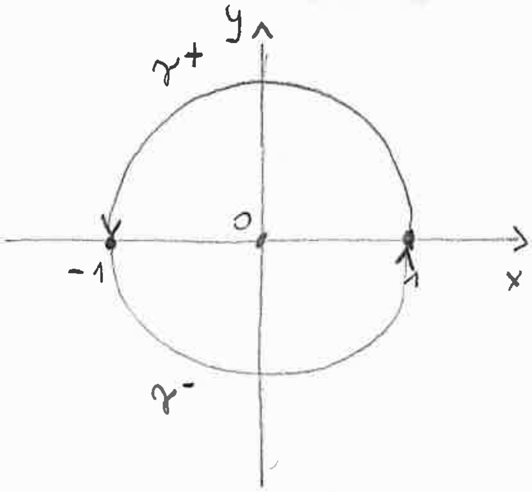
$$\lim_{y \to 0^+} f(x,y) = -\frac{\pi}{2} + c^+$$

$$\lim_{y \to 0^-} f(x,y) = \frac{\pi}{2} + c^-$$

Quindi: $-\frac{\pi}{2} + c^+ = \frac{\pi}{2} + c^-$. Le due condizioni sono incompatibili. Non c'è potenziale.

Dunque ω non è esatta in A.

iii) Suddividiamo γ nei due tratti γ^+ e γ^- come in figura:



Chiaramente

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma^+} \omega + \int_{\gamma^-} \omega$$

Su $y > 0$ ω ha potenziale $f^+(x,y) = \arctan\left(\frac{\sin x}{y}\right)$ che si estende in modo continuo su $y \geq 0$, purché $\sin x \neq 0$. Si trova:

$$\int_{\gamma^+} \omega = f^+(-1,0) - f^+(1,0)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

Su $y < 0$ ω ha potenziale $f^-(x,y) = \arctan\left(\frac{\sin x}{y}\right)$ che si estende in modo continuo su $y \leq 0$ con $\sin x \neq 0$.

Dunque

$$\int_{\gamma^-} \omega = f^-(1,0) - f^-(-1,0)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

Conclusione: $\int_\gamma \omega = -2\pi$. □

Esercizio Siano $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = \max\{|x|, |y|\}$

ed $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, f(x,y) < 1\}$.

i) Calcolare l'integrale

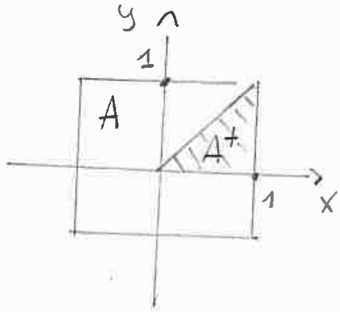
$$I_1 = \int_A \log \frac{1}{f(x,y)} \, dx dy .$$

ii) Calcolare l'integrale

$$I_2 = \int_A \sqrt{\log \frac{1}{f(x,y)}} \, dx dy .$$

Risoluzione i) Primo metodo. Per $x>0$ ed $y>0$ si ha $f(x,y) = x \iff x \geq y$. Detto

$$A^+ = \{(x,y) \in A : 0 < y < x < 1\}$$



Per simmetria avremo

$$I_1 = 8 \int_{A^+} \log \frac{1}{x} \, dx dy \overset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} 8 \int_0^1 \int_0^x \log \frac{1}{x} \, dy \, dx$$

$$= 8 \int_0^1 x \log \frac{1}{x} \, dx = -8 \int_0^1 x \log x \, dx \overset{\text{per parti}}{=}$$

$$= -8 \left[\underbrace{\frac{x^2}{2} \log x \Big|_{x=0}^{x=1}}_{=0} - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \right]$$

$$= 4 \int_0^1 x \, dx = 2 .$$

Secondo metodo. Per la formula di integrazione per sopralivelli:

$$I_1 = \int_0^\infty \mathcal{L}^2\left(\left\{(x,y) \in A \,;\, \log \frac{1}{f(x,y)} > t\right\}\right) dt.$$

Qui abbiamo:

$$\log \frac{1}{f(x,y)} > t \iff \frac{1}{f(x,y)} > e^{t} \iff f(x,y) < e^{-t}.$$

Posto $A_s = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ f(x,y) < s\}$ avremo

$$\mathcal{L}^2(A_s) = s^2\, \mathcal{L}^2(A_1) = 4s^2$$

Dunque

$$I_1 = \int_0^\infty 4\, e^{-2t}\, dt = 4 \left[\frac{e^{-2t}}{-2} \right]_{t=0}^{t=\infty} = 2.$$

(ii) Primo metodo. Replichiamo l'integrazione per sopralivelli:

$$I_2 = \int_0^\infty \mathcal{L}^2\left(\left\{ (x,y) \in A :\ \sqrt{\log \frac{1}{f(x,y)}} > t \right\} \right) dt.$$

Ora:

$$\sqrt{\log \frac{1}{f(x,y)}} > t \iff \log \frac{1}{f(x,y)} > t^2 \iff f(x,y) < e^{-t^2}$$

Quindi, come sopra,

$$I_2 = \int_0^\infty 4\, e^{-2t^2}\, dt \overset{t = \frac{\tau}{\sqrt{2}}}{=} 4 \int_0^\infty e^{-\tau^2} \frac{1}{\sqrt{2}}\, d\tau$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}.$$

Secondo metodo. Usiamo Fubini-Tonelli:

$$I_2 = 8 \int_{A^+} \sqrt{\log \frac{1}{x}} \, dx \, dy = 8 \int_0^1 \int_0^x \sqrt{\lg \frac{1}{x}} \, dy \, dx$$

$$= 8 \int_0^1 x \sqrt{\lg \frac{1}{x}} \, dx \, .$$

Sostituzione $\tau = \sqrt{\log \frac{1}{x}} \iff \tau^2 = \log \frac{1}{x} \iff e^{\tau^2} = \frac{1}{x}$

$\iff x = e^{-\tau^2}$

Da cui: $dx = -2\tau \, e^{-\tau^2} d\tau$ ed estremi: $x = 0 \to \tau = \infty$

$x = 1 \to \tau = 0$

Dunque

$$I_2 = 8 \int_0^\infty e^{-\tau^2} \tau \cdot 2\tau \, e^{-\tau^2} d\tau = 16 \int_0^\infty \underbrace{\tau^2 e^{-2\tau^2}}_{= \left(-\frac{\tau}{4}\right) \cdot \left(-4\tau \cdot e^{-2\tau^2}\right)} d\tau$$

$$= 16 \left[\left(-\frac{\tau}{4}\right) e^{-2\tau^2} \Big|_{\tau=0}^{\tau=\infty} + \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-2\tau^2} d\tau \right]$$

$$= 4 \int_0^\infty e^{-2\tau^2} d\tau = \sqrt{2\pi} \, .$$

$\square$

Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Prova scritta del 20/7/2022

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri l'insieme

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + (y^2-1)^2 - x^2y^2 = 0\}.$$

3 i) Determinare il più piccolo insieme chiuso $C \subset M$ tale che $M \setminus C$ sia una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$.

5 ii) Dopo aver provato che esistono, calcolare i valori massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ vincolata su M.

Risposte: i) $C = \{(0, \pm 1)\}$	ii) $\min_M f = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\max_M f = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Esercizio 2 (8 punti) Si consideri l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x+y < 2,\ |x-y| < 1\}$.

4 i) Se esiste, calcolare l'integrale

$$I = \int_A \frac{\log(x+y)}{\sqrt{|x-y|}} dxdy.$$

4 ii) Se esiste, calcolare l'integrale

$$I_\alpha = \int_A \frac{\sin(x-y)\log(x+y)}{|x-y|^\alpha} dxdy$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risposte: i) $I = 4(\log 2 - 1)$	; ii) $I_\alpha =$ 0 se $\alpha < 2$

Esercizio 3 (8 punti) In $\mathbb{R}^3$ con le coordinate $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ consideriamo, per $0 < r < 2$,

8

$$\Sigma_r = \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 + t^2 = 1 \text{ e } |x|^2 + (t-1)^2 < r^2\},$$

$$\Gamma_r = \{(x,t) \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 + t^2 = 1 \text{ e } |x|^2 + (t-1)^2 = r^2\}.$$

Verificare che fra l'area della calotta sferica Σ_r e la lunghezza della circonferenza Γ_r c'è la relazione

$$L(\Gamma_r)^2 = A(\Sigma_r)(4\pi - A(\Sigma_r)).$$

3 + 5 **Esercizio 4 (8 punti)** Enunciare e dimostrare il teorema di Poincaré.

---

3 ore a disposizione

<u>Esercizio</u>. Si consideri l'insieme

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + (y^2-1)^2 - x^2y^2 = 0\}.$$

i). Determinare il più piccolo insieme chiuso $C \subset M$ tale che $M \setminus C$ sia una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$.

ii) Dopo aver provato che esistono, calcolare il massimo e il minimo della funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$, vincolata su M.

Risoluzione. Detta $g(x,y) = x^4 + (y^2-1)^2 - x^2y^2$ la funzione definente di M, cerchiamo tutti i punti $(x,y) \in M$ tali che $\nabla g(x,y) = 0$. Conti:

$$g_x = 4x^3 - 2xy^2$$

$$g_y = 2(y^2-1)\cdot 2y - 2yx^2$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x(2x^2-y^2) = 0 \\ \{2(y^2-1) - x^2\}\, y = 0 \end{cases}$$

Ad $x=0$ corrispondono le soluzioni $y = 0, \pm 1$. Tuttavia $(0,0) \notin M$, mentre $(0,\pm1) \in M$. Per $x \neq 0$ ed $y \neq 0$ il sistema si riduce a:

$$\begin{cases} 2x^2-y^2 = 0 \\ 2(y^2-1) - x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 = y^2 \\ 2y^2 = x^2+2 \end{cases}$$

da cui $4x^2 = x^2+2 \iff 3x^2 = 2$ ovvero $x^2 = 2/3$ e $y^2 = \frac{4}{3}$.

Tuttavia

$$\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \neq 0$$

Siamo fuori da M. Conclusione: $C = \{(0,1), (0,-1)\}$.

ii) L'insieme M è chiuso ($M = g^{-1}(\{0\})$). Mostriamo che è limitato. Risolviamo $g(x,y) = 0$ in y:

$$(y^2-1)^2 - x^2y^2 + x^4 = 0$$

$$(y^2-1)^2 - x^2(y^2-1) + x^4 - x^2 = 0.$$

Consideriamo il discriminante.

$$\Delta = (-x^2)^2 - 4(x^4-x^2) = 4x^2 - 3x^4$$

Deve essere $\Delta \geq 0$ altrimenti non ci sono soluzioni, ovvero $4x^2 \geq 3x^4 \iff x^2 \leq 4/3$.

In modo analogo, il discriminante per $x^4 - x^2y^2 + (y^2-1)^2 = 0$ ovvero

$$\Delta = y^4 - 4(y^2-1)^2 = -3y^4 + 8y^2 - 4$$

deve essere $\Delta \geq 0$, che implica $y^2 \leq$ costante.

Conclusione: M è compatto e quindi f assume massimo e minimo su M. Se i punti di max/min sono su $M \setminus C$ devono verificare la condizione di Lagrange. Cerchiamo $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} g_x = 2\lambda x = \lambda f_x \\ g_y = 2\lambda y = \lambda f_y \\ g(x,y) = 0 \quad (y \neq \pm 1) \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 2x(2x^2-y^2) = 2\lambda x \\ 4y(y^2-1) - 2yx^2 = 2\lambda y \end{cases}$$

Se $x=0$ si trova $y=0,\pm 1$, punti esclusi.

Dividiamo per $x\neq 0$ e per $y\neq 0$:

$$\begin{cases} 2x^2-y^2=\lambda \\ 2(y^2-1)-x^2=\lambda \end{cases}$$

da cui si deduce $2x^2-y^2=2y^2-2-x^2 \iff 3x^2=3y^2-2$

Inseriamo $y^2=x^2+\frac{2}{3}$ in $g=0$:

$$x^4+\left(x^2+\frac{2}{3}-1\right)^2-x^2\left(x^2+\frac{2}{3}\right)=0$$

$$x^4+\cancel{x^4}-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}-\cancel{x^4}-\frac{2}{3}x^2=0$$

$$x^4-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{9}=0$$

$$x^2=\frac{\frac{4}{3}\pm\sqrt{\frac{16}{9}-\frac{4}{9}}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$$

In particolare, nei punti trovati:

$$f(x,y)=x^2+y^2=2x^2+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+2\,\frac{2\pm\sqrt{3}}{3} \left< \begin{array}{l} 2+\frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 2-\frac{2}{3}\sqrt{3} \end{array}\right.$$

nei punti $(0,\pm 1)$ si ha $f=1$. Osserviamo che

$$2-\frac{2}{3}\sqrt{3}<1<2+\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Conclusione

$$\min_M f = 2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\max_M f = 2+\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$\square$

Esercizio Si consideri l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x+y < 2, |x-y| < 1\}$.

i) Se esiste, calcolare l'integrale

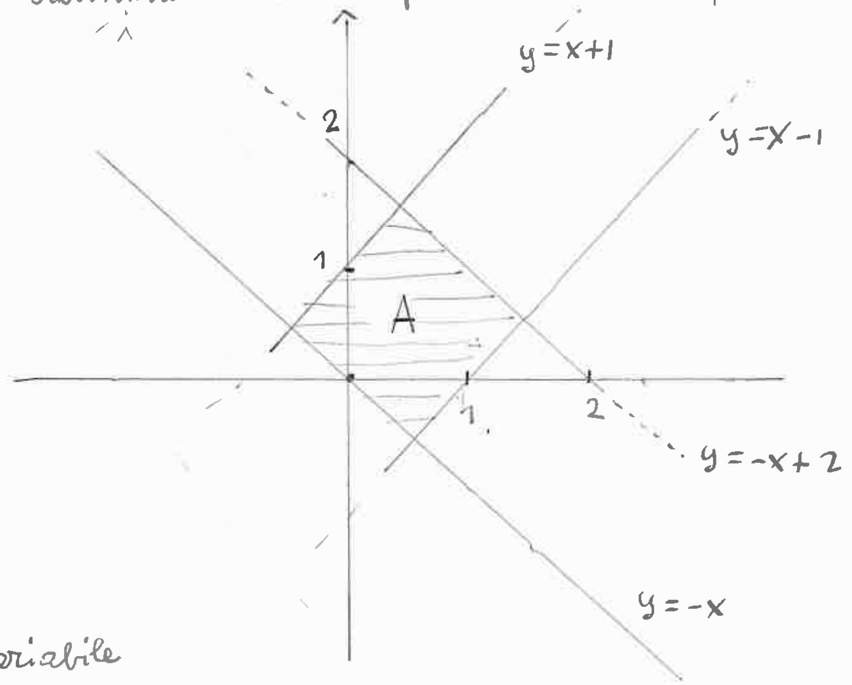
$$I = \int_A \frac{\log(x+y)}{\sqrt{|x-y|}}\, dx\, dy$$

ii) Se esiste, calcolare l'integrale

$$I_\alpha = \int_A \frac{\sin(x-y)\log(x+y)}{|x-y|^\alpha}\, dx\, dy$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. Il dominio di integrazione è il quadrato in figura



i) Cambio di variabile

$$\begin{cases} \xi = x+y \\ \eta = x-y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\xi+\eta}{2} = F_1(\xi,\eta) \\ y = \dfrac{\xi-\eta}{2} = F_2(\xi,\eta) \end{cases}$$

dunque $dx\,dy = |\det JF(\xi,\eta)|\, d\xi\, d\eta = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| d\xi\, d\eta$

$= \frac{1}{2}\, d\xi\, d\eta$

Dunque

$$I = \frac{1}{2}\int_{\{0<\xi<2,\ -1<\eta<1\}} \frac{\log \xi}{\sqrt{|\eta|}}\, d\xi\, d\eta \quad = \quad \text{Fubini-Tonelli}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \log \xi \, d\xi \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{|\eta|}}\, d\eta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\xi \log \xi \Big|_0^2 - \int_0^2 \xi \cdot \frac{1}{\xi}\, d\xi \right] \cdot 2 \cdot \left[\frac{\eta^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_{\eta=0}^{\eta=1} \right]$$

$$= 2\left[2\log 2 - 2 \right] = 4\,(\log 2 - 1)$$

ii) Supponiamo che $\dfrac{\sin(x-y)\log(x+y)}{|x-y|^\alpha} =: f(x,y) \in L^1(A)$

e consideriamo l'isometria $T(x,y) = (y,x)$.

Si ha $T(A) = A$. Per il Teorema del cambio di variabile

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_A f(y,x)\,dx\,dy$$
$$= -\int_A f(x,y)\,dx\,dy.$$

Abbiamo usato il fatto che il seno è dispari.

Dunque

$$f \in L^1(A) \implies \int_A f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

Dobbiamo dunque capire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$J_\alpha = \int_A \frac{|\sin(x-y)|\,|\log(x+y)|}{|x-y|^\alpha}\,dx\,dy < \infty$$

Con il cambio di variabile della parte i) :

$$J_\alpha = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^2 |\log \xi|\,d\xi}_{\text{converge}} \cdot \underbrace{\int_{-1}^{+1} \frac{|\sin(\eta)|}{|\eta|^\alpha}\,d\eta}_{\text{converge se e solo se } \alpha < 2}$$

Conclusione : $I_\alpha = 0$ per $\alpha < 2$, I_α non esiste per $\alpha \geq 2$.

$\square$

Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 5/9/2022

Esercizio 1 (8 punti) Calcolare tutti i valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che il seguente insieme $M \subset \mathbb{R}^2$ sia una sottovarietà differenziabile di dimensione 1:

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + (y^2 - 1)^2 - x^2y^2 = \alpha\}.$$

Risposte: M sottovarietà per $\alpha \in$ $(-1/3, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$

Esercizio 2 (8 punti) Data una funzione $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, si consideri la 1-forma differenziale ω in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\omega = \frac{\varphi(y)}{x^2+y^2}dx - \frac{\varphi(x)}{x^2+y^2}dy, \qquad x^2 + y^2 \neq 0.$$

i) Calcolare tutte le $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ tali che ω sia chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

ii) Per φ come al punto i), stabilire se ω è esatta sull'insieme

$$A = \{(x^4 - y^4, xy) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R},\ x > 0\}.$$

Risposte: i) $\varphi =$ kx, $k \in \mathbb{R}$; ii) ω esatta su A si/no si

Esercizio 3 (8 punti) Si sonsideri l'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z - xy < 1\}.$$

i) Calcolare il volume di A, ovvero $\mathscr{L}^3(A)$.

ii) Calcolare il seguente integrale:

$$I = \int_A \sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{1+(z-xy)^2}}dxdydz$$

Risposte: i) $\mathscr{L}^3(A) =$ $\pi/3$; ii) $I =$ $\frac{2\pi}{3}\left(\frac{4}{3} - \text{settsinh}(1)\right)$

Esercizio 4 (8 punti) Enunciare e dimostrare il Teorema della divergenza.

---

3 ore a disposizione

Esercizio Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'insieme

$$M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^4 + (y^2-1)^2 - x^2y^2 = \alpha \}$$

sia una varietà differenziabile di dimensione 1.

Risoluzione. Detta $g(x,y) = x^4 + (y^2-1)^2 - x^2y^2$, cerchiamo i punti per cui $\nabla g(x,y) = 0$.

Si trova il sistema

$$\begin{cases} g_x = 4x^3 - 2xy^2 = 0 \\ g_y = 2(y^2-1)2y - 2yx^2 = 0 \end{cases}$$

Ad $x=0$ corrispondono le soluzioni $y = 0, \pm 1$.
Abbiamo $g(0,0) = 1$ e $g(0,\pm 1) = 0$. Per $\alpha = 0, 1$ M non è sottovarietà.

Per $x \neq 0$ e $y \neq 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x^2 = y^2 \\ 2y^2 = x^2+2 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $x^2 = 2/3$ e $y^2 = 4/3$,

Abbiamo $g\left(\pm\sqrt{2/3}, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3}$. Dunque per $\alpha = -1/3$ M non è una varietà.

Bisogna capire infine se $M = \emptyset$ oppure no.
Risolviamo in x^2

$$x^4 - y^2x^2 + (y^2-1)^2 - \alpha = 0.$$

Discriminante $\Delta = y^4 - 4\left((y^2-1)^2 - \alpha\right)$, Se $\Delta < 0$ non ci sono soluzioni. Se $\Delta \geq 0$ ci sono soluzioni

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(y^2 \pm \sqrt{\Delta}\right) \geq 0 \text{ se scelgo } +.$$

Guardiamo il discriminante del nuovo polinomio

$$y^4 - 4\left[(y^2-1)^2 - \alpha\right] = y^4 - 4\left[y^4 - 2y^2 + 1 - \alpha\right]$$
$$= -3y^4 + 8y^2 - 4(1-\alpha).$$

Nuovo discriminante

$$\Delta' = 64 - 48 + 48\alpha = 16 + 48\alpha.$$

Dunque $\Delta' < 0 \iff 16 + 48\alpha < 0 \iff \alpha < -1/3$.

Conclusione: $M \neq \emptyset \iff \alpha \geq -\frac{1}{3}$.

Risposta: M varietà per $\alpha \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$.

$\square$

Esercizio. Data una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si consideri la 1-forma differenziale ω su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{\varphi(y)}{x^2+y^2}\,dx - \frac{\varphi(x)}{x^2+y^2}\,dy, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

i) Calcolare tutte le $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ tali che ω sia chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

ii) Per φ come in i), stabilire se ω è esatta sull'insieme

$$A = \{ (x^4 - y^4,\ xy) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \}$$

Risoluzione. i) La condizione di chiusura è

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varphi(y)}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\varphi(x)}{x^2+y^2}\right), \qquad x^2+y^2 \neq 0,$$

ovvero

$$\frac{\varphi_y(y)(x^2+y^2) - \varphi(y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\varphi_x(x)(x^2+y^2) - \varphi(x)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

ovvero

$$\varphi_y(y)(x^2+y^2) - 2y\,\varphi(y) = -\varphi_x(x)(x^2+y^2) + 2x\,\varphi(x).$$

Mettendo $x = y$ si ottiene $4\,\varphi_x(x)\,x^2 = 4x\,\varphi(x)$

ovvero

$$\frac{\varphi_x(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0,$$

Integrando

$$\left(\log|\varphi(x)|\right)' = \left(\log|x|\right)' , \quad x \neq 0$$

$$\log|\varphi(x)| = \log|x| + c_\pm , \quad x \neq 0 \quad c_\pm \in \mathbb{R}$$

$\pm = \mathrm{sgn}(x)$

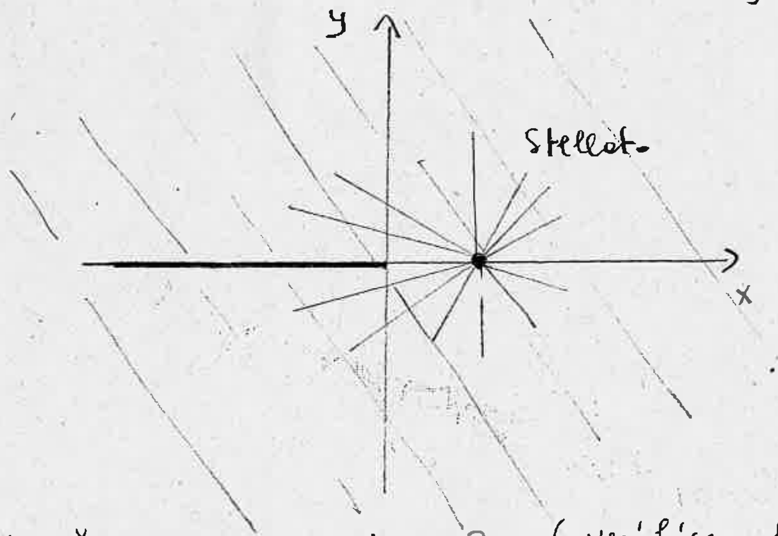
$$|\varphi(x)| = e^{c_\pm}|x| , \quad x \neq 0 .$$

Siccome $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, deve essere $\varphi(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

ii) Osserviamo che $A \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \leq 0\} := B$ infatti il sistema

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = x_0 < 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

non ha soluzione per $x > 0$. Ma B è contraibile (è stellato) e quindi essendo chiusa, ω è esatta su B.



In effetti è proprio $A = B$ (verifica facile omessa).

$\square$

Esercizio Si consideri l'insieme $A \subset \mathbb{R}^3$

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z - xy < 1 \} .$$

i) Calcolare il volume di A, ovvero $\mathcal{L}^3(A)$.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_A \sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{1+(z-xy)^2}} \, dxdydz$$

Risoluzione i) Le disuguaglianze che definiscono A sono

$$g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy < z < 1 + xy = h(x,y) .$$

Si ha $g = h \iff x^2+y^2 = 1$. Inoltre $A \subset \underbrace{\{x^2+y^2<1\}}_{\cap\ \mathbb{R}^2} \times \mathbb{R}$.

Per Fubini-Tonelli:

$$\mathcal{L}^3(A) = \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} 1 \, dz \right) dxdy$$

$$= \int_{\{x^2+y^2<1\}} \left(1 - \sqrt{x^2+y^2} \right) dxdy = [\text{Coord. polari}]$$

$$= 2\pi \int_0^1 r(1-r)\, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1}$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{3} .$$

ii) Il cambio di variabile

$$(x',y',z') = F(x,y,z) = (x,y,z-xy)$$

verifica

$$\det JF(x,y,z) = 1 .$$

Quindi

$$I = \int_{\{\sqrt{x^2+y^2}<z<1\}} \sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{1+z^2}}\, dx dy dz \overset{FT}{=} \int_{\{\sqrt{x^2+y^2}<1\}} \sqrt{1+x^2+y^2} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\, dz \right) dx dy$$

Ora usiamo (vedi pagina seguente)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\, dz = \operatorname{settsinh}(z) .$$

Con le coordinate polari si trova

$$I = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, \left(\operatorname{settsinh}(1) - \operatorname{settsinh}(r) \right) r\, dr .$$

Qui usiamo

$$\int r \sqrt{1+r^2}\, dr = \frac{1}{3} (1+r^2)^{3/2}$$

e facciamo una integrazione per parti:

$$I = 2\pi \left\{ \frac{1}{3} (1+r^2)^{3/2} \left(\operatorname{settsinh}(1) - \operatorname{settsinh}(r) \right) \Big|_{r=0}^{r=1} + \int_0^1 \frac{1}{3} (1+r^2)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\, dr \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ -\frac{1}{3} \operatorname{settsinh}(1) + \frac{1}{3} \int_0^1 (1+r^2)\, dr \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ -\frac{1}{3} \operatorname{settsinh}(1) + \frac{4}{9} \right\} .$$

Conto alternativo con la formula di coarea per ii).

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = z - xy \, ;$$

Notiamo che $\nabla f = (-y, -x, 1)$ e dunque

$$|\nabla f| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

L'integrale è dunque

$$I = \int_A \frac{1}{\sqrt{1+(z-xy)^2}} \, |\nabla f| \, dx\,dy\,dz \, .$$

Per la formula di coarea:

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A \cap \{z-xy = t\}} \frac{1}{\sqrt{1+(z-xy)^2}} \, dH^2 \right) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \left(\int_{A \cap \{z-xy = t\}} 1 \, dH^2 \right) dt \, .$$

Ma $A \cap \{z - xy = t\}$ = grafico di $(x,y) \mapsto xy + t$ sopra l'insieme $\sqrt{x^2+y^2} < t$, non vuoto per $0 \le t \le 1$:

$$\int_{A \cap \{z-xy=t\}} 1 \, dH^2 \overset{\text{Formula Aree}}{=} \int_{\{\sqrt{x^2+y^2} < t\}} \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx\,dy =$$

$$= 2\pi \int_0^t r \sqrt{1+r^2} \, dr = 2\pi \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (1+r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{r=t}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[(1+t^2)^{3/2} - 1 \right]$$

Dunque

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{2\pi}{3} \left[(1+t^2)^{3/2} - 1 \right] dt$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \left[(1+t^2) - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right] dt$$

Ora $\int_0^1 (1+t^2)\, dt = \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{4}{3}$, mentre

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \overset{t = \sinh(s)}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(s)}} \cosh(s)\, ds \overset{\cdot}{=} s$$

$$= \operatorname{settsinh}(t)$$

e dunque

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \operatorname{settsinh}(1) ,$$

In definitiva:

$$I = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{4}{3} - \operatorname{settsinh}(1) \right) ,$$

$$= \frac{8}{3}\pi - \frac{2\pi}{3} \operatorname{settsinh}(1) . \qquad \square$$

Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 22/9/2022

Esercizio 1 (8 punti) Dato il parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ si considerino il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ $E_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \alpha(x^2+y^2)\}$ e la palla $B_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2 \leq r^2\}$. Dopo averne discusso l'esistenza, calcolare il massimo

$$R_\alpha = \max\{r > 0 : B_r \subset E_\alpha\}.$$

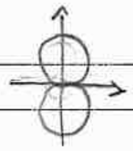
Risposte: $R_\alpha = 1$ se $\alpha \leq 1/2$ $\quad R_\alpha = (1/\alpha - 1/4\alpha^2)^{1/2}$ se $\alpha \geq 1/2$

Esercizio 2 (8 punti) Sia $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^3 = y^4\}$.

i) Determinare il più piccolo insieme chiuso $C \subset \mathbb{R}^2$ tale che $\Gamma \setminus C$ sia una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$.

ii) Parametrizzare l'insieme Γ in coordinate polari e rappresentarlo nel piano.

iii) Calcolare $\mathscr{H}^1(\Gamma)$, la lunghezza di Γ.

Risposte: i) $C = \{(0,0)\}$; ii) disegno:  iii) $\mathscr{H}^1(\Gamma) = 8 + \frac{4}{\sqrt{3}} \mathrm{arctsinh}(\sqrt{3})$

Esercizio 3 (8 punti) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 0 < y < 1\}$.

i) Calcolare tutti i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ tali che converga l'integrale

$$I_\beta = \int_A \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^\beta} dxdy.$$

ii) Calcolare I_1.

iii) Usare il punto precedente per calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\pi/2 - \arctan(\sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

Risposte: i) converge per $\beta \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; ii) $I_1 = \frac{\pi}{2}$ arctsinh(1) ; iii) $I = I_1$

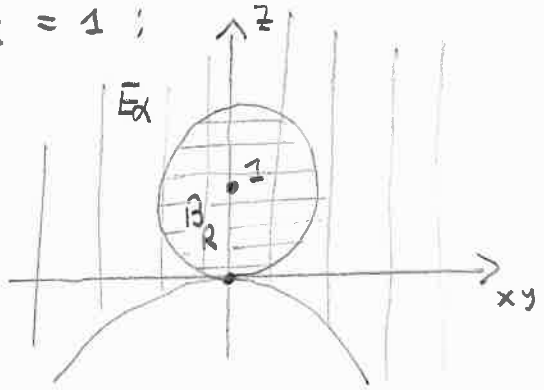
Esercizio 4 (8 punti) Richiamare le definizioni di sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^n$ come luogo di zeri e come parametrizzazione regolare. Enunciare e dimostrare il teorema sull'equivalenza delle due definizioni.

---

3 ore a disposizione

Esercizio Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ sia $E_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ z \geq \alpha (x^2+y^2)\}$.
Per $R>0$ consideriamo la palla $B_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;$
$;\ x^2+y^2+(z-1)^2 \leq R^2\}$. Calcolare in funzione di α
il più grande raggio tale che $B_R \subset E_\alpha$;
$$R_\alpha = \max \{ R>0 ;\ B_R \subset E_\alpha \}.$$

Risoluzione. Per $\alpha \leq 0$ si ha $\{z \leq 0\} \subset E_\alpha$
e dunque $R_\alpha = 1$;



Studiamo il caso $\alpha > 0$. Sia $M = \{ z = \alpha(x^2+y^2)\}$
e sia $f : M \to \mathbb{R}$
$$f(x,y,z) = x^2+y^2+(z-1)^2.$$

Vogliamo calcolare il $\min_M f = \mathrm{dist}((0,0,1);M)^2$.

È facile vedere che il minimo esiste (dettagli omessi).
Detta $h(x,y,z) = \alpha(x^2+y^2) - z$, nel punto di minimo
si ha
$$\nabla f = \lambda \nabla h \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

ovvero
$$\begin{cases} 2x = \lambda\, 2\alpha x \\ 2y = \lambda\, 2\alpha y \\ 2(z-1) = \lambda \cdot (-1) \end{cases}$$

con $(x,y,z) \in M$.

Ricopiamo il sistema

$$\begin{cases} x = \lambda \alpha x \\ y = \lambda \alpha y \\ 2(z-1) = -\lambda \end{cases}$$

con $z = \alpha(x^2+y^2)$. Se $x^2+y^2 \neq 0$ (ovvero $z \neq 0$)

si deduce che $1 = \lambda\alpha$ (usare prime due equazioni).

Dalla terza si trova

$$2\left(\alpha(x^2+y^2) - 1\right) = -\frac{1}{\alpha}$$

ovvero $2\alpha(x^2+y^2) = 2 - \frac{1}{\alpha} \iff x^2+y^2 = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2}\right)$.

Deve essere $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} > 0 \iff \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{2\alpha^2} \iff 2\alpha^2 > \alpha$

$\iff \alpha > \frac{1}{2}$.

Quindi per $\alpha \leq 1/2$ deve essere $x^2+y^2 = 0$.

In questo caso il punto di minimo è $(0,0,0) \in M$

e dunque $R_\alpha = 1$.

Continuiamo lo studio del caso $\alpha > \frac{1}{2}$ con $x^2+y^2 \neq 0$

e precisamente

$$x^2+y^2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$z = \alpha(x^2+y^2) = 1 - \frac{1}{2\alpha}.$$

In questo caso

$$R_\alpha^2 = x^2+y^2+(z-1)^2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{4\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{4\alpha^2}$$

e dunque $R_\alpha = \sqrt{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{4\alpha^2}}$. $\square$

Esercizio Si consideri l'insieme $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ (x^2+y^2)^3 = y^4\}$.

i) Studiare la regolarità di Γ.

ii) Parametrizzare Γ in coordinate polari e disegnarlo nel piano Cartesiano.

iii) Calcolare $\mathcal{H}^1(\Gamma)$, la lunghezza di Γ.

Risoluzione i) La funzione definiente $f(x,y) = (x^2+y^2)^3 - y^4$ verifica

$$f_x = 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2x$$

$$f_y = 3(x^2+y^2)^2 \cdot 2y - 4y^3 .$$

Studiamo il sistema $\nabla f = 0$. L'equazione $f_x = 0$ fornisce $x = 0$. Sostituendo in $f_y = 0$ si trova $6y^5 - 4y^3 = 0$ che ha soluzioni $y = 0$ e $y^2 = 2/3$. Ma $(0, \pm\sqrt{2/3}) \notin \Gamma$. Quindi c'è un unico punto non regolare, $(0,0) \in \Gamma$, $\Gamma \setminus \{(0,0)\}$ è una varietà regolare di dimensione 1 (curva).

ii) Siano $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, e cerchiamo r come funzione di θ:

$$(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^3 = r^4\sin^4\theta$$

$$\Updownarrow$$

$$r^6 = r^4 \sin^4\theta$$

Dunque l'equazione polare è $r = \sin^2\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\gamma(\theta) = (\sin^2\theta\cos\theta,\ \sin^3\theta)$$

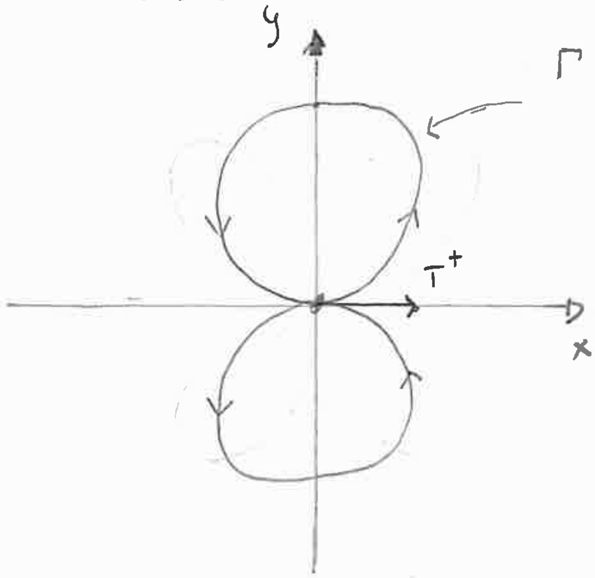
Derivate: $\dot{\gamma}(\theta) = \left(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta \, , \, 3\sin^2\theta\cos\theta \right)$

$= \sin\theta \left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta \, , \, 3\sin\theta\cos\theta \right).$

Si calcola il limite

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\dot{\gamma}(\theta)}{|\dot{\gamma}(\theta)|} = (1,0) = T^+$$

Disegno:



iii) La formula della lunghezza fornisce

$$H^1(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \, d\theta \qquad (\text{per simmetria})$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^4\theta + 4\sin^2\theta\cos^2\theta} \, d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \sqrt{1 + 3\cos^2\theta} \, d\theta$$

Calcoliamo preliminarmente

$$\int \sqrt{1+t^2} \, dt \overset{t=\sinh s}{=} \int \sqrt{1+\sinh^2 s} \, \cosh s \, ds$$

$$= \int \cosh^2 s \, ds = \int \frac{1}{4} \left(e^{2s} + e^{-2s} + 2 \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2s} - \frac{1}{2}e^{-2s} + 2s\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sinh(2s) + 2s\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\sinh(s)\cosh(s) + 2s\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sinh(s)\sqrt{1+\sinh^2(s)} + s\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \operatorname{settsinh}(t)\right).$$

Dunque

$$\int \sin\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta}\,d\theta \underset{ds = -\sin\theta\, d\theta}{\overset{\cos\theta = s}{=}} -\int\sqrt{1+3s^2}\,ds \overset{\sqrt{3}s =}{=}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int\sqrt{1+t^2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\,s\sqrt{1+3s^2} + \operatorname{settsinh}(\sqrt{3}\,s)\right)$$

$$= -\cos\theta\sqrt{1+3\cos^2\theta} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{settsinh}(\sqrt{3}\cos\theta)$$

e in conclusione

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) = 4\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{settsinh}(\sqrt{3})\right).$$

$\square$

Esercizio Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0 \text{ e } 0<y<1\}$.

i) Calcolare tutti i $\beta \in \mathbb{R}$ tali che converga l'integrale

$$I_\beta = \int_A \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\beta}\, dxdy$$

ii) Calcolare I_1

iii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\pi/2 - \arctan(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

Risoluzione i) Per $\beta \leq 0$ si ha $\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^\beta} \geq 1$ e poiché $\mathcal{L}^2(A) = +\infty$ l'integrale diverge. Discutiamo il caso $\beta > 0$. Per $(x,y) \in A$ si ha

$$\frac{1}{(2+x^2)^\beta} \leq \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\beta} \leq \frac{1}{(1+x^2)^\beta}$$

e dunque per Fubini - Tonelli

$$\int_0^\infty \frac{1}{(2+x^2)^\beta}\,dx \leq I_\beta \leq \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^\beta}\,dx.$$

Per confronto - Asintotico:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^\beta}\,dx < \infty \iff \int_1^\infty \frac{1}{x^{2\beta}}\,dx < \infty \iff \beta > \frac{1}{2}$$

e lo stesso per $\int_0^\infty \frac{1}{(2+x^2)^\beta}\,dx < \infty \iff \beta > \frac{1}{2}$.

Dunque I_β converge se e solo se $\beta > \frac{1}{2}$.

ii) Per Fubini - Tonelli:

$$I_1 = \int_A \frac{1}{(1+x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \left[\sqrt{1+y^2}\, \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\right) \right]_{x=0}^{x=\infty} dy$$

$$y = \sinh t$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\pi}{2}\, dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{\operatorname{settsinh}(1)} \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} \cosh t\, dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \operatorname{settsinh}(1).$$

iii) Scambiando l'ordine di integrazione:

$$I_1 = \int_0^\infty \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right) \right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{1+x^2}\right) \right) dx = I$$

Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 21/11/2022

Esercizio 1 (8 punti) Consideriamo la sfera $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z$. Calcolare

$$\min_M f \qquad \text{e} \qquad \max_M f.$$

Risposte: $\min_M f =$	$\max_M f =$

Esercizio 2 (8 punti) Data una funzione $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, si consideri la 1-forma differenziale ω su $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\omega = \frac{x\varphi(y)}{x^4 + y^4}dx - \frac{y\varphi(x)}{x^4 + y^4}dy, \qquad x^4 + y^4 \neq 0.$$

i) Risolvere l'equazione differenziale $t\varphi'(t) - 2\varphi(t) = 0$ per $t > 0$ con condizione iniziale $\varphi(1) = 1$.

ii) Calcolare tutte le $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(1) = 1$ tali che ω sia chiusa su A. Sugg.: usare i).

iii) Per φ come al punto ii), stabilire se ω è esatta su A.

Risposte: i) $\varphi(t) =$	; ii) $\varphi(t) =$	; iii) esatta su A si/no.

Esercizio 3 (8 punti) Per $r > 0$ si consideri il cubo

$$Q_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| < r, \ |y| < r, \ |z| < r\}.$$

Al variare di $\alpha > 0$ calcolare il limite

$$L_\alpha = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^\alpha} \int_{Q_r} \log(1 + x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

Risposte: $L_\alpha =$

Esercizio 4 (8 punti) Enunciare i teoremi (senza dimostrazioni) relativi al calcolo di integrali in piú variabili con le tecniche di: i) Fubini-Tonelli; ii) integrazione per sopralivelli; iii) formula di coarea; iv) Formula del cambio di variabile. Illustrare i teoremi tramite esempi significativi.

---

3 ore a disposizione

Esercizio Consideriamo la sfera $M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \}$ e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^x + e^y + e^z$.
Calcolare $\min\limits_M f$ e $\max\limits_M f$.

Risoluzione. M è compatto ed f è continua e dunque min/max di f su M esistono. M è una varietà regolare e dunque si può usare il teorema sui moltiplicatori di Lagrange. Posto $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, in ogni punto $(x,y,z) \in M$ di estremo locale deve esistere $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla h(x,y,z),$$

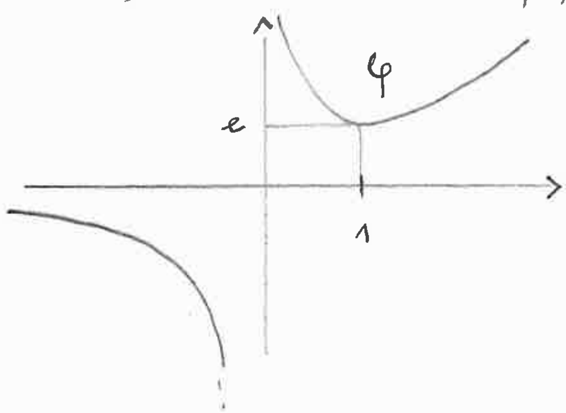
ovvero

$$\begin{cases} e^x = 2\lambda x \\ e^y = 2\lambda y \\ e^z = 2\lambda z \end{cases}.$$

Si deduce $\lambda \neq 0$ ed anche $x,y,z \neq 0$. Il sistema in particolare implica che

$$\circledast \qquad \frac{e^x}{x} = \frac{e^y}{y} = \frac{e^z}{z}.$$

Studiamo la funzione $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{x}$, $x \neq 0$.
Derivata: $\varphi'(x) = \dfrac{e^x x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x}{x^2}(x-1)$. Dunque φ cresce per $x>1$, decresce su $(-\infty,0)$ e su $(0,1)$. Grafico:



Su $(0,\infty)$ φ non è 1-1. Tuttavia su $(0,1)$ è iniettiva.

Siccome $(x,y,z) \in M$, abbiamo: $|x|, |y|, |z| \leq 1$.

Quindi dalla iniettività di φ su $[-1,1]\setminus\{0\}$ si deduce:

$$(*) \Rightarrow x = y = z.$$

Siccome $x^2+y^2+z^2 = 1$ deduciamo che $3x^2 = 1$ ovvero

$x = y = z = \pm\sqrt{3}/3$;

Concludiamo che

$$\max_M f = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 3e^{\sqrt{3}/3}$$

$$\min_M f = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -3e^{-\sqrt{3}/3}.$$

$\square$

Esercizio Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ e su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ consideriamo la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{x\,\varphi(y)}{x^4+y^4}\,dx - \frac{y\,\varphi(x)}{x^4+y^4}\,dy, \qquad x^2+y^2 \neq 0.$$

i) Risolvere l'equazione differenziale $t\varphi'(t) - 2\varphi(t) = 0$ per $t>0$ con condizione $\varphi(1) = 1$.

ii) Calcolare tutte le $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ con $\varphi(1) = 1$ tali che ω sia chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sugg.: usare i).

iii) Per le φ come in ii) stabilire se ω è esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Risoluzione. i) Variabili separabili: $\varphi'/\varphi = 2/t \iff$ $(\log \varphi)' = (2\log t)' \iff \log\varphi = \log t^2 + \text{costante}$ $\iff \varphi(t) = c\,t^2$. Con $\varphi(1) = 1$ trovo $c=1$.

Dunque si ottiene una unica $\varphi(t) = t^2$.

ii) Imponiamo la condizione di chiusura

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\,\varphi(y)}{x^4+y^4}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y\,\varphi(x)}{x^4+y^4}\right).$$

Conti:

$$(*) \qquad \frac{x\,\varphi'(y)(x^4+y^4) - x\,\varphi(y)\,4y^3}{(x^4+y^4)^2} = -\frac{y\,\varphi'(x)(x^4+y^4) - y\,\varphi(x)\,4x^3}{(x^4+y^4)^2}$$

da essere verificata per ogni $x^2+y^2 \neq 0$.

Deve essere verificata in particolare per $x=y$ (>0):

$$x\varphi'(x)\,2x^4 - x\varphi(x)\,4x^3 = -x\varphi'(x)\,2x^4 + x\varphi(x)\,4x^3$$

$$\Updownarrow \quad (x>0)$$

$$x\varphi'(x) - 2\varphi(x) = 0$$

Con la condizione $\varphi(1) = 1$ si trova $\varphi(x) = x^2$.

Con una verifica diretta si controlla che questa φ risolve l'identità (*) per $x^2+y^2 \neq 0$.

iii) La 1-forma è:

$$\omega = \frac{xy^2}{x^4+y^4}\,dx - \frac{yx^2}{x^4+y^4}\,dy.$$

É chiusa su $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, che però non è contraibile. Non si può usare il Teorema di Poincaré.

Cerchiamo un potenziale $f \in C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$:

$$(*)\quad \begin{cases} f_x = \dfrac{xy^2}{x^4+y^4} \\[2ex] f_y = -\dfrac{yx^2}{x^4+y^4} \end{cases}$$

Integro la prima equazione (integrali indefiniti)

$$f(x,y) = \int \frac{xy^2}{x^4+y^4}\,dx \underset{2x\,dx = d\xi}{\overset{x^2=\xi}{=}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{y^2}{\xi^2+y^4}\,d\xi \underset{(y\neq 0)}{=} \frac{1}{2y^2}\int \frac{1}{\left(\frac{\xi}{y^2}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\xi}{y^2}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x^2}{y^2}\right) + C(y)$$

Deriviamo l'identità ottenuta in y:

$$f_y = \frac{1}{2}\,\frac{-2\frac{x^2}{y^3}}{1+\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2} + c'(y) = -\frac{yx^2}{x^4+y^4} + c'(y).$$

Confrontando con la f_y in (*) si trova $c'(y)=0$.
Quindi $c=$ costante. Possiamo scegliere $c=0$ e trovare il candidato potenziale:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x^2}{y^2}\right) \quad \text{per } y \neq 0.$$

Quando $x \neq 0$ si ha il limite

$$\lim_{y\to 0^{\pm}} f(x,y) = \frac{1}{2}\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{4}.$$

Quindi f si estende in modo continuo su $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.
Dalle (*) deduciamo che $f \in C^1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$.
Dunque ω è esatta su $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

$\square$

Esercizio. Per $r>0$ consideriamo il cubo $Q_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; |x|<r, |y|<r, |z|<r\}$. Al variare di $\alpha>0$ calcolare il limite

$$L_\alpha = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^\alpha} \int_{Q_r} \log(1+x^2+y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz .$$

Risoluzione. Detta $B_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2+y^2+z^2 < r^2\}$ la palla si hanno le inclusioni

$$B_r \subset Q_r \subset B_{\sqrt{3}r}, \quad r>0.$$

Dunque

$$\int_{Q_r} \log(1+x^2+y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz \leq \int_{B_{\sqrt{3}r}} \log(1+x^2+y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz \leq$$

$$\leq \log(1+3r^2)\, \mathcal{L}^3(B_{\sqrt{3}r}) = \frac{4}{3}\pi\, 3^{3/2} r^3 \log(1+3r^2).$$

Se $\alpha>3$ si ha

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^3\log(1+3r^2)}{r^\alpha} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log(1+3r^2)}{r^{\alpha-3}} = 0$$

Dunque $L_\alpha = 0$ per $\alpha>3$.

Poi abbiamo

$$\int_{Q_r} \log(1+x^2+y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz \geq \int_{Q_r\setminus Q_{r/2}} \log(1+x^2+y^2+z^2)\, dx\,dy\,dz \geq$$

$$\geq \log\left(1+\frac{r^2}{4}\right) \mathcal{L}^3(Q_r\setminus Q_{r/2}) = \log\left(1+\frac{r^2}{4}\right)\{8r^3 - r^3\}$$

$$= 7r^3\log\left(1+\frac{r^2}{4}\right)$$

Per $\alpha \leq 3$ si ha il limite

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r^3 \log\left(1+\frac{r^2}{4}\right)}{r^\alpha} = \lim_{r \to \infty} r^{3-\alpha} \log\left(1+\frac{r^2}{4}\right) = +\infty$$

Dunque per confronto si deduce che $L_\alpha = +\infty$ per $\alpha \leq 3$.

$\square$

Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 13/2/2023

Esercizio 1 (8 punti) Per $r > 0$ si consideri il rettangolo $A_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < r,\ 0 < y < 1\}$. Calcolare il limite

$$L = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r} \int_{A_r} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy.$$

Risposte: $L =$ $\pi/4$

Esercizio 2 (8 punti) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2) - xy$ e dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'insieme $\Gamma_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = \alpha\}$.

i) È vero che $\Gamma_\alpha \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$?

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme Γ_α è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$.

iii) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme Γ_α è compatto.

iv) Stabilire se esiste il minimo $\min_{\Gamma_\alpha} g$ con $g(x, y) = xy$.

Risposte: i) $\Gamma_\alpha \neq \emptyset$ per $\alpha \in$ $\mathbb{R}$	ii) Γ_α sottovarietà per $\alpha \in$ $\mathbb{R} \setminus \{0, \log 2 - 1/2\}$
iii) Γ_α compatto per $\alpha \in$ $\emptyset$	iv) minimo esiste per $\alpha \in$ $\mathbb{R}$

Esercizio 3 (8 punti) In $\mathbb{R}^3$ con le coordinate $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ consideriamo, per $0 < r < 2$,

$$\Sigma_r = \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 + t^2 = 1 \text{ e } |x|^2 + (t-1)^2 < r^2\},$$
$$\Gamma_r = \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 + t^2 = 1 \text{ e } |x|^2 + (t-1)^2 = r^2\}.$$

Verificare che fra l'area della calotta sferica Σ_r e la lunghezza della circonferenza Γ_r c'è la relazione

$$L(\Gamma_r)^2 = A(\Sigma_r)\big(4\pi - A(\Sigma_r)\big)$$

Risposte: $L(\Gamma_r) =$ $2\pi\sqrt{r^2 - r^4/4}$	$A(\Sigma_r) =$ πr^2

Esercizio 4 (8 punti) Enunciare e dimostrare il Teorema della divergenza. Definire tutte le nozioni rilevanti.

---

3 ore a disposizione

Esercizio. Per $r>0$ si consideri il rettangolo $A_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0<x<r,\ 0<y<1\}$. Calcolare il limite

$$L = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r} \int_{A_r} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\,dy.$$

Risoluzione. Per Fubini - Tonelli

$$\int_{A_r} \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dx\,dy = \int_0^r \int_0^1 \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^r \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^r \frac{1}{1+x^2} \left[\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right) \sqrt{1+x^2} \right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^r \sqrt{1+x^2}\, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$$

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$L = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_0^r \sqrt{1+x^2}\, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$$

$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Ammettendo che $x \longmapsto \int_0^1 \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dy$ è continua (fatto vero, constatato sopra) si poteva anche calcolare direttamente

$$L = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r} \int_0^r \int_0^1 \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\, dy = \frac{\pi}{4}.$$

$\square$

Esercizio Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) - xy$ e dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'insieme $\Gamma_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \alpha\}$.

i) É vero che $\Gamma_\alpha \neq \emptyset$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$?

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ Γ_α è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$

iii) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\Gamma_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ è compatto

iv) Stabilire se esiste il $\min\limits_{\Gamma_\alpha} g$, con $g(x,y) = xy$. [Non si chiede di calcolarlo].

Risoluzione i) Fissato $x \neq 0$, ad esempio $x > 0$, si ha

$$\lim_{y \to \pm\infty} \log(1+x^2+y^2) - xy = \mp\infty .$$

Siccome $y \mapsto f(x,y)$ è continua, per il teorema dei valori intermedi l'equazione $f(x,y) = \alpha$ ha almeno una soluzione y. Dunque $\Gamma_\alpha \neq \emptyset$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

iii) Dal punto i) segue che Γ_α non è limitato. Quindi Γ_α non è compatto per nessun $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Studiamo il sistema di equazioni $\nabla f = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2+y^2} - y = 0 \\[2mm] \dfrac{2y}{1+x^2+y^2} - x = 0 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima per y, la seconda per x e sottraendo si trova $x^2 = y^2$. D'altra parte x e y devono avere lo stesso segno e quindi: $x = y$. Sostituendo sopra si trova

$$\frac{2x}{1+2x^2} - x = 0$$

Una soluzione è $x=0$ (e quindi $y=0$). Quando $x=y=0$ si trova $f(0,0)=0$. Quindi per $\alpha=0$ Γ_α non è una sottovarietà.

Per $x\neq 0$ l'equazione precedente è

$$\frac{2}{1+2x^2}-1=0 \iff 2=1+2x^2 \iff x^2=\frac{1}{2}$$

e quindi $x=y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. In questo caso:

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\log(1+1)-\frac{1}{2}=\log 2-\frac{1}{2},$$

Dunque per $\alpha=\log 2-\frac{1}{2}$, Γ_α non è una sottovarietà

iv) Γ_α non è compatto e dunque l'esistenza del minimo non è evidente. Su Γ_α abbiamo

$$g(x,y)=xy=\log(1+x^2+y^2)-\alpha.$$

Dunque

$$\inf_{\Gamma_\alpha} xy=\inf_{\Gamma_\alpha}\{\log(1+x^2+y^2)-\alpha\}$$
$$=-\alpha+\inf_{\Gamma_\alpha}\log(1+x^2+y^2).$$

Sia $R>0$ tale che $\underbrace{\Gamma_\alpha\cap\{x^2+y^2\leq R^2\}}_{=:K_\alpha}\neq\emptyset$.

K_α è chiuso e limitato, dunque è compatto. Siccome $\log(1+x^2+y^2)$ cresce al crescere di x^2+y^2 è chiaro che

$$\inf_{\Gamma_\alpha}\log(1+x^2+y^2)=\inf_{K_\alpha}\log(1+x^2+y^2)$$
$$\overset{\text{Weierstrass}}{=}\min_{K_\alpha}\log(1+x^2+y^2),$$

Dunque $\min_{\Gamma_\alpha} g$ esiste per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$. $\square$

Esercizio In $\mathbb{R}^3$ con le coordinate $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ consideriamo, per $r \in (0,2)$;

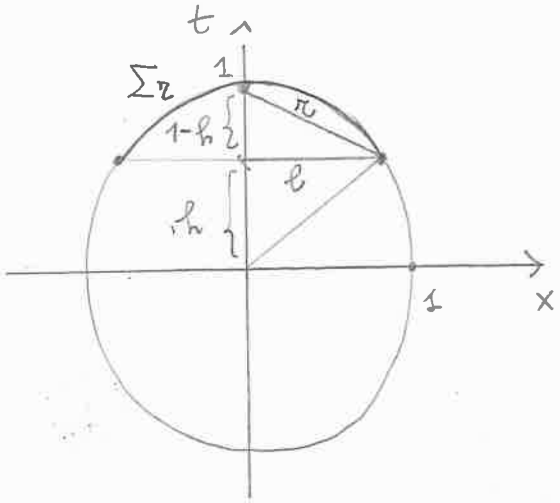
$$\Sigma_r = \{ (x,t) \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 + t^2 = 1 \ \text{ e } \ |x|^2 + (t-1)^2 < r^2 \}$$

$$\Gamma_r = \{ (x,t) \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 + t^2 = 1 \ \text{ e } \ |x|^2 + (t-1)^2 = r^2 \}.$$

Verificare che fra l'aree delle calotte sferice Σ_r e la lunghezza della circonferenza Γ_r c'è la relazione

$$L(\Gamma_r)^2 = A(\Sigma_r)\,(4\pi - A(\Sigma_r))$$

Risoluzione. La calotta Σ_r è come in figura:



Il legame fra r ed l è:

$$r^2 = (1-h)^2 + l^2 = 1 - 2h + h^2 + l^2$$
$$= 1 - 2h + 1 = 2(1-h)$$
$$= 2\left(1 - \sqrt{1-l^2}\right).$$

Conti corretti per $r \leq \sqrt{2}$.

Detto $A = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x| < l \}$ ed $f(x) = \sqrt{1-|x|^2}$ si ha $\Sigma_r = gr(f)$ e dunque per la formula dell'area:

$$A(\Sigma_r) = \int_A \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx = \int_A \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}\, dx$$

Coordinate polari

$$= 2\pi \int_0^l \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho$$

$$= 2\pi \left[-\sqrt{1-\rho^2} \right]_0^l = 2\pi \left(1 - \sqrt{1-l^2} \right) =$$

$$= 2\pi \frac{r^2}{2} = \pi r^2$$

La lunghezza di Γ_r è:

$$L(\Gamma_r) = 2\pi \ell .$$

Ricavo ℓ in funzione di r: $(r \leq \sqrt{2})$

$$r^2 = 2(1-\sqrt{1-\ell^2}) \iff 2-r^2 = 2\sqrt{1-\ell^2} \iff (2-r^2)^2 = 4(1-\ell^2)$$

$$\iff 4\ell^2 = 4-(2-r^2)^2 = 4r^2 - r^4$$

$$\iff \ell = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}r^4}$$

Dunque per $r \leq \sqrt{2}$:

$$L(\Gamma_r)^2 = 4\pi^2\ell^2 = \pi^2(4r^2 - r^4) = \pi r^2 (4\pi - \pi r^2)$$

$$= A(\Sigma_r)\left(4\pi - A(\Sigma_r)\right).$$

Quando $r \in [\sqrt{2}, 2]$, il legame fra r ed ℓ è
$r^2 = 2(1+\sqrt{1-\ell^2})$ che si inverte sempre come $\ell = \sqrt{r^2 - \frac{r^4}{4}}$.
L'area di Σ_r è

$$A(\Sigma_r) = 2\pi + 2\pi \int_\ell^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho$$

$$= 2\pi + 2\pi \left[-\sqrt{1-\rho^2} \right]_\ell^1$$

$$= 2\pi + 2\pi\sqrt{1-\ell^2} = 2\pi(1+\sqrt{1-\ell^2}) = \pi r^2 .$$

Si ottiene la stessa formula come per $r \leq \sqrt{2}$.

$\square$