Scalari e vettori

Esempi di grandezze scalari: massa, temperatura, pressione, carica elettrica…. Sono rappresentate da un numero e la corrispondente unità di misura. Sono invarianti se passo da un sistema di riferimento ad un altro (Attenzione, cambiare sistema di riferimento non vuol dire cambiare il Sistema Internazionale delle unità di misura)

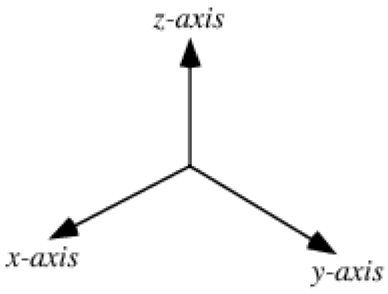
Esempi di grandezze vettoriali: velocità, forza, posizione…. Non basta un numero, serve un numero detto modulo del vettore, una direzione, un verso e la corrispondente unità di misura.

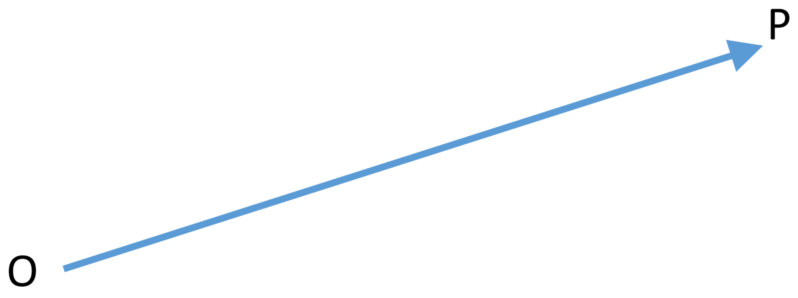
Due vettori, riferiti alla stessa grandezza si dicono equipollenti, se hanno la stessa grandezza la stessa direzione e lo stesso verso. In pratica sono lo stesso vettore di quella grandezza fisica.

I vettori sono rappresentati da una terna di numeri e se cambio gli assi del mio sistema di riferimento, questa terna cambia secondo regole stabilite.

Il raggio vettore

Vettore posizione di un punto P rispetto ad un punto O





Se ruoto gli assi di un sistema di riferimento la terna di numeri che rappresenta questo vettore cambia, se traslo gli assi la terna non cambia.

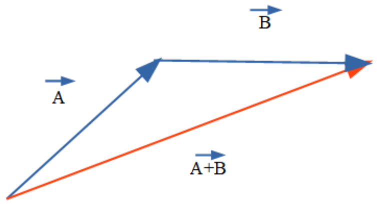
Attenzione che io non considero la posizione del punto P rispetto all’origine del mio sistema di riferimento ma di un punto O specifico nello spazio. Ad esempio il punto P potrebbe essere la maniglia di una porta e il punto O un suo cardine. L’origine del sistema di riferimento potrebbe essere il mio punto di osservazione.

Altro sarebbe considerare la posizione del punto P (maniglia della porta) rispetto a me o a ciascuno delle altre persone presenti nella stanza.

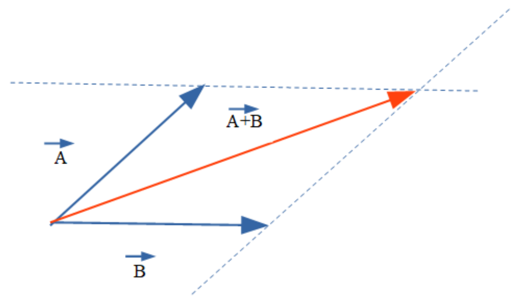
Operazioni con i vettori

SOMMA VETTORIALE

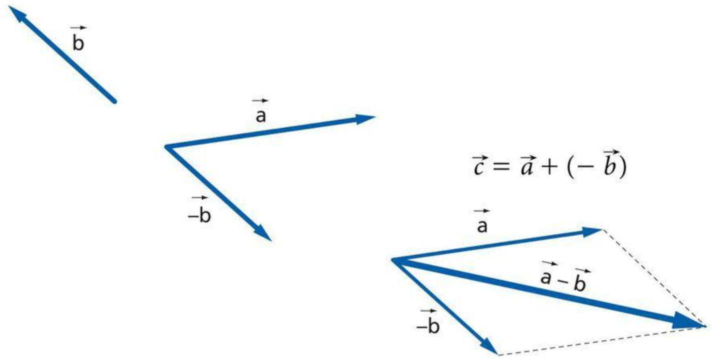
METODO PUNTA-CODA



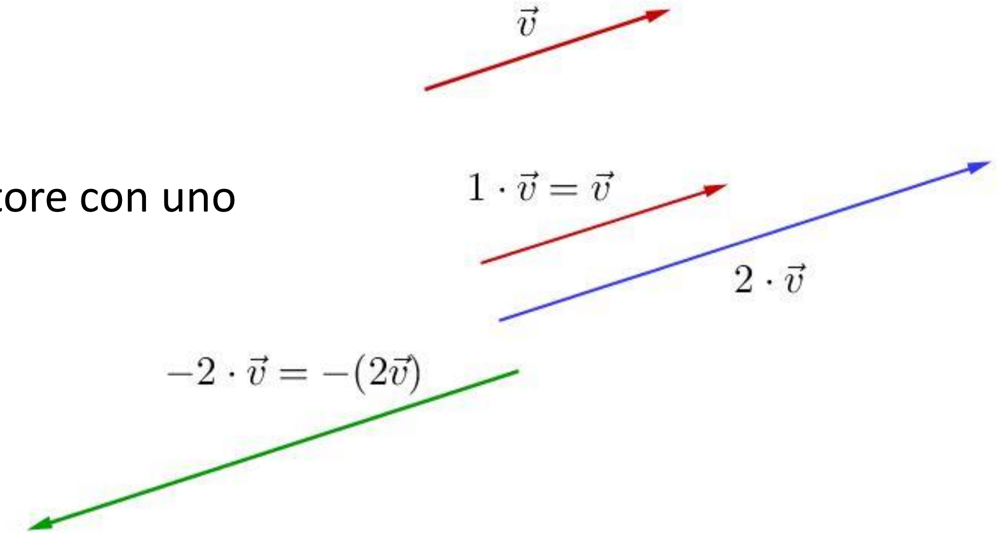
METODO DEL PARALLELOGRAMMA



Differenza di due vettori



Prodotto di un vettore con uno scalare

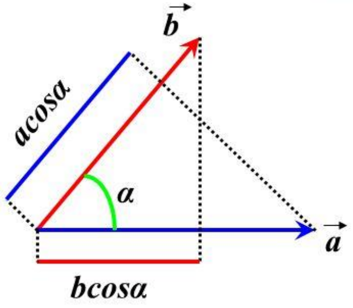


Il prodotto scalare di due vettori

Prodotto scalare

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è una grandezza scalare definita nel modo seguente:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos\alpha$$



Il prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un numero che è pari al prodotto del modulo di $\vec{a}$ per la componente di $\vec{b}$ lungo la direzione di $\vec{a}$

Ovviamente il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è anche pari al prodotto del modulo di $\vec{b}$ per la componente di $\vec{a}$ lungo la direzione di $\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |a|^2$$

Il prodotto scalare di due vettori è una quantità scalare che gode della proprietà di essere invariate se ruoto o traslo gli assi di riferimento.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

Proprietà commutativa

$$\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

Proprietà distributiva rispetto alla somma

Il prodotto vettoriale di due vettori

$$\vec{A}\times\vec{B} = det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

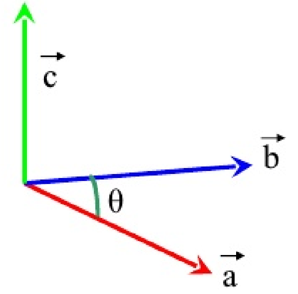
$$= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

Il prodotto vettoriale di due vettori è un vettore ed in effetti se applico delle roto-traslazioni si trasforma come un vettore.

Prodotto vettoriale

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore che gode delle proprietà seguenti:

- il modulo di $\vec{c}$ è dato da $ab\sin\theta$, dove θ è l'angolo minore di 180° compreso tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- la direzione di $\vec{c}$ è perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$
- il verso di $\vec{c}$ è calcolato applicando la regola della mano destra



Il modulo del prodotto vettore è l'area del parallelogramma che formano $\vec{a}$ e $\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$ Non gode della proprietà commutativa

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$ Proprietà distributiva rispetto alla somma

Il prodotto misto e il triplo prodotto vettore

$\vec{a}\cdot\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ Prodotto misto: Volume del parallelepipedo che ha per lati i tre vettori

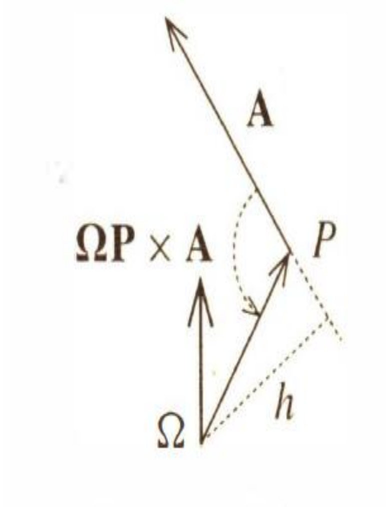
$\vec{a}\cdot\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{c}\cdot\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ Prodotto misto: non cambia se mutano circolarmente i tre vettori

$\vec{a}\cdot(\vec{a} \times \vec{c})=0$ Prodotto misto: nullo se i 3 vettori sono complanari, in particolare se due sono uguali tra loro

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

Vettore applicato e momento della forza

Se si spinge un oggetto con una mano, non solo esercitiamo una forza di intensità, direzione e verso ben definiti ma la esercitiamo anche in un punto ben definito. Le forze vengono dette quindi vettori applicati.

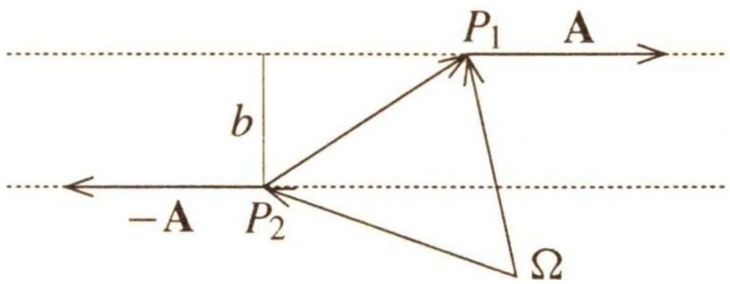


$$\tau_\Omega = \Omega P \times A \, .$$

Momento di $\vec{A}$ rispetto a Ω

Esempio.
Punto di applicazione della forza: maniglia della porta.
Polo: cardine della porta

Coppia



Quando ruoto il volante con le mani in posizione 9: 15 applico una coppia al volante. La sinistra applica una forza verso l'alto e la destra una uguale e contraria verso il basso.

Il moto di un punto materiale

Quando consideriamo il moto di un corpo, trascurando le rotazioni su se stesso o il moto di una parte di esso rispetto ad un’altra, possiamo approssimare tale corpo con un punto materiale.

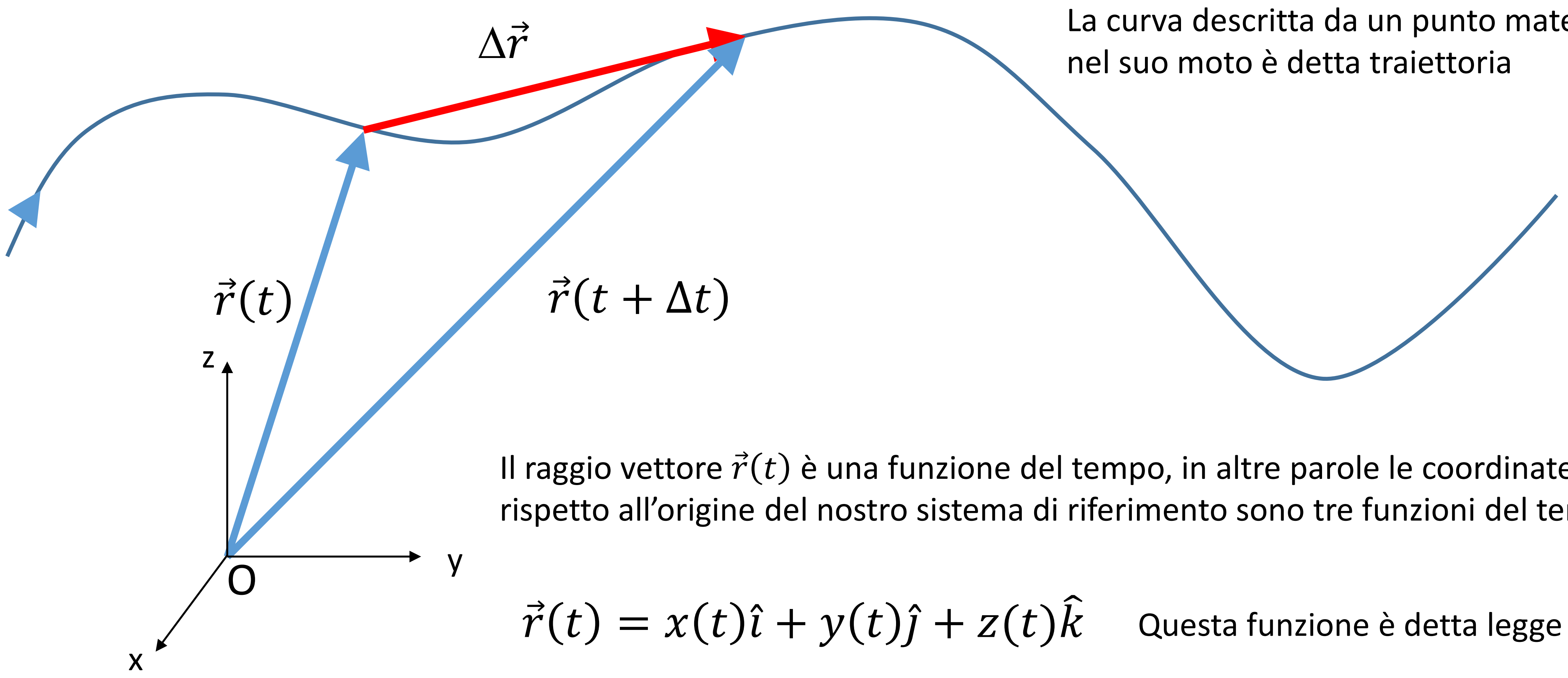
Un punto materiale è sempre e comunque un oggetto macroscopico, la fisica microscopica non segue le leggi della meccanica classica.

La possibilità di approssimare un corpo con un punto materiale non dipende solo dalle sue dimensioni assolute, ma anche dalle posizioni e dalle dimensioni degli altri corpi.

Quando descrivo il moto della Terra attorno al Sole (moto di rivoluzione) in certi casi, posso approssimare la Terra ad un punto materiale. Perdo ovviamente la capacità di spiegare l’alternanza delle stagioni che è dovuta all’inclinazione dell’asse terrestre rispetto all’orbita di rivoluzione. Quando parlo della rotazione della Terra su se stessa non posso in alcun modo considerarla un punto materiale.

Il moto di una nave in mare aperto può essere sufficiente descriverlo con il moto di un punto materiale, quando entra in porto è necessario sapere le posizioni delle sue parti.

Traiettoria, legge oraria, velocità media e velocità istantanea di un punto materiale.



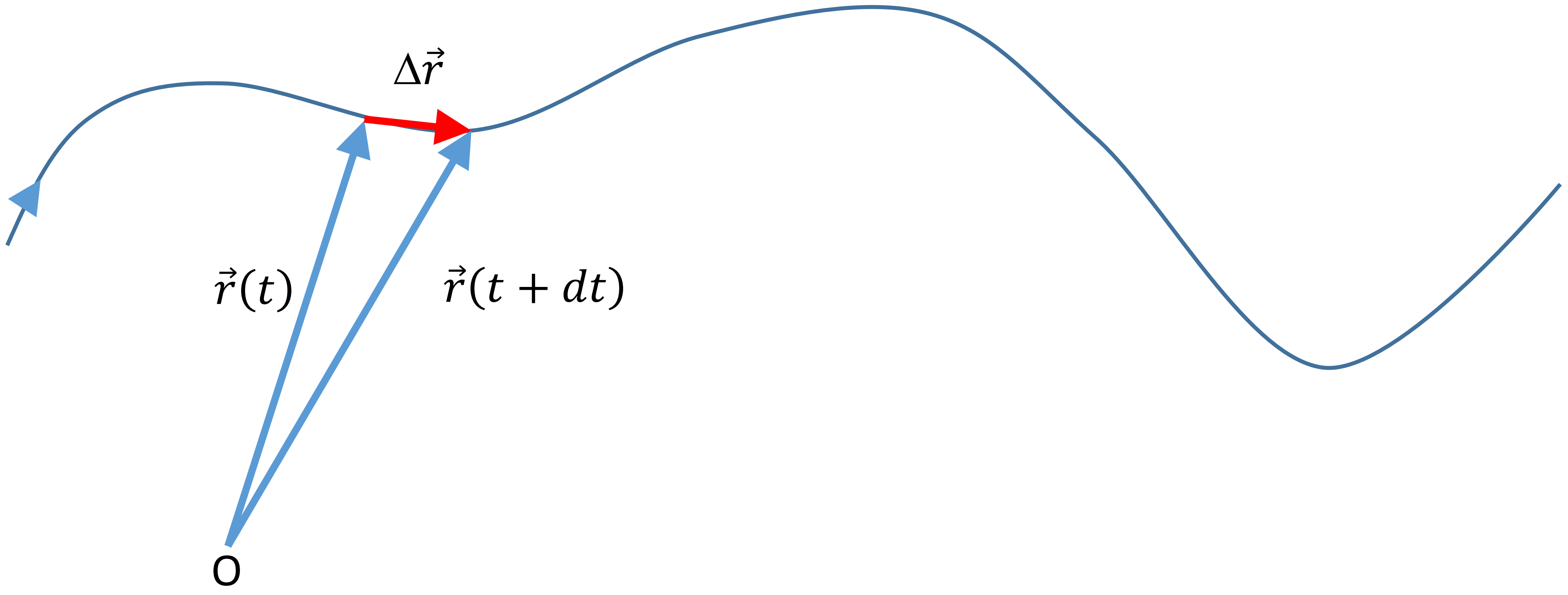
La curva descritta da un punto materiale nel suo moto è detta traiettoria

Il raggio vettore $\vec{r}(t)$ è una funzione del tempo, in altre parole le coordinate del punto rispetto all'origine del nostro sistema di riferimento sono tre funzioni del tempo.

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$ Questa funzione è detta legge oraria

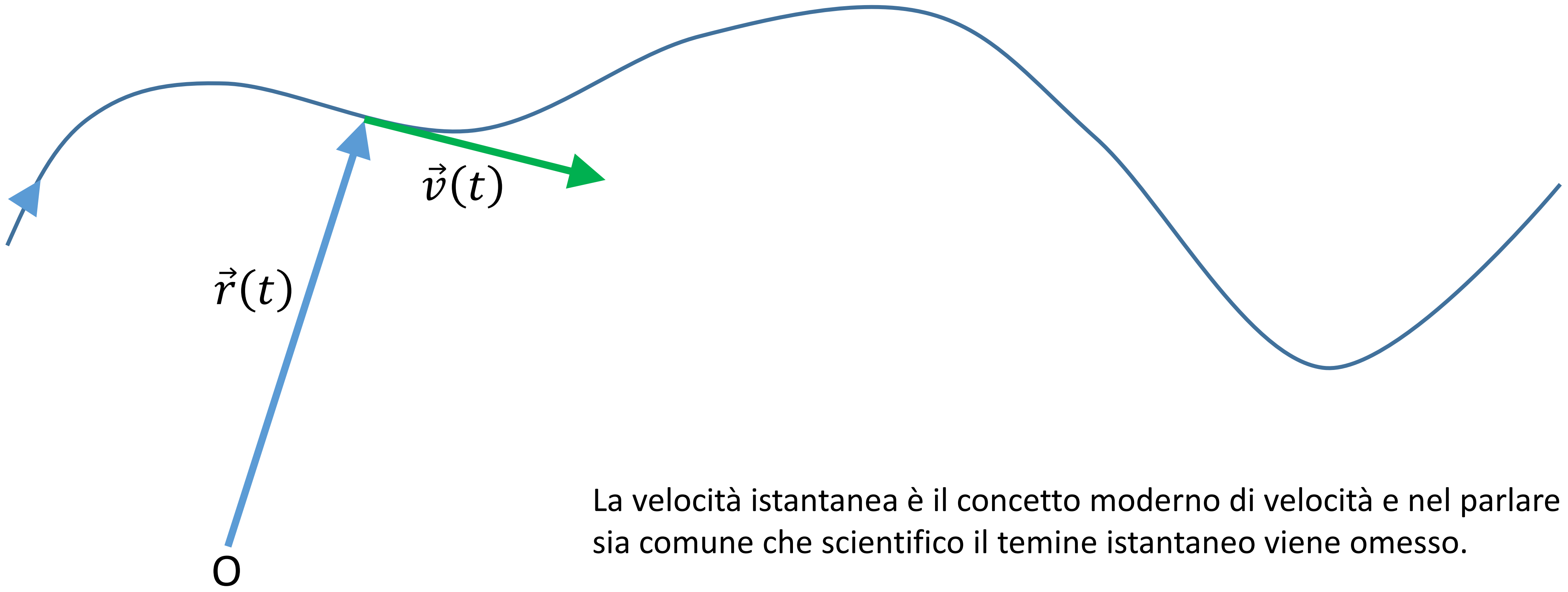
$$\vec{v}_{media} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \hat{\imath}\,\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \hat{\jmath}\,\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} + \hat{k}\,\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

Traiettoria velocità media e velocità istantanea di un punto materiale.



Posso considerare intervalli di tempo Δt via via più piccoli quando $\Delta t \rightarrow 0$ si arriva alla definizione di velocità istantanea

Traiettoria velocità media e velocità istantanea di un punto materiale.



La velocità istantanea è il concetto moderno di velocità e nel parlare sia comune che scientifico il temine istantaneo viene omesso.

$$\vec{v}_{istantanea} = \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{\imath}\frac{dx(t)}{dt} + \hat{\jmath}\frac{dy(t)}{dt} + \hat{k}\frac{dz(t)}{dt}$$

Moto uniforme e moto rettilineo uniforme (osservo un moto, ne deduco la velocità istantanea)

Se il modulo della velocità è costante, il moto si dice uniforme.

Es: corridore lanciato sui 100 m piani

Se il vettore velocità è costante (cioè sono costanti il modulo, la direzione e il verso del vettore) abbiamo a che fare con il moto rettilineo uniforme.

Esempi di legge oraria per il moto rettilineo uniforme

$$\vec{r}(t) = (b \cdot t + c)\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

Dove $[b] = \frac{m}{s}$ e $[c] = m$

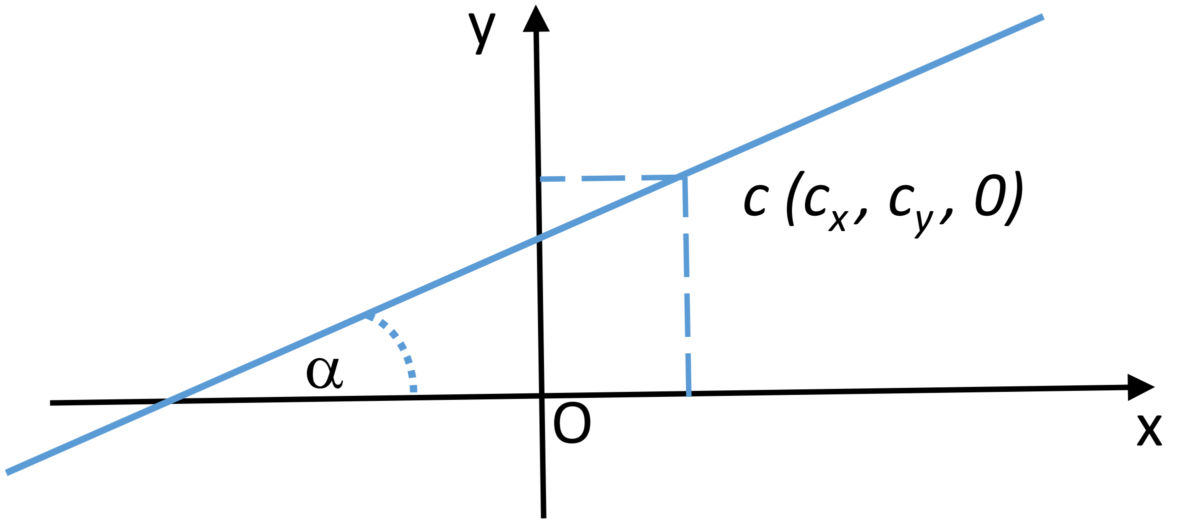
Al tempo t=0 il punto materiale si trova in c (nel disegno si è assunto $c > 0$), se $b > 0$ la posizione del punto varia andando verso coordinate x maggiori se $b < 0$ succede l'opposto.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{\imath}\,\frac{dx(t)}{dt} + \hat{\jmath}\,\frac{dy(t)}{dt} + \hat{k}\,\frac{dz(t)}{dt} = b\,\hat{\imath}$$

Moto uniforme e moto rettilineo uniforme (osservo un moto, ne deduco la velocità istantanea)

$$\vec{r}(t) = (b_x \cdot t + c_x)\,\hat{\imath} + \left(b_y \cdot t + c_y\right)\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

Es: nave che viaggia verso nord-est



Per trovare la traiettoria divido la distanza percorsa lungo y al generico istante t diviso la quantità analoga lungo x

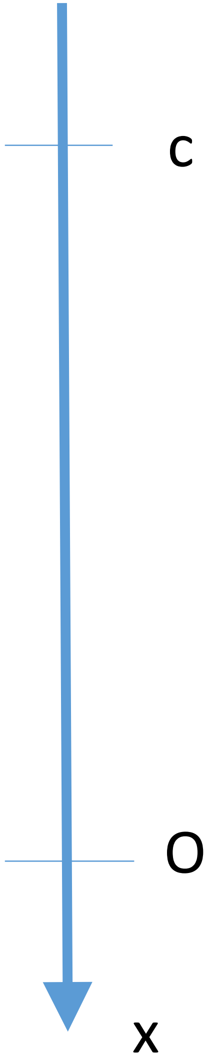
$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{b_y}{b_x}$$

Il rapporto calcolato risulta costante. Ciò significa che la traiettoria è una retta che passa per il punto c e forma con l'asse x un angolo $\alpha = ArcTan\left[\frac{b_y}{b_x}\right]$

Nel disegno si è assunto che il rapporto $\frac{b_y}{b_x}$ sia positivo. Se b_y e b_x sono positivi il punto si muove verso gli x e gli y crescenti, se b_y e b_x sono negativi, il contrario.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{\imath}\,\frac{dx(t)}{dt} + \hat{\jmath}\,\frac{dy(t)}{dt} + \hat{k}\,\frac{dz(t)}{dt} = b_x\,\hat{\imath} + b_y\,\hat{\jmath}$$

Moto in caduta libera (osservo un moto, ne deduco la velocità istantanea)



Questa legge oraria fu studiata da Galileo

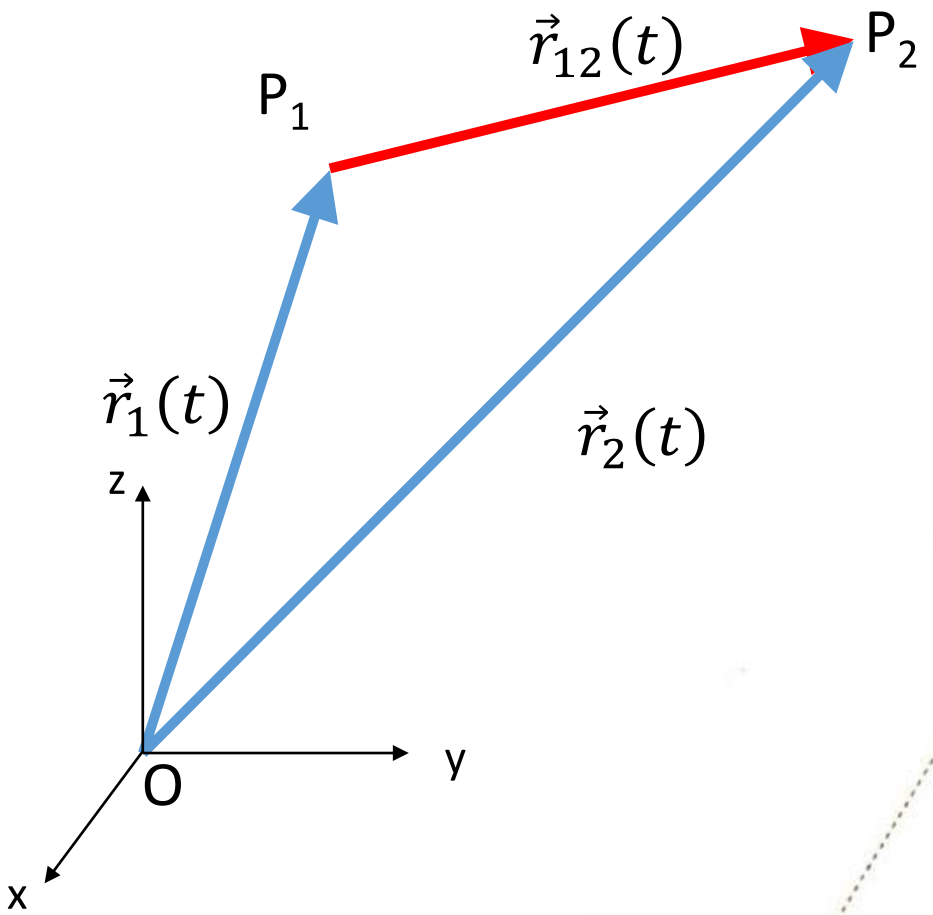
$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2} g \cdot t^2 + b \cdot t + c\right) \hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

Dove $[g] = \frac{m}{s^2}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \hat{\imath}\,\frac{dx(t)}{dt} + \hat{\jmath}\,\frac{dy(t)}{dt} + \hat{k}\,\frac{dz(t)}{dt} = (g \cdot t + b)\,\hat{\imath}$$

La velocità relativa.

$$\vec{r}_{12}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$$



Sia $\vec{r}_1(t)$ il raggio vettore di un punto materiale P_1 e $\vec{r}_2(t)$ il raggio vettore di un punto materiale P_2, entrambi in moto nello spazio. Il vettore $\vec{r}_{12}(t)$ denota la posizione del punto materiale P_2 rispetto al punto materiale P_1

$$\vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_2(t)}{dt} - \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$\vec{v}_{12}$ è la velocità di P_2 rispetto a P_1 cioè la velocità di P_2 vista da un osservatore che viaggi solidale a P_1