Moto circolare uniforme (osservo un moto, ne deduco la velocità istantanea)

Coordinate polari: ρ :distanza da O
ϑ :anomalia, angolo che il raggio vettore forma con l'asse x

$2\pi = \omega T$ T è il tempo impiegato a fare un giro cioè il periodo

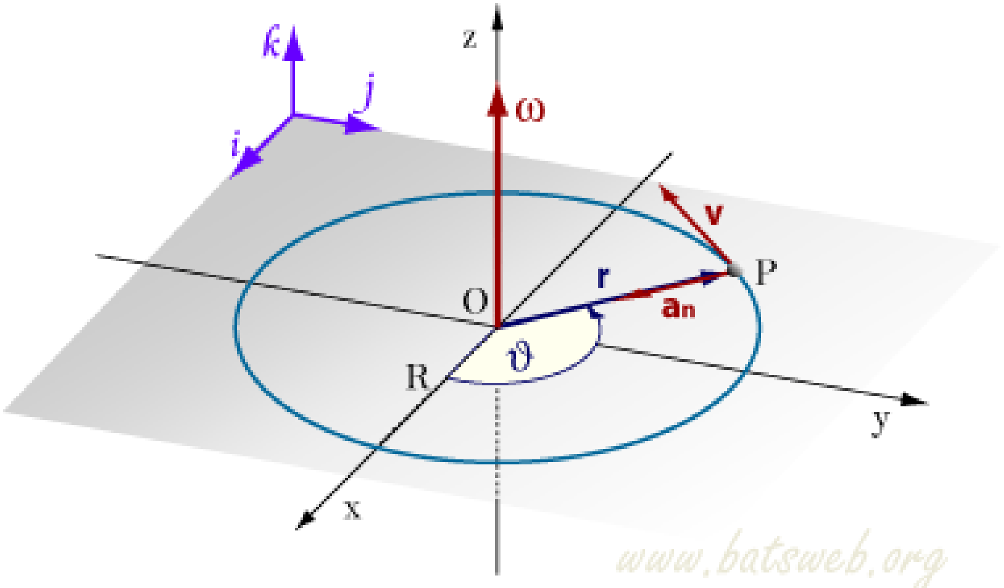
$\nu = 1/T$ ν è il numero di giri al secondo cioè la frequenza

Moto circ. unif. $\rho = \text{costante}$
$\vartheta = \omega t$

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\ \hat{\imath} + R\sin(\omega t)\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = -\omega R\sin(\omega t)\hat{\imath} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{k} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{k}$$ Velocità angolare



$$\vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t) \qquad |\vec{v}(t)| = \omega R$$

$$x^2(t) + y^2(t) = R^2$$ Verifica che la traiettoria è circolare

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{v}(t) = \vec{r}(t)\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}(t)\right) = 0$$

Verifica che la velocità è tangente alla traiettoria

Accelerazione

$$\vec{a}_{media} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad \vec{a}_{istantanea} = \lim_{dt\to 0} \frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

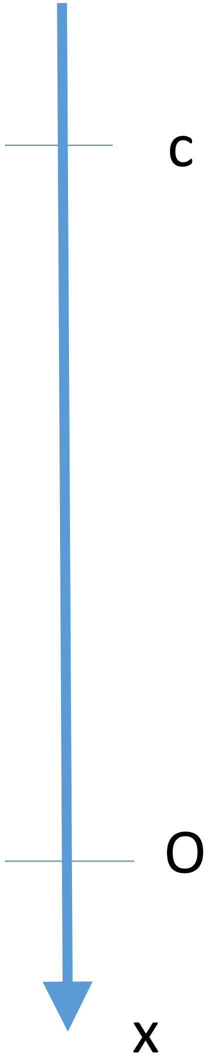
Un’altra grandezza importante per descrivere il moto di un corpo è l’accelerazione. Pensate alle partenza di una gara di formula uno o alla partenza di una gara sui 100 m.

L’accelerazione istantanea è il concetto moderno di accelerazione e nel parlare sia comune che scientifico il temine istantaneo viene omesso.

L’accelerazione è la derivata seconda del raggio vettore. La derivata terza del raggio vettore ha scarso uso in fisica e anche nel mondo pratico.

Moto in caduta libera (osservo un moto, ne deduco velocità e accelerazione istantanea)

Questa legge oraria fu studiata da Galileo



$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}g\cdot t^2 + b\cdot t + c\right)\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

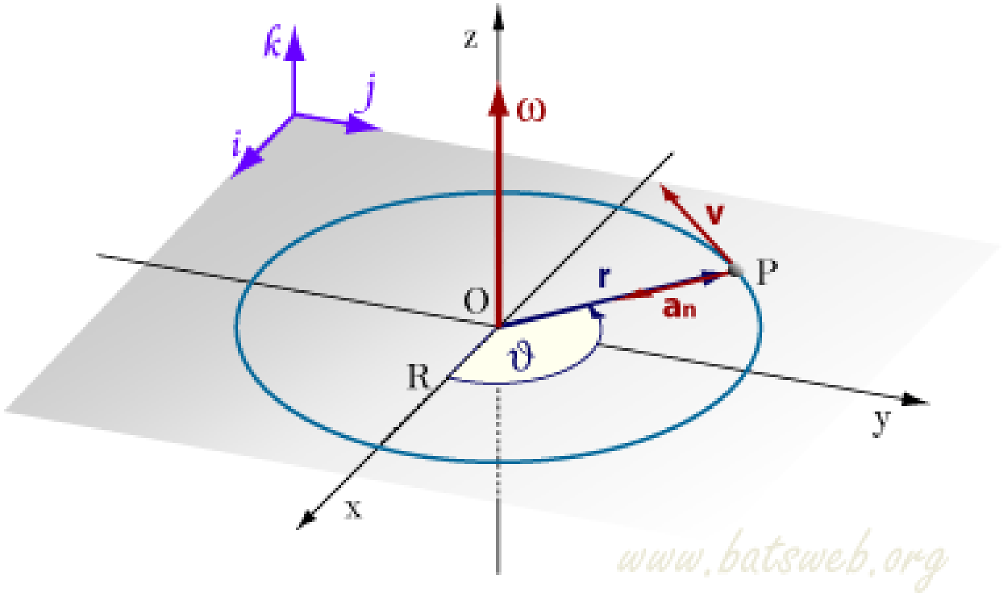
Dove $[g] = \frac{m}{s^2}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{\imath}\frac{dx(t)}{dt} + \hat{\jmath}\frac{dy(t)}{dt} + \hat{k}\frac{dz(t)}{dt} = (g\cdot t + b)\,\hat{\imath}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \hat{\imath}\frac{dv_x(t)}{dt} + \hat{\jmath}\frac{dv_y(t)}{dt} + \hat{k}\frac{dv_z(t)}{dt} = g\,\hat{\imath}$$

Se la direzione della velocità non varia (cioè il moto è rettilineo) pure la direzione dell’accelerazione non varia

Moto circolare uniforme (osservo un moto, ne deduco velocità e accelerazione istantanea)



$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\ \hat{\imath} + R\sin(\omega t)\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

Il vettore velocità istantanea è la derivata rispetto al tempo del raggio vettore (la componente lungo l'asse x della velocità istantanea è la derivata della componente x del raggio vettore e così via per le componenti y e z)

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -\omega R\sin(\omega t)\hat{\imath} + \omega R\cos(\omega t)\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

$$|\vec{a}(t)| = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

Il vettore accelerazione istantanea è la derivata seconda rispetto al tempo del raggio vettore (la componente lungo l'asse x della accelerazione istantanea è la derivata seconda della componente x del raggio vettore e così via per le componenti y e z)

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\ \hat{\imath} - \omega^2 R\sin(\omega t)\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} = -\omega^2\,\vec{r}(t)$$

Derivata di un vettore rispetto al tempo

La derivata di un vettore rispetto al tempo è la derivata delle sue componenti rispetto al tempo (lo abbiamo visto ampiamente negli esempi precedenti). C'è però un modo equivalente di farla che in certi casi può risultare utile.

Un vettore che varia nel tempo può sempre scritto istante per istante come il prodotto del suo modulo per il versore in cui è diretto. Se il vettore varia nel tempo entrambe queste quantità variano nel tempo.

$$\vec{A}(t) = A(t)\hat{u}(t)$$

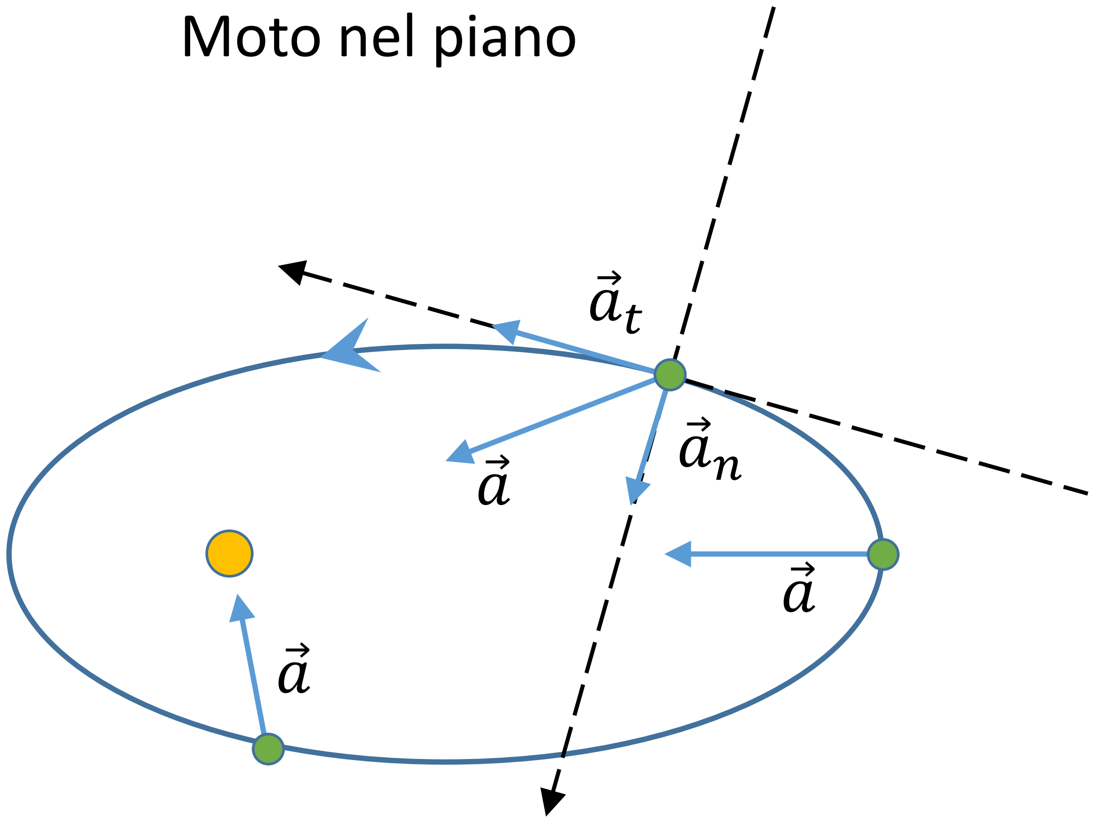
Quando facciamo la derivata possiamo applicare le regole della derivata di un prodotto

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}\hat{u}(t) + A(t)\frac{d\hat{u}(t)}{dt}$$

Si osserva che

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt}\hat{u}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{A}(t)$$

Moto nel piano

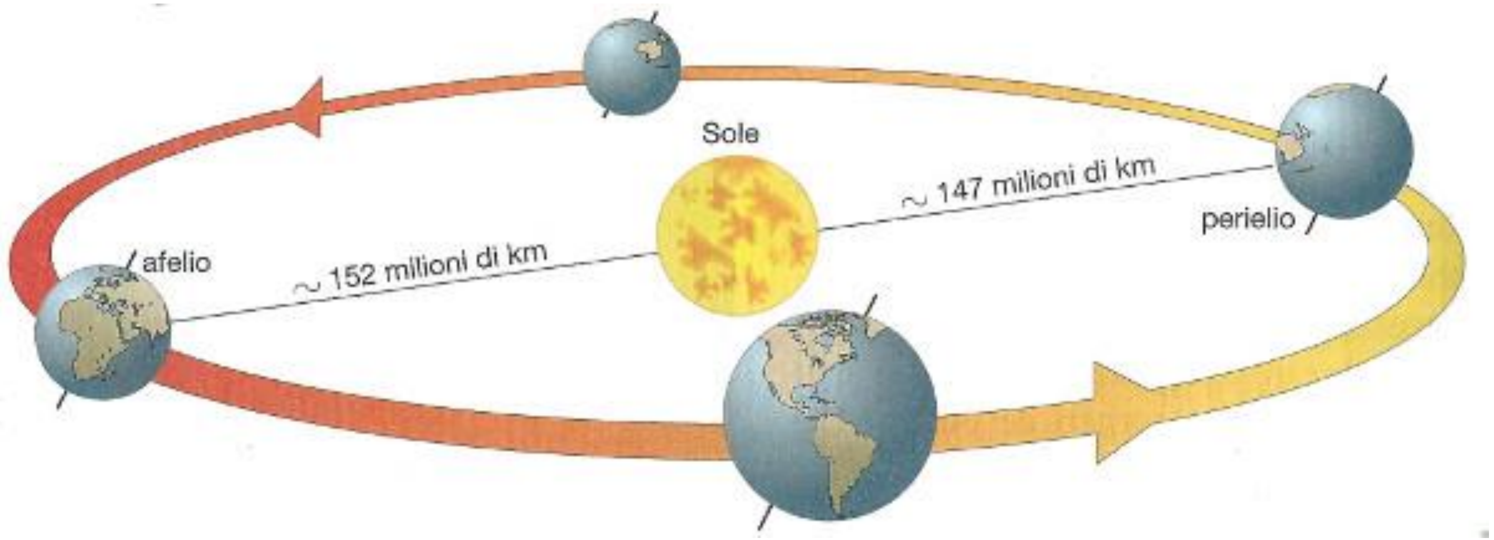


L'accelerazione ha due componenti:

- Una tangente alla traiettoria con modulo uguale alla derivata rispetto al tempo del modulo della velocità ed è:
    - nulla se il moto è uniforme
    - positiva se la velocità sta aumentando
    - negativa se la velocità sta diminuendo
- Una perpendicolare alla traiettoria, diretta verso l'interno della concavità ed è nulla solo se la direzione della velocità non varia

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_t + v\omega\mathbf{u}_n = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$



Dall'accelerazione alla legge oraria

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} + v_z(t)\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}$$

Dato un punto materiale che percorre una traiettoria,
nota la legge oraria, cioè la dipendenza dal tempo del raggio vettore $\vec{r}$, è possibile trovare $\vec{v}$ e $\vec{a}$.
Questo è quello che fece Newton per dedurre la legge di gravitazione universale.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}\,.$$

Molto spesso però è utile fare anche il processo inverso. Noto il campo di accelerazione in gioco (cioè l'accelerazione in ogni punto dello spazio) ricavare velocità e traiettoria. E' quello che si fa per mandare un satellite nello spazio o un robot su Marte.

Dall'accelerazione alla legge oraria

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t)\, dt$$

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t)\, dt,$$

$$v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(t)\, dt.$$

$$v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_z(t)\, dt\ .$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int^{t} \mathbf{v}(t)\, dt\ .$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt,$$

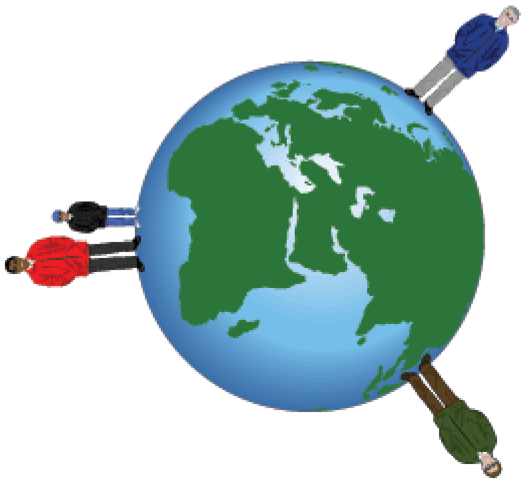
$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t)\, dt,$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(t)\, dt\ .$$

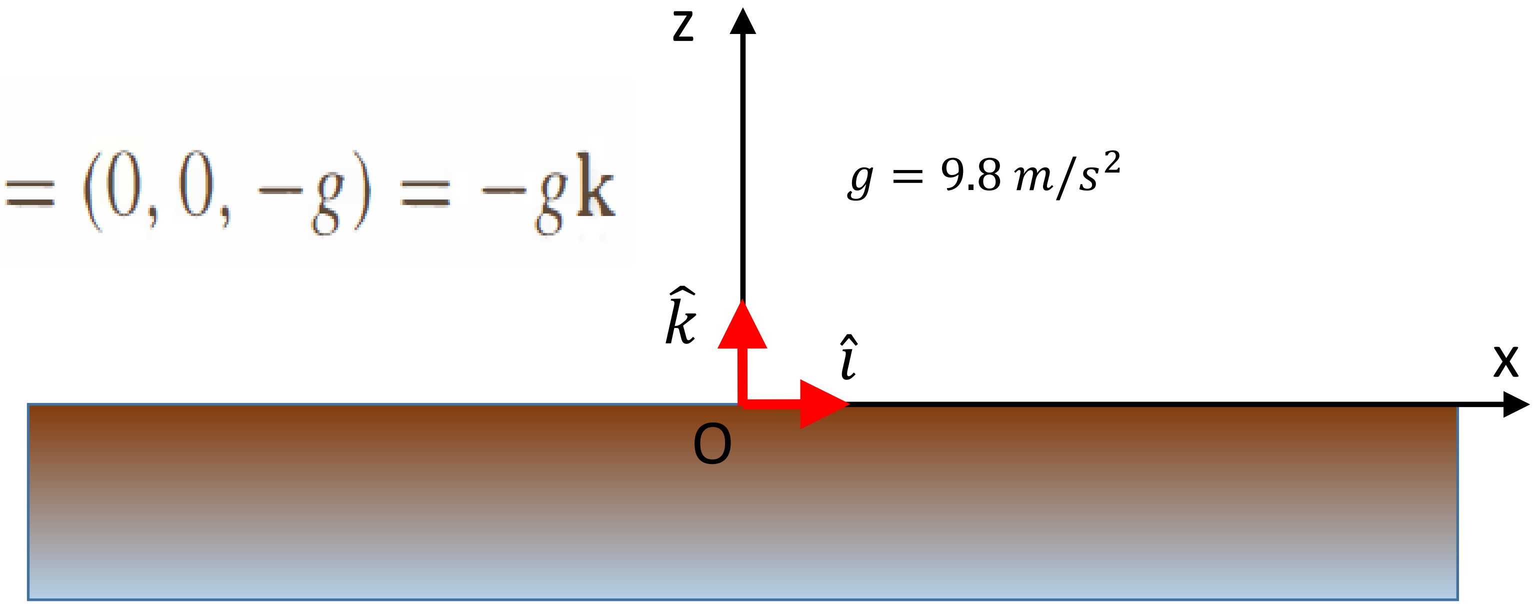
Noto il campo di accelerazione si risale a quella che è la velocita del punto materiale a meno di una costante iniziale che è determinata dallo sperimentatore, noto poi il campo di velocità si risale alla legge oraria a meno di una costante iniziale che altro non è che il punto di partenza, anch'esso fissato dallo sperimentatore. Nota la velocità iniziale e il punto di partenza iniziale il moto è completamente determinato.

Dall’accelerazione alla legge oraria: moto dei gravi.

Riferiamo il moto ad un sistema cartesiano trirettangolo levogiro con l'asse z diretto verticalmente verso l'alto e gli assi x e y in un piano orizzontale, ad esempio quello del suolo.

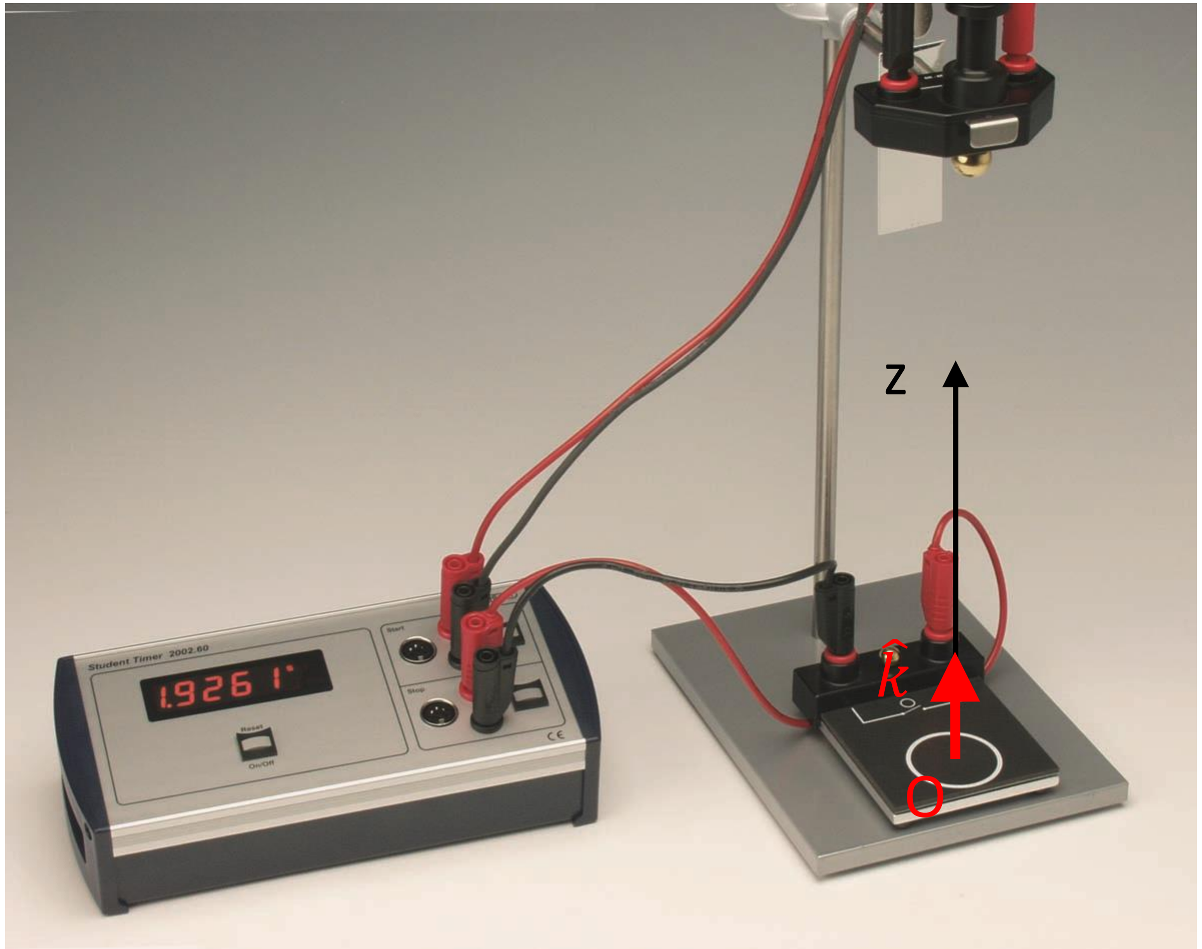


$$\mathrm{a} = (0, 0, -g) = -g\mathrm{k}$$



Il moto del corpo nel campo di accelerazione terrestre (un’accelerazione costante in tutti i punti della Terra) dipende dalle condizioni iniziali, cioè dalla posizione iniziale del corpo e dalla sua velocità iniziale.

Moto dei gravi: caduta di un corpo che parte da fermo.



$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = h$$
$$v_x(0) = 0, \qquad v_y(0) = 0, \qquad v_z(0) = 0\,.$$

$$\mathbf{a} = (0, 0, -g) = -g\mathbf{k}$$

Poiché l'accelerazione ha una sola componente non nulla (lungo z) e le velocità iniziali sono tutte identicamente nulle, il moto avviene solo ed esclusivamente lungo l'asse z.

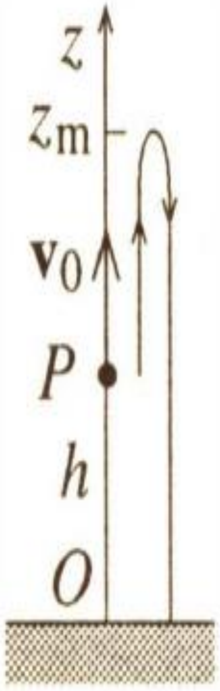
$$v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t a_z(t)\,dt = 0 - \int_0^t g\,dt = -gt\,.$$

$$z(t) = z(0) + \int_0^t v_z(t)\,dt = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Tempo impiegato a cadere $t_f = \sqrt{2h/g}$

Modulo della velocità con cui giunge sulla base $v_f = v(t_f) = \sqrt{2gh}$

Moto dei gravi: lancio in verticale di un corpo.



(a)

$$z(0) = h, \qquad v_z(0) = v_0$$

$$\mathbf{a} = (0, 0, -g) = -g\mathbf{k}$$

Poiché l'accelerazione ha una sola componente non nulla (lungo z) e solo la velocità iniziale lungo z è non nulla, il moto avviene solo ed esclusivamente lungo l'asse z.

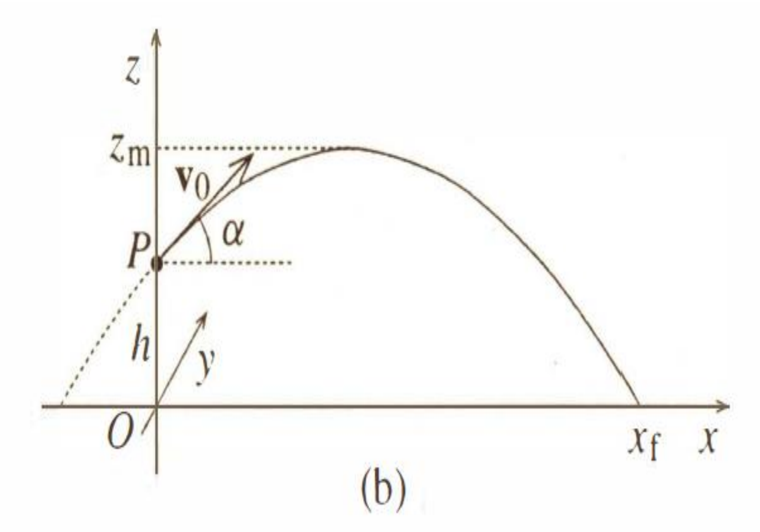
$$v_z(t) = v_0 - gt$$

$$z(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Tempo per raggiungere una certa quota $$t(z) = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2g(h - z)}}{g}$$

Se $v_0 > 0$ quota massima raggiunta $z_m = z(t_m) = h + v_0^2/(2g)$

Moto dei gravi: il moto del proiettile



$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = h$$

$$v_x(0) = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y(0) = 0, \qquad v_z(0) = v_0 \sin\alpha$$

$$\mathbf{a} = (0, 0, -g) = -g\mathbf{k}$$

Questa volta ho una velocità iniziale lungo x e lungo z. Lungo x non ho accelerazione, per cui il moto lungo quest'asse è un moto rettilineo uniforme. Lungo z ho il moto uniformemente accelerato studiato prima

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)t, \qquad z(t) = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h$$

Ho x in funzione del tempo x(t), z in funzione del tempo z(t), trovo la traiettoria z(x) ricavando t in funzione di x, t(x) e sostituendolo nell'espressione per la z, ottenendo così z(x). La traiettoria è una parabola. Se l'angolo α è zero, cioè la velocità iniziale è orizzontale, il tempo che ci impiega il punto materiale a cadere è lo stesso indipendentemente dalla velocità iniziale.