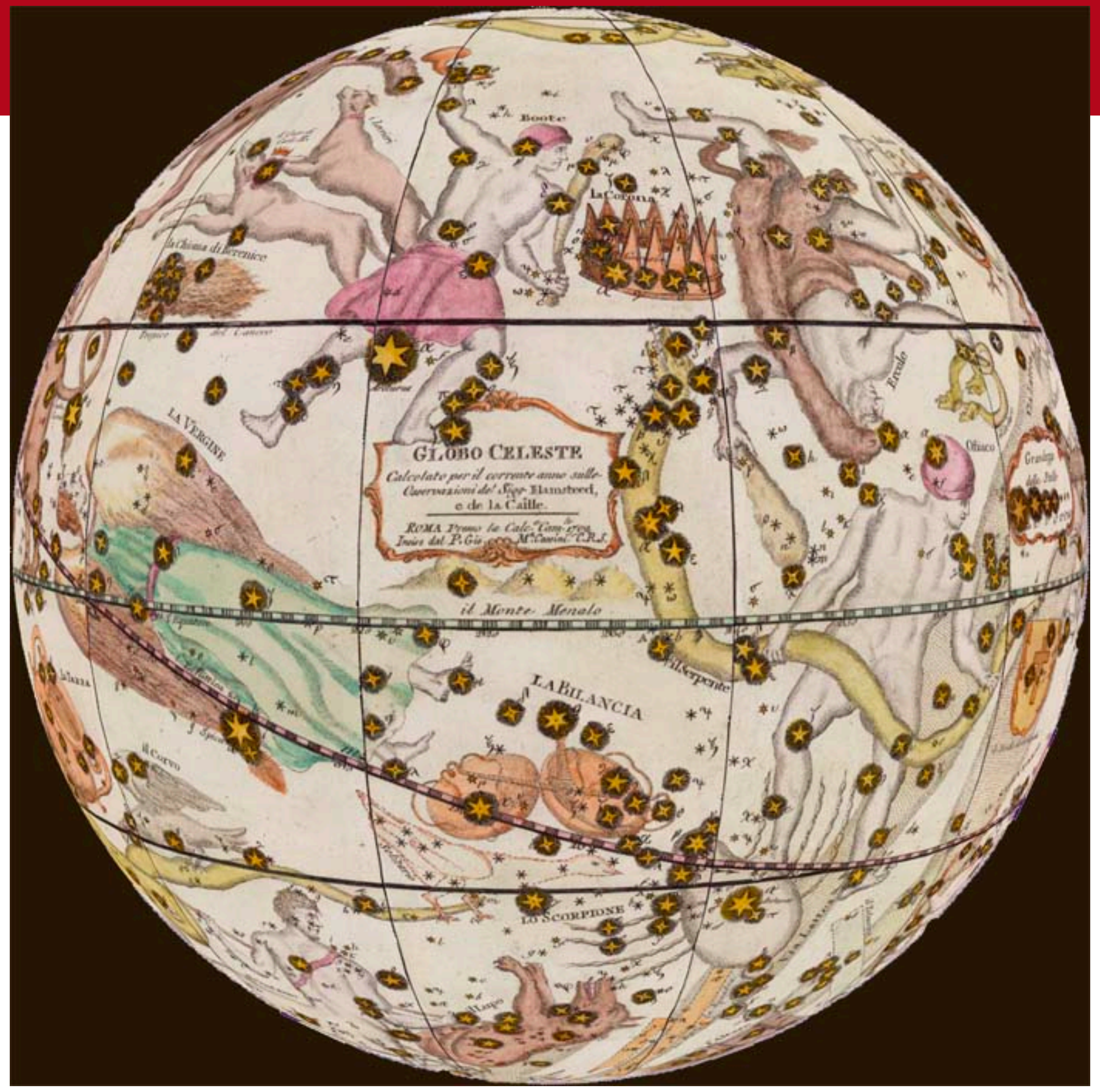
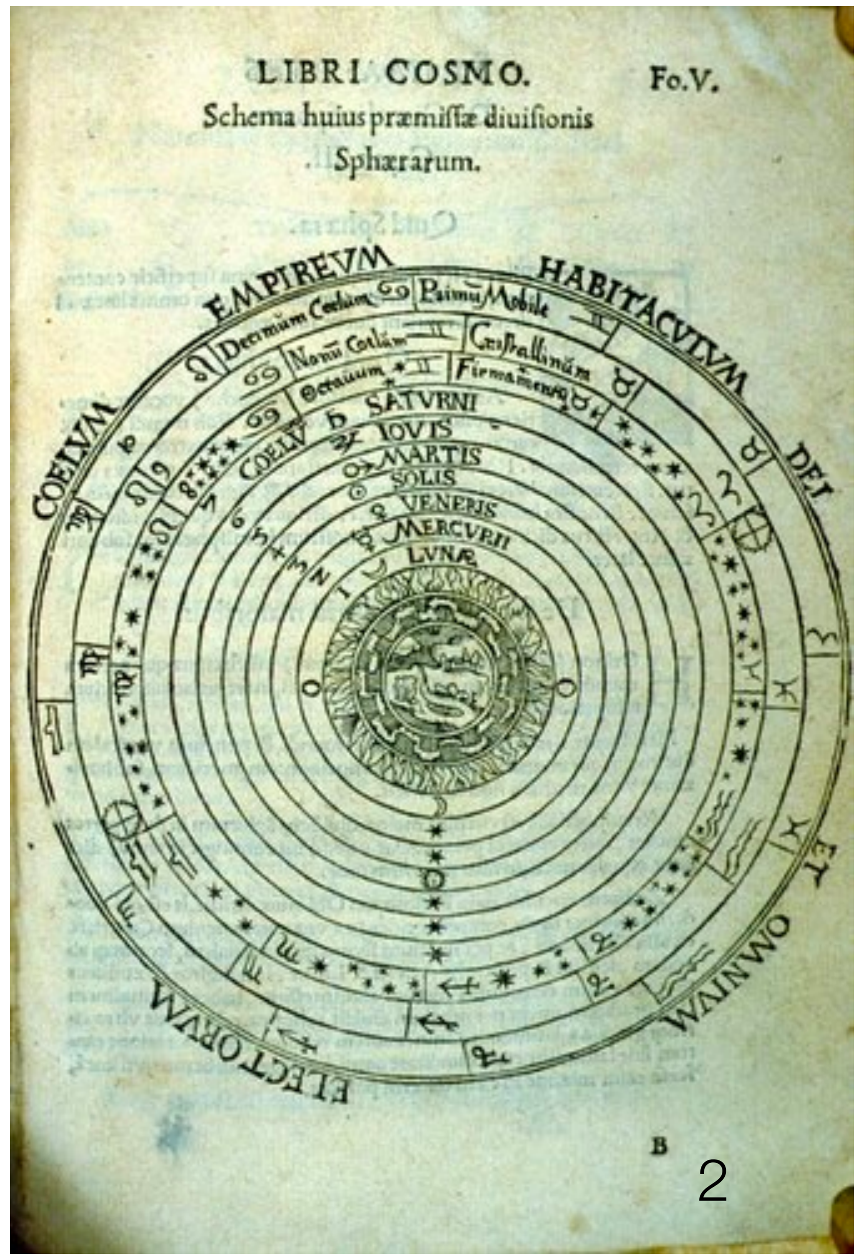
Astronomia sferica (1)

Argomento 1

Materiale da
Cap. 2 “Fundamental Astronomy” edition, by H. Karttunen, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner
Cap. 2&S1 “The cosmic perspective”, by J. O. Bennett, M. O. Donahue, N. Schneider & M. Voit

La sfera celeste



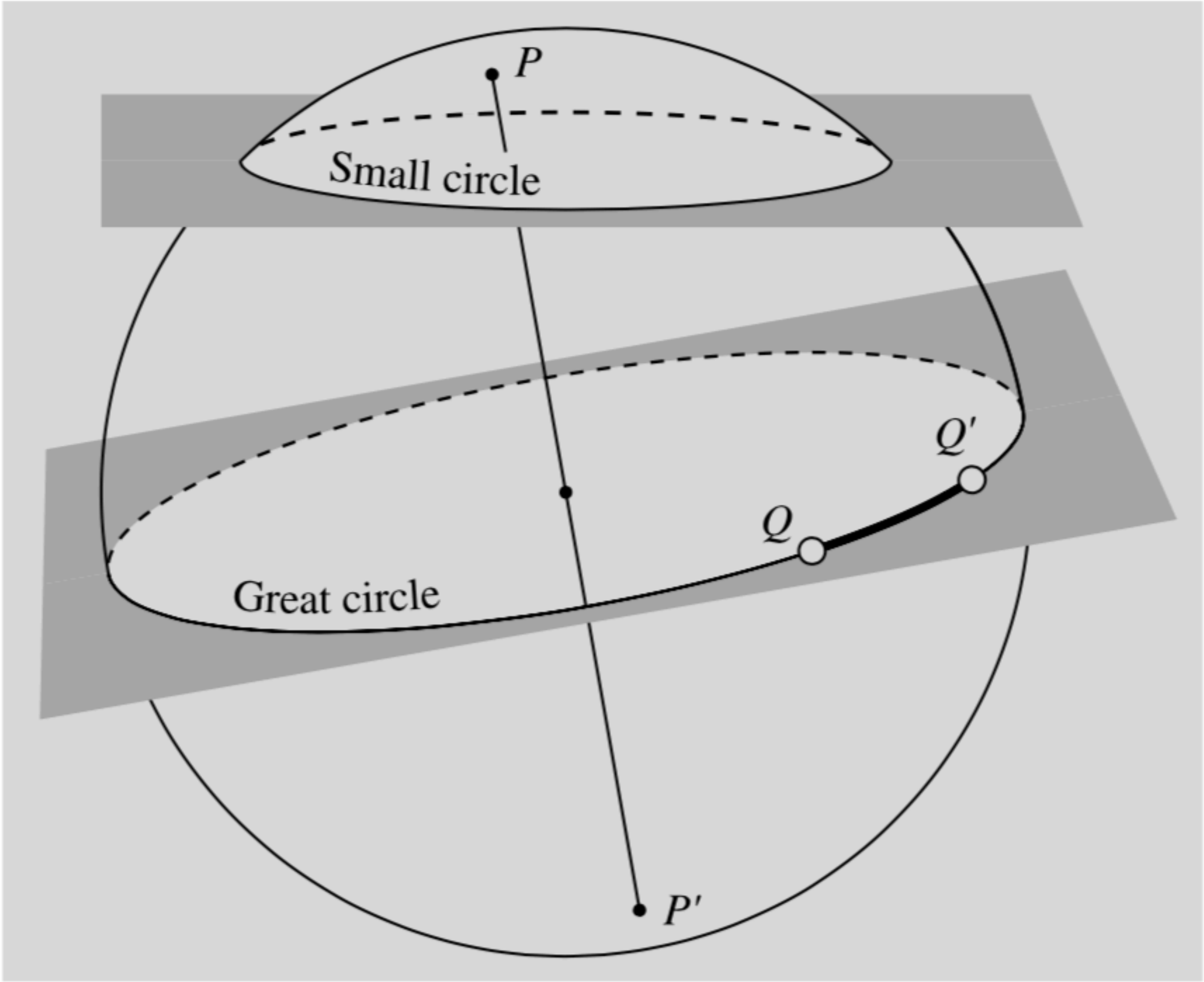


Le stelle e gli astri appaiono disposti su una sfera; pertanto lo studio della loro posizione e del loro moto è basato su trigonometria sferica

Ci interessano solo le direzioni in cui ci appaiono le stelle, non conosciamo (e qui non ci interessano) le distanze

Quindi ci bastano due coordinate per identificare i punti sulla sfera celeste

Trigonometria sferica

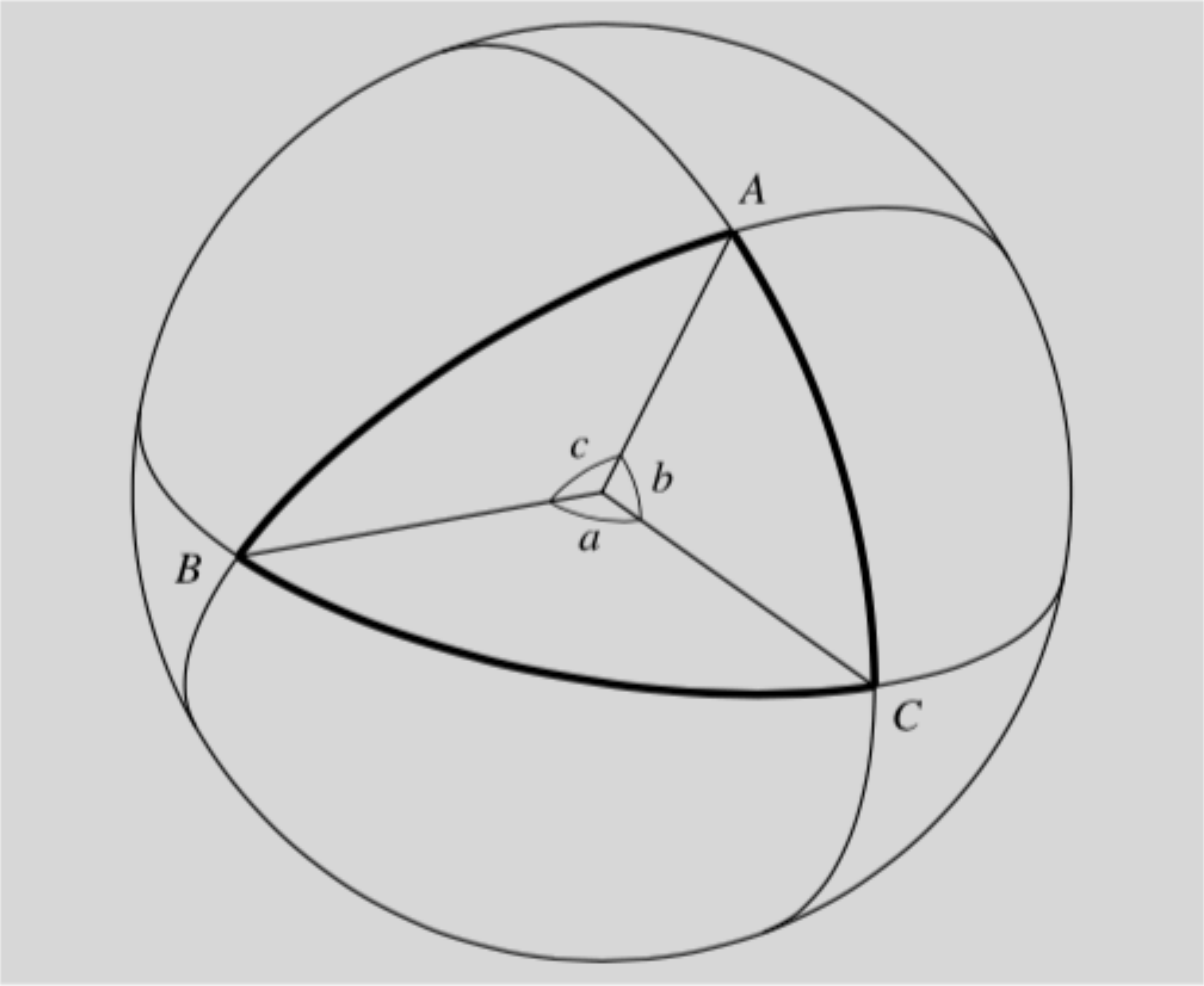


Cerchio massimo
Intersezione tra sfera e piano passante per il suo centro

- una retta perpendicolare a questo passante per il centro intercetta la sfera nei poli

Cerchio minore
Intersezione tra sfera e piano non contenente il suo centro

Trigonometria sferica



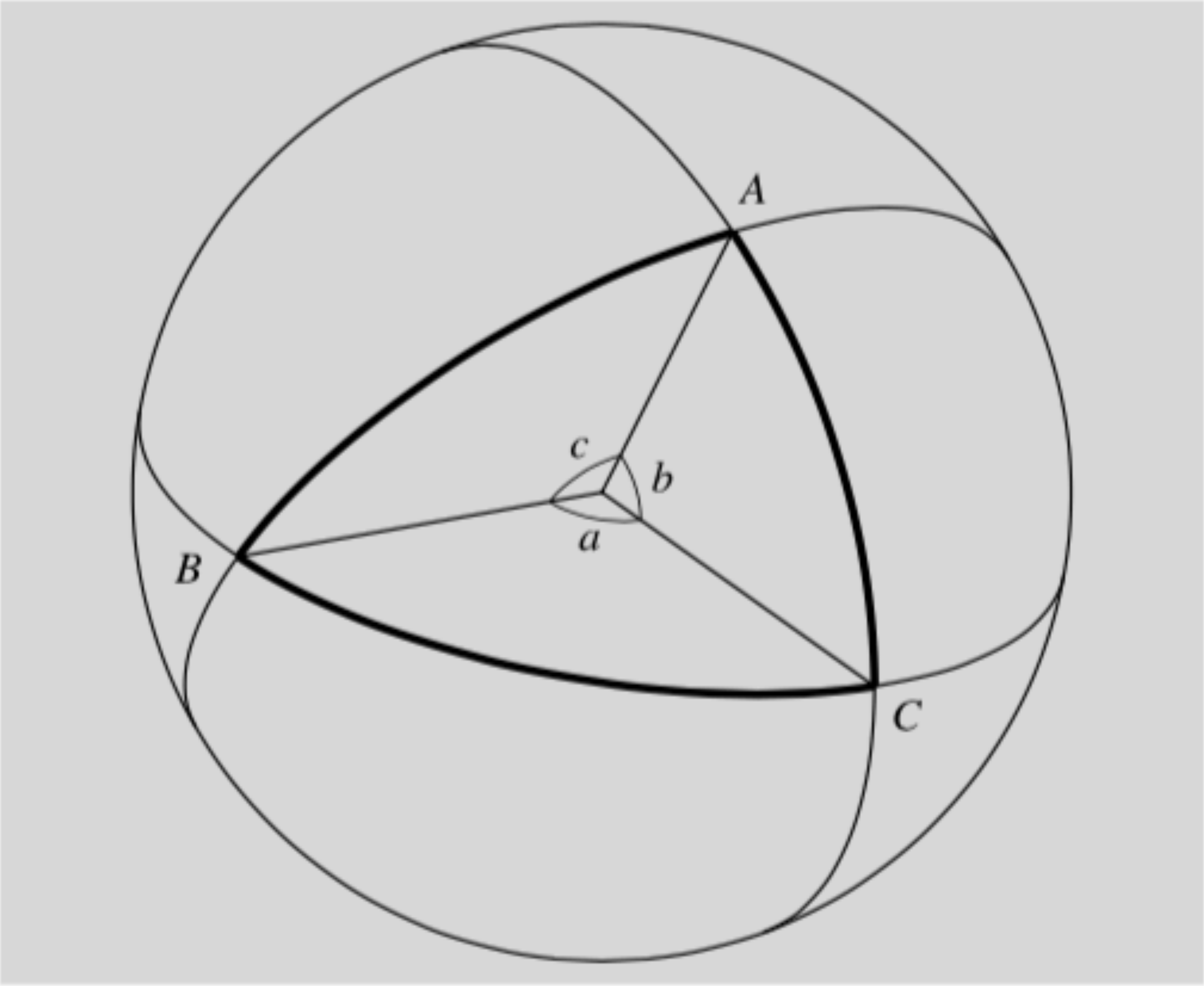
Triangolo sferico
Porzione di sfera definita da 3 cerchi massimi

$$|AB| = rc \qquad [c] = rad$$

c angolo centrale, *r* raggio della sfera

Corrispondenza bi-univoca tra |AB| e *c*; quindi di solito si usa l'angolo per indicare la distanza tra A e B; *r* raggio della sfera non entra nelle equazioni

Trigonometria sferica



Triangolo sferico

A, B, C: angoli triangolo sferico; *a, b, c*: angoli centrali corrispondenti

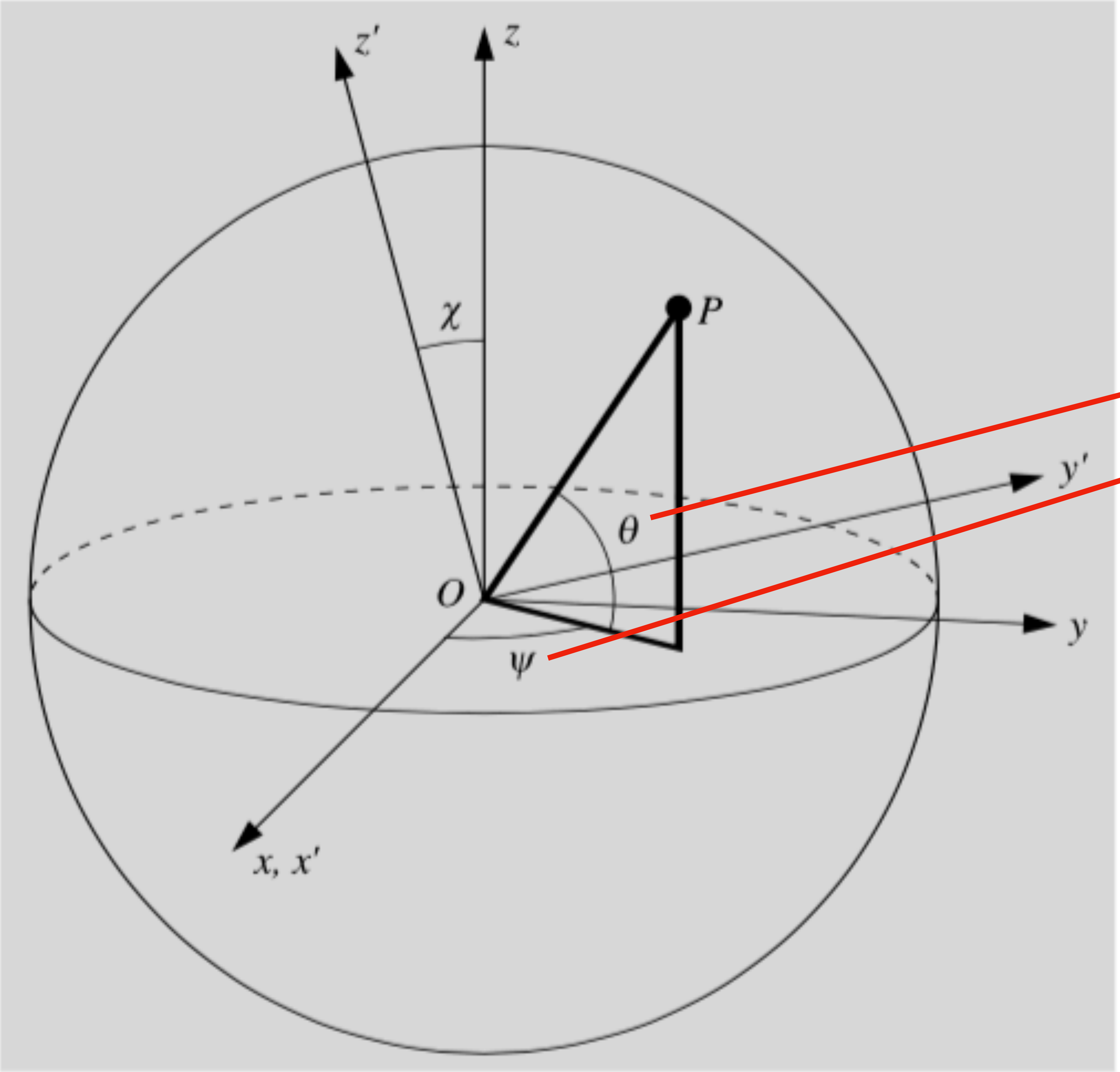
$$A + B + C > 180°;$$

$$E = A + B + C - 180°$$

E eccesso sferico

$$\mathrm{Area}(ABC) = Er^2 \qquad [E] = rad$$

Trigonometria sferica



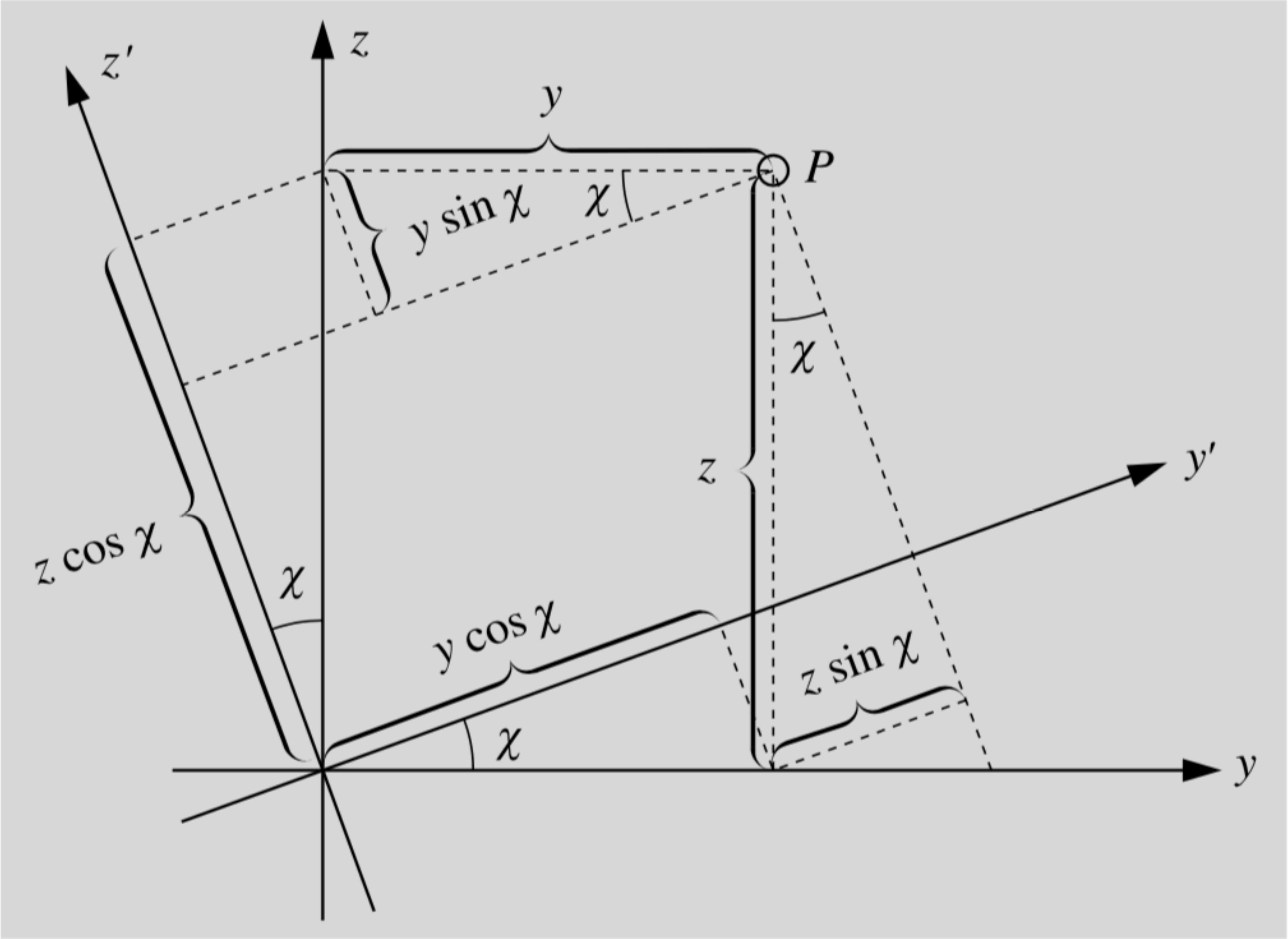
Posizione di un punto P sulla sfera
- coordinate cartesiane *x, y, z;*
- 2 angoli *ψ, θ*

θ distanza dal piano *xy*
ψ antiorario partendo dall'asse positivo *x*;

Consideriamo il sistema *x', y', z'*, ruotato intorno all'asse *x* di un angolo χ
- coordinate cartesiane *x', y', z';*
- 2 angoli *ψ', θ'*

$$x = \cos\psi\cos\theta \qquad x' = \cos\psi'\cos\theta'$$
$$y = \sin\psi\cos\theta \qquad y' = \sin\psi'\cos\theta'$$
$$z = \sin\theta \qquad z' = \sin\theta'$$

Trigonometria sferica



Trasformazione tra sistema *x,y,z* e *x',y',z'*

$$x = x'$$

$$y' = y\cos\chi + z\sin\chi$$

$$z' = z\cos\chi - y\sin\chi$$

$$x = \cos\psi\cos\theta \qquad x' = \cos\psi'\cos\theta'$$

$$y = \sin\psi\cos\theta \qquad y' = \sin\psi'\cos\theta'$$

$$z = \sin\theta \qquad z' = \sin\theta'$$

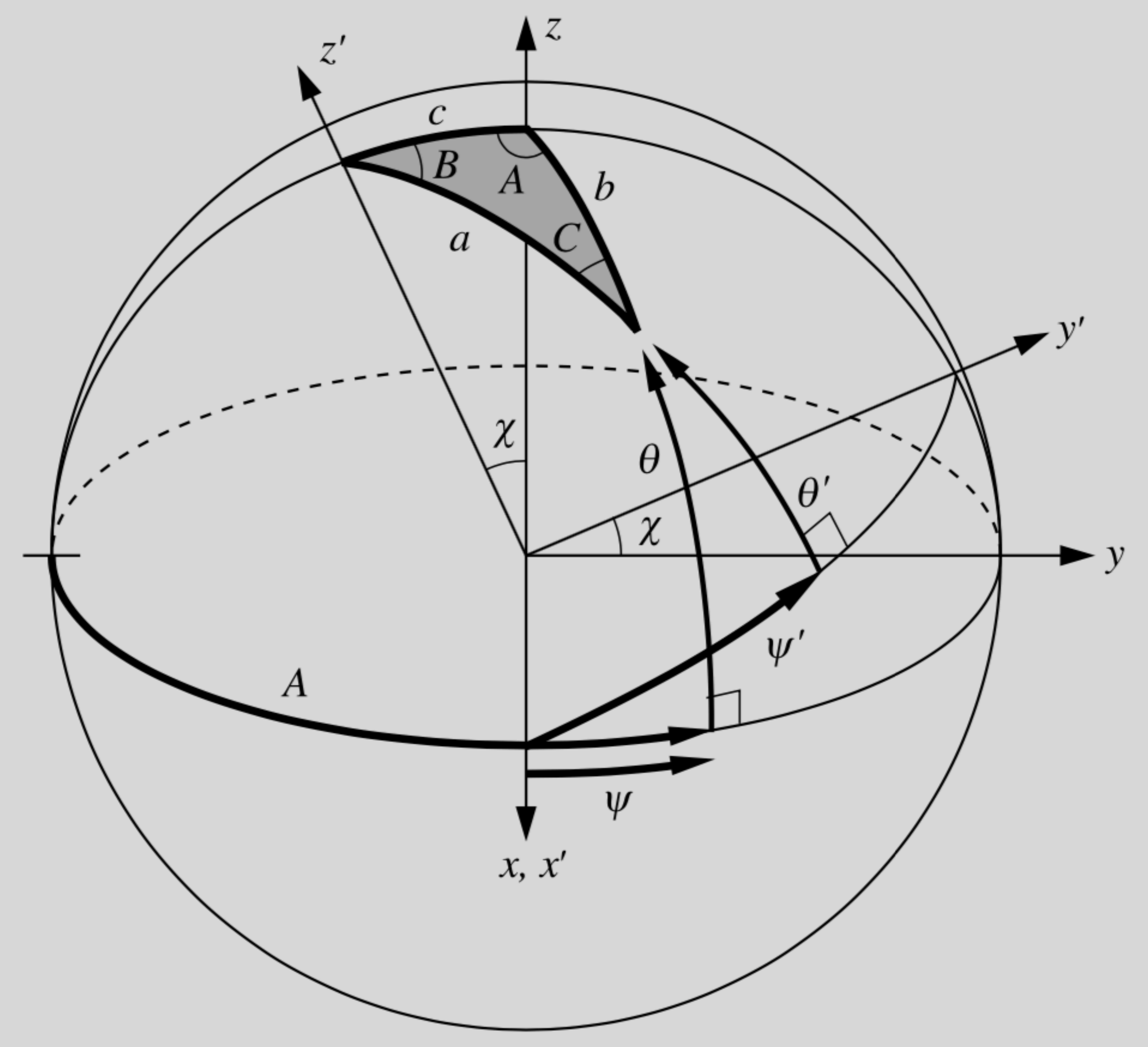
$$\cos\psi'\cos\theta' = \cos\psi\cos\theta$$

$$\sin\psi'\cos\theta' = \sin\psi\cos\theta\cos\chi + \sin\theta\sin\chi$$

$$\sin\theta' = \sin\theta\cos\chi - \sin\chi\sin\psi\cos\theta$$

Utili per trasformazioni di coordinate che vedremo dopo

Trigonometria sferica



Come prima, consideriamo 2 sistemi di coordinate *x,y,z* e *x',y',z'*

z punta verso A, *z'* punta verso B

Abbiamo:

$$\psi = A - 90^\circ \qquad \theta = 90^\circ - b \qquad \chi = c$$

$$\psi' = 90^\circ - B \qquad \theta' = 90^\circ - a$$

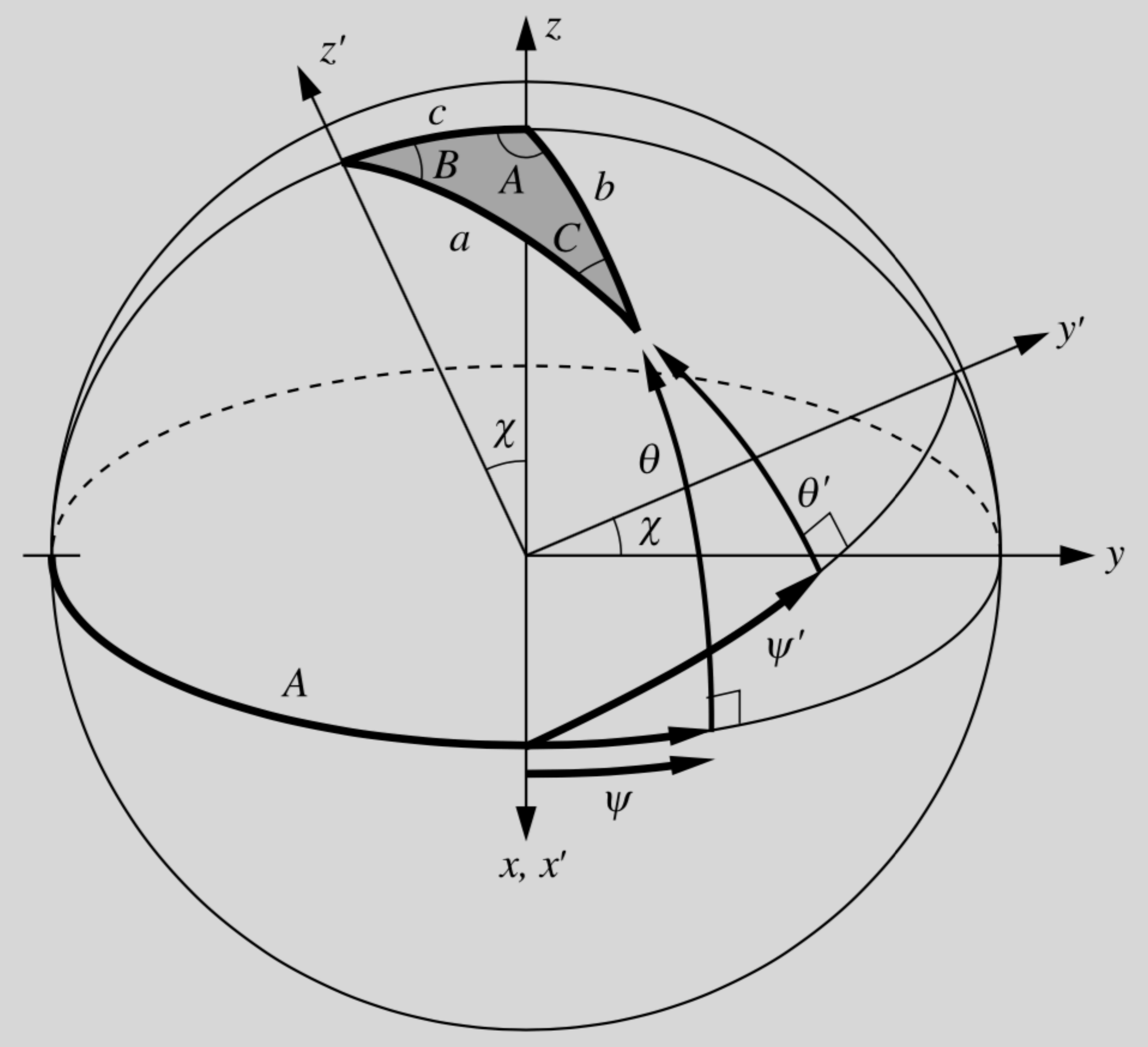
Sostituiamo in

$$\cos\psi'\cos\theta' = \cos\psi\cos\theta$$

$$\sin\psi'\cos\theta' = \sin\psi\cos\theta\cos\chi + \sin\theta\sin\chi$$

$$\sin\theta' = \sin\theta\cos\chi - \sin\chi\sin\psi\cos\theta$$

Trigonometria sferica



Otteniamo:

$$\cos(90^\circ - B)\cos(90^\circ - a)$$

$$= \cos(A - 90^\circ)\cos(90^\circ - b),$$

$$\sin(90^\circ - B)\cos(90^\circ - a)$$

$$= \sin(A - 90^\circ)\cos(90^\circ - b)\cos c$$

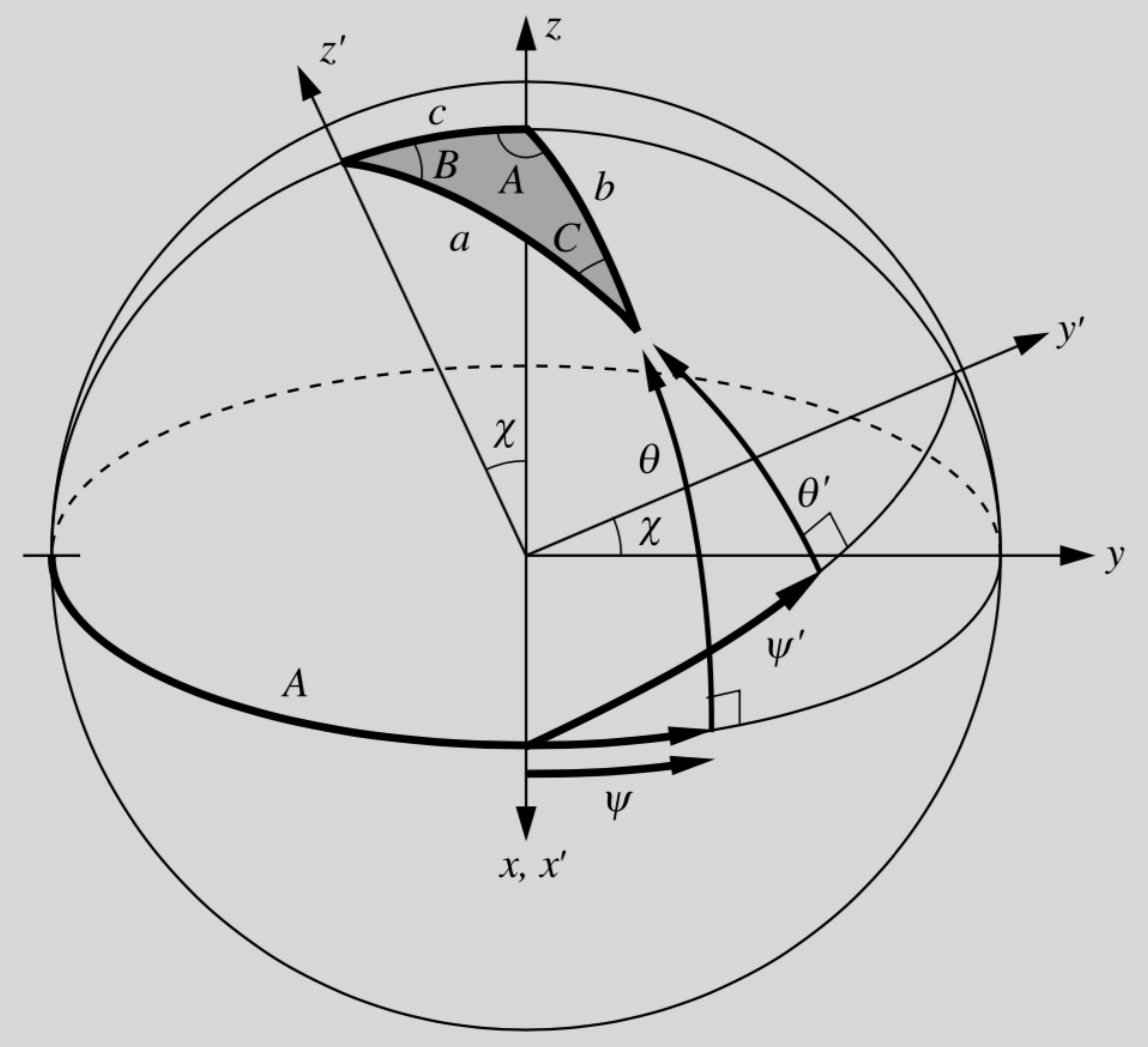
$$+ \sin(90^\circ - b)\sin c,$$

$$\sin(90^\circ - a)$$

$$= -\sin(A - 90^\circ)\cos(90^\circ - b)\sin c$$

$$+ \sin(90^\circ - b)\cos c,$$

Trigonometria sferica



e quindi:

$$\sin B \sin a = \sin A \sin b,$$

$$\cos B \sin a = -\cos A \sin b \cos c + \cos b \sin c,$$

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c.$$

permutando gli angoli si ottiene, ad esempio dalla prima equazione:

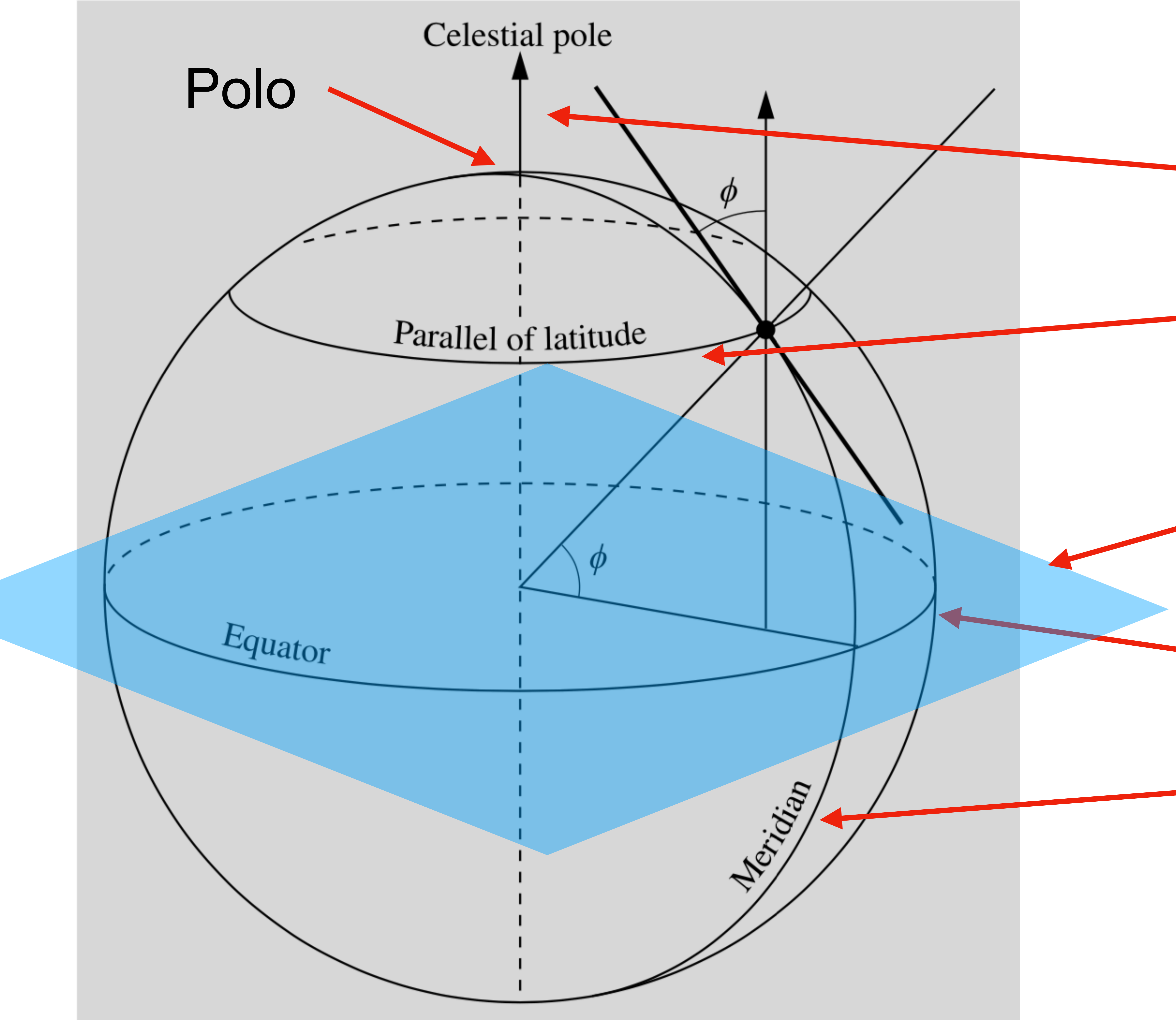
$$\sin C \sin b = \sin B \sin c,$$

$$\sin A \sin c = \sin C \sin a.$$

e quindi $$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

utili per calcolare distanze tra punti sulla sfera

La terra



Polo

Asse di rotazione

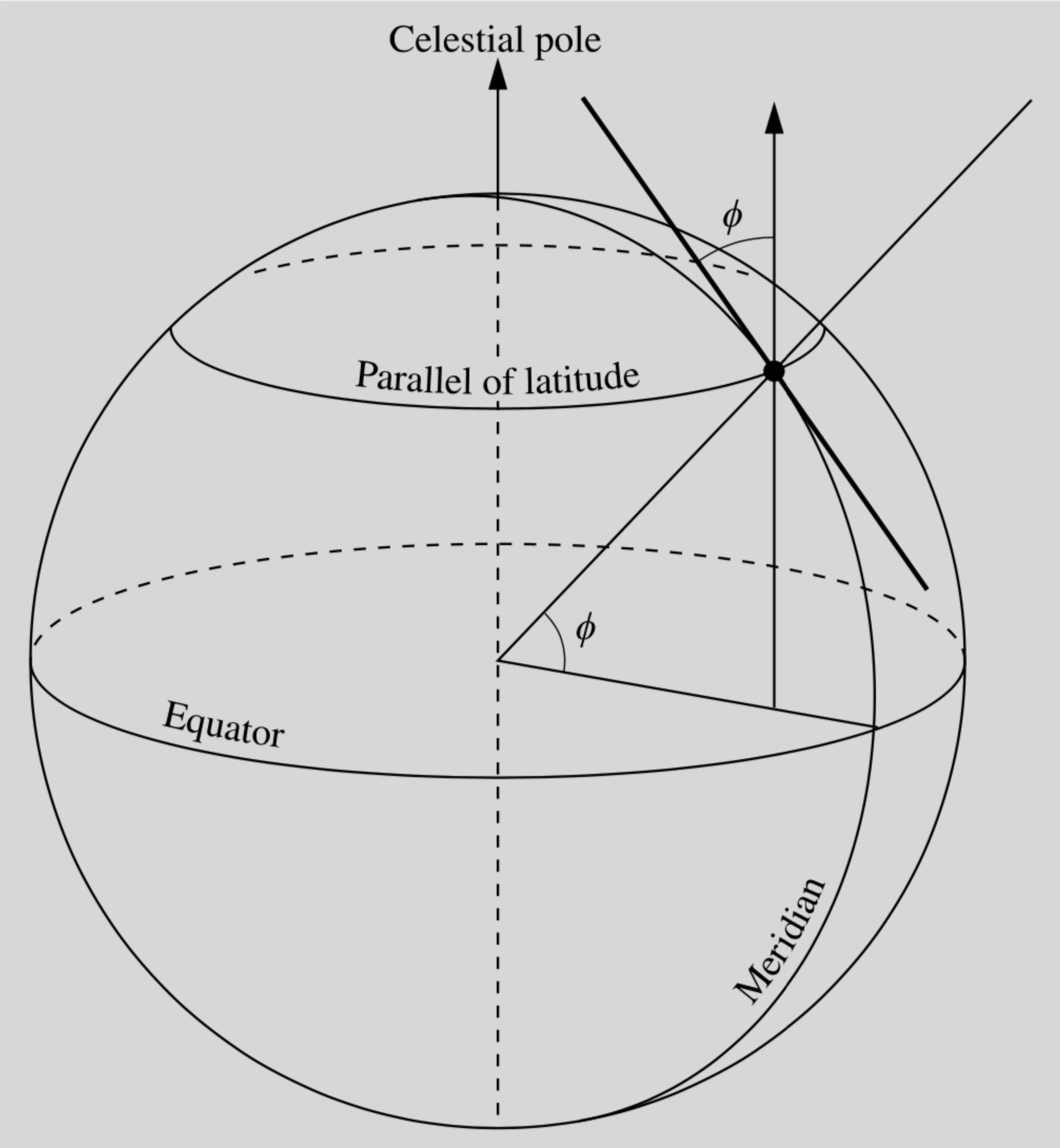
Parallelo: cerchio minore ∥equatore

Piano equatoriale, ⊥ all'asse di rot.

Equatore

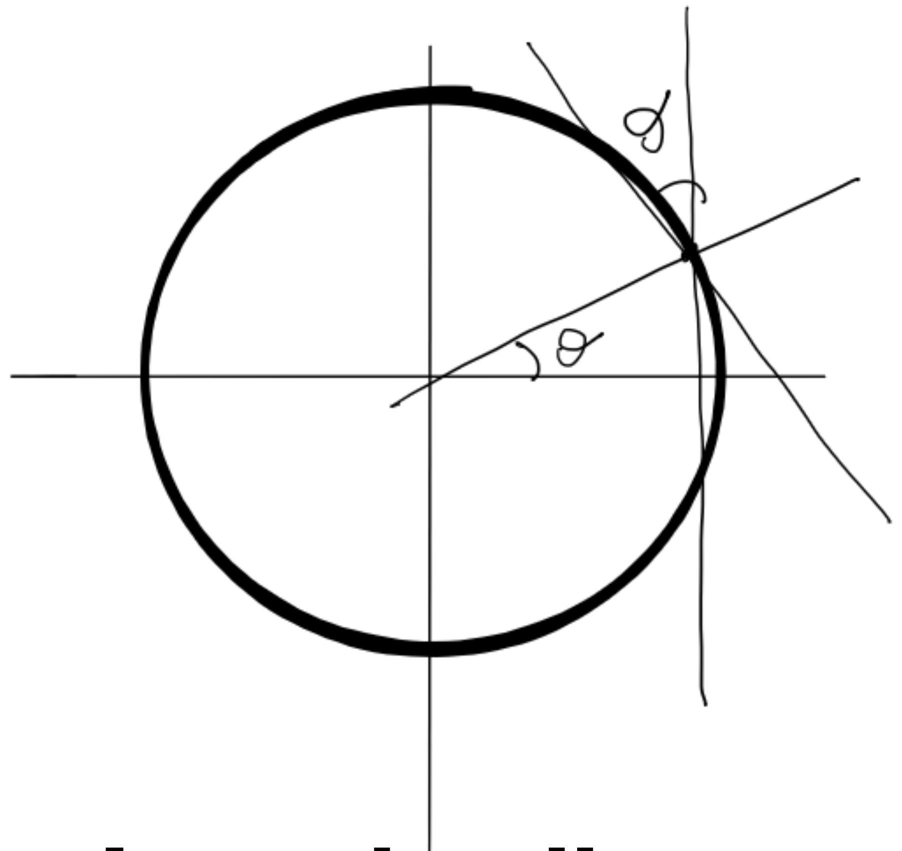
Meridiano, semicerchio che passa per i due poli

La terra



Posizione di un punto P sulla terra
2 coordinate sferiche

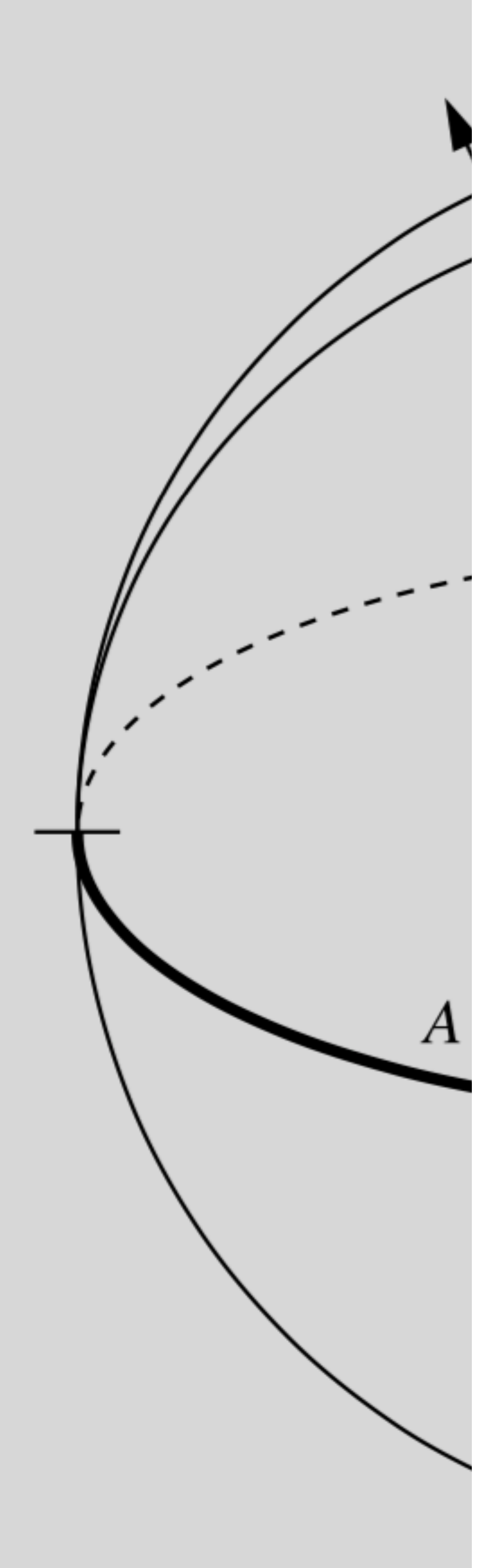
Latitudine (geografica)
Angolo ϕ tra la verticale locale e il piano equatoriale (+ emisfero nord, - emisfero sud)

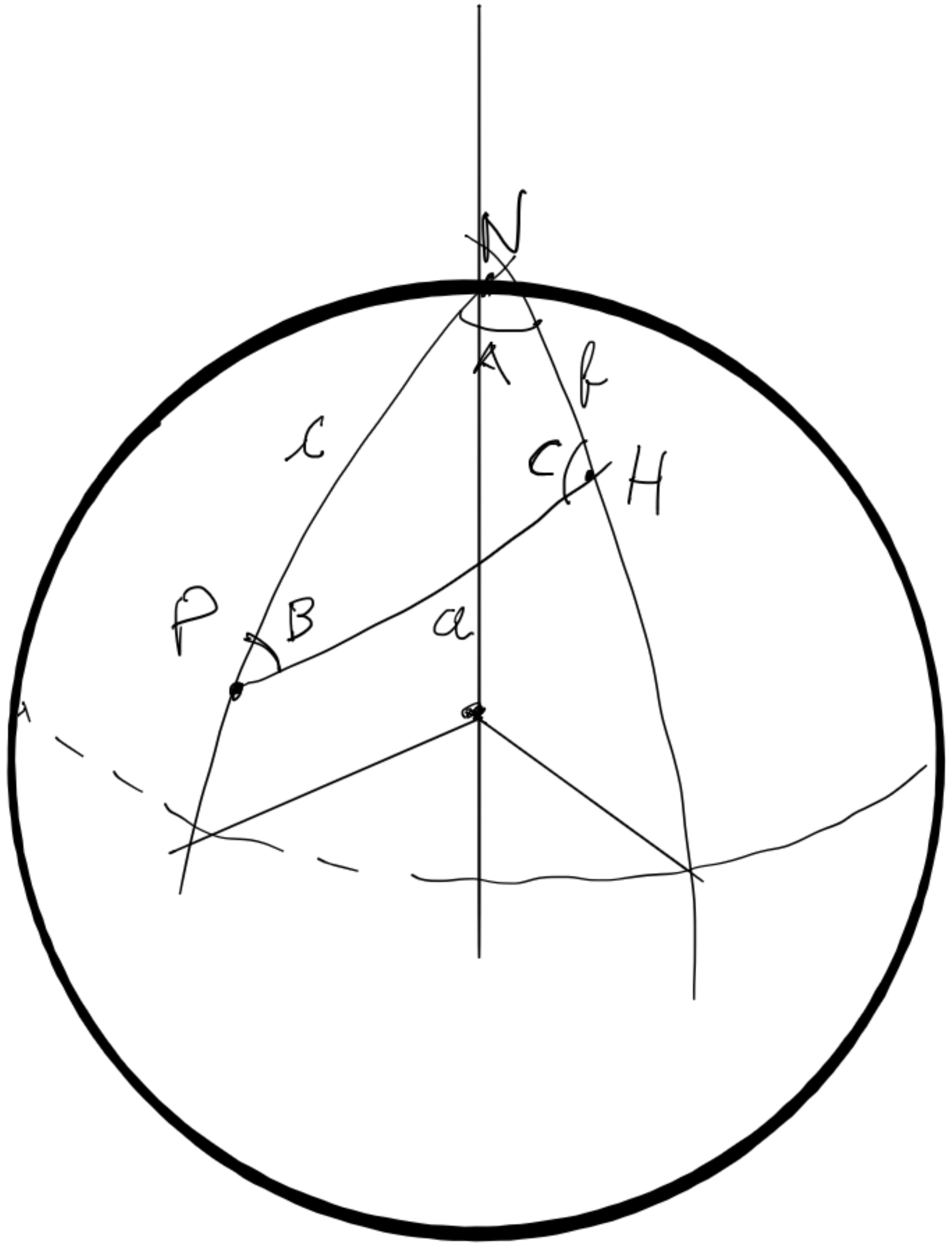


(Corrisponde anche all'altezza in cielo sull'orizzonte del polo)

Longitudine geografica
Angolo θ tra il meridiano che contiene il punto e il meridiano 0 passante per Greenwich (+ a est, - a ovest)

Trigonometria sferica





Distanza tra 2 località sulla Terra:

$\phi_1 = 60^\circ \quad \lambda_1 = 25^\circ$ Helsinki

$\phi_2 = 28.7^\circ \quad \lambda_2 = -17.9^\circ$ La Palma

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c.$$

$$\cos a = \cos A \sin(90 - \phi_1) \sin(90 - \phi_2) + \cos(90 - \phi_1) \cos(90 - \phi_2)$$

$$A = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$\cos a = 0.732 \cdot 0.5 \cdot 0.877 + 0.866 \cdot 0.48$$

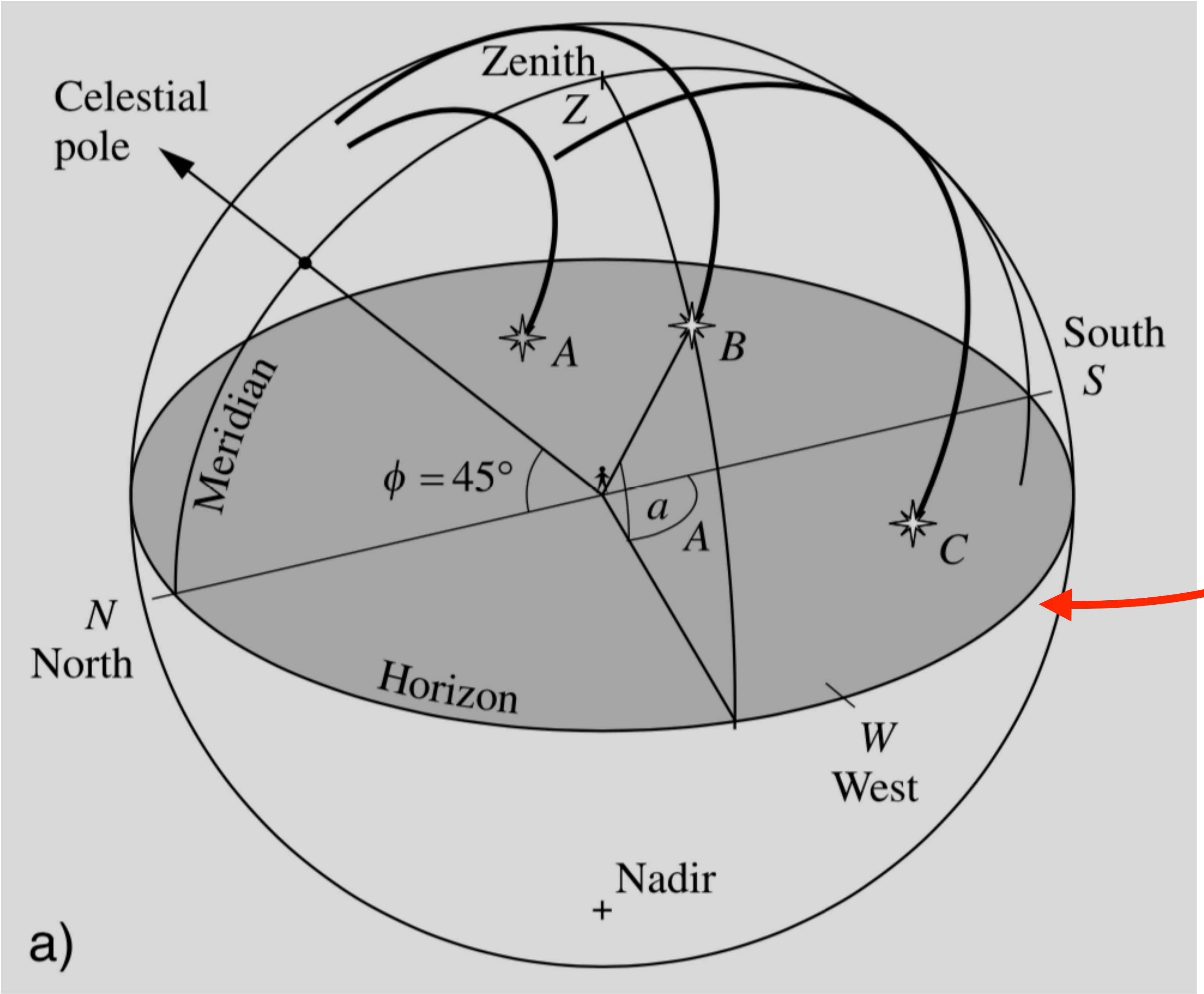
$$0.32 + 0.416 = 0.732$$

$$a = 42.5^\circ = 0.74 \text{ rad}$$

$R = 6400$ Km

$$d = a \cdot R = 4748 \text{ Km}$$

Il sistema orizzontale (alt-azimutale)



Piano di riferimento: piano tangente alla terra che passa per l'osservatore

Incrocia la sfera celeste sull'*orizzonte*

Zenith: punto sulla sfera celeste sopra l'osservatore; *nadir:* antipodale allo zenith

Cerchio verticale: cerchio massimo passante per lo zenith

Meridiano: cerchio verticale passante per il polo celeste (e quindi per i punti cardinali *N* e *S*)

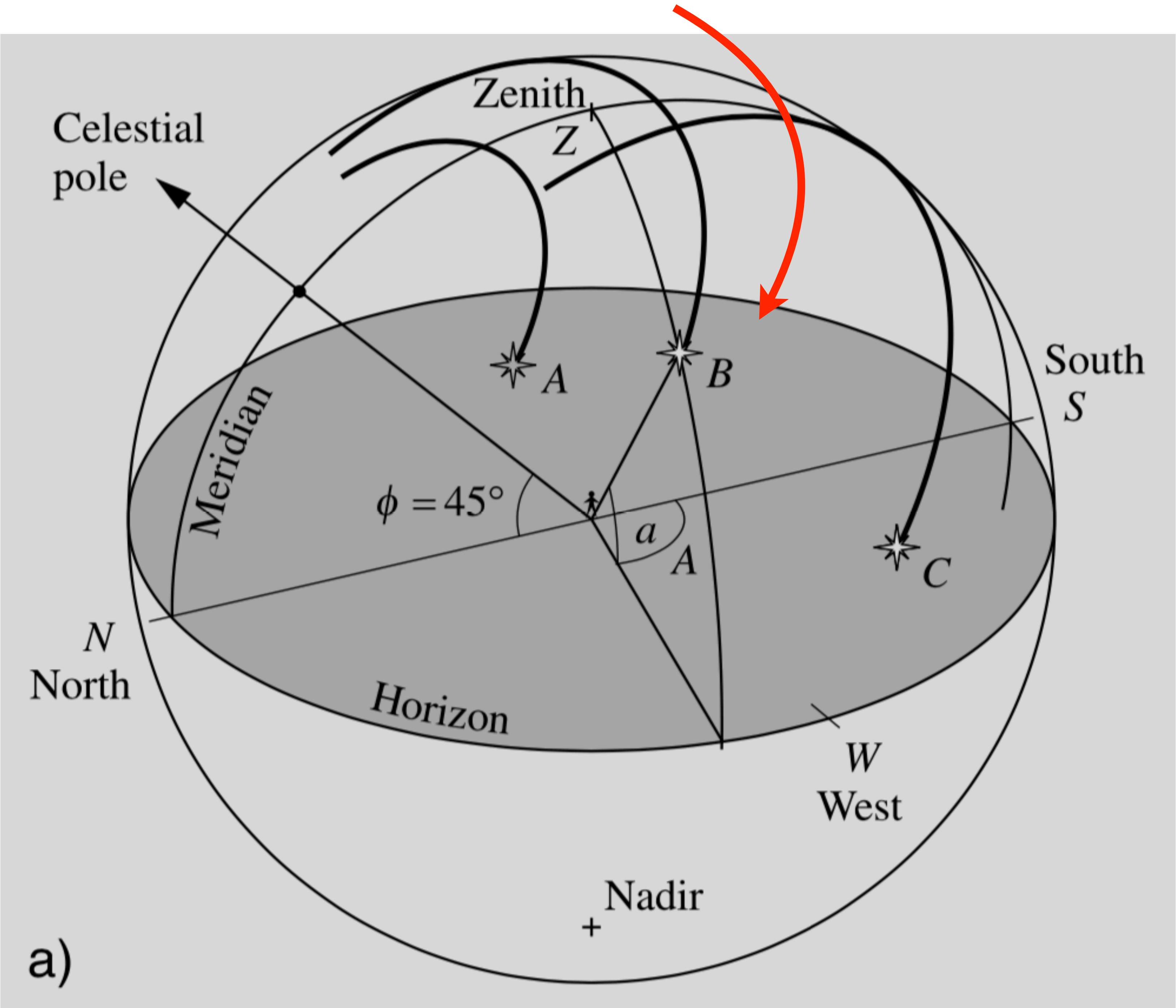
Posizione corpi celesti:

- Azimut *A*: angolo tra la verticale del corpo e il punto cardinale S, in senso orario; A=[0°, 360°]
- Altezza *a*: angolo tra l'orizzonte e il corpo, sul cerchio verticale; a=[-90°,+90°]
  - Distanza dallo zenith: $z = 90° - a$

Il sistema orizzontale (alt-azimutale)

Moto di 3 stelle *A, B, C* in cielo

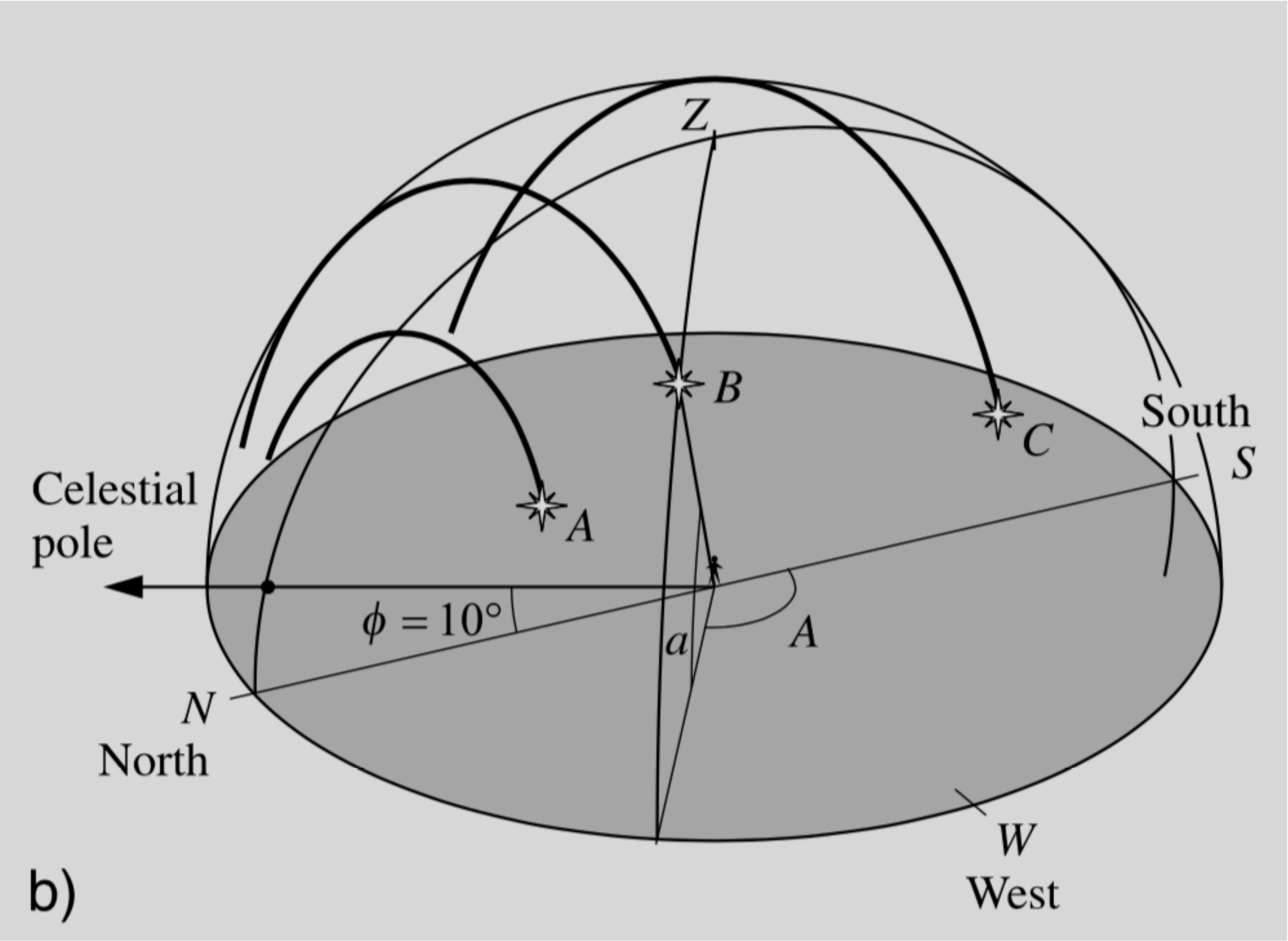
Sorgono a Est, culminano al meridiano, e tramontano a ovest



latitudine luogo Φ=45° (Padova 45°24′28″ N)

Stesse stelle *A, B, C* da latitudine 10° N

Le loro coordinate sono diverse



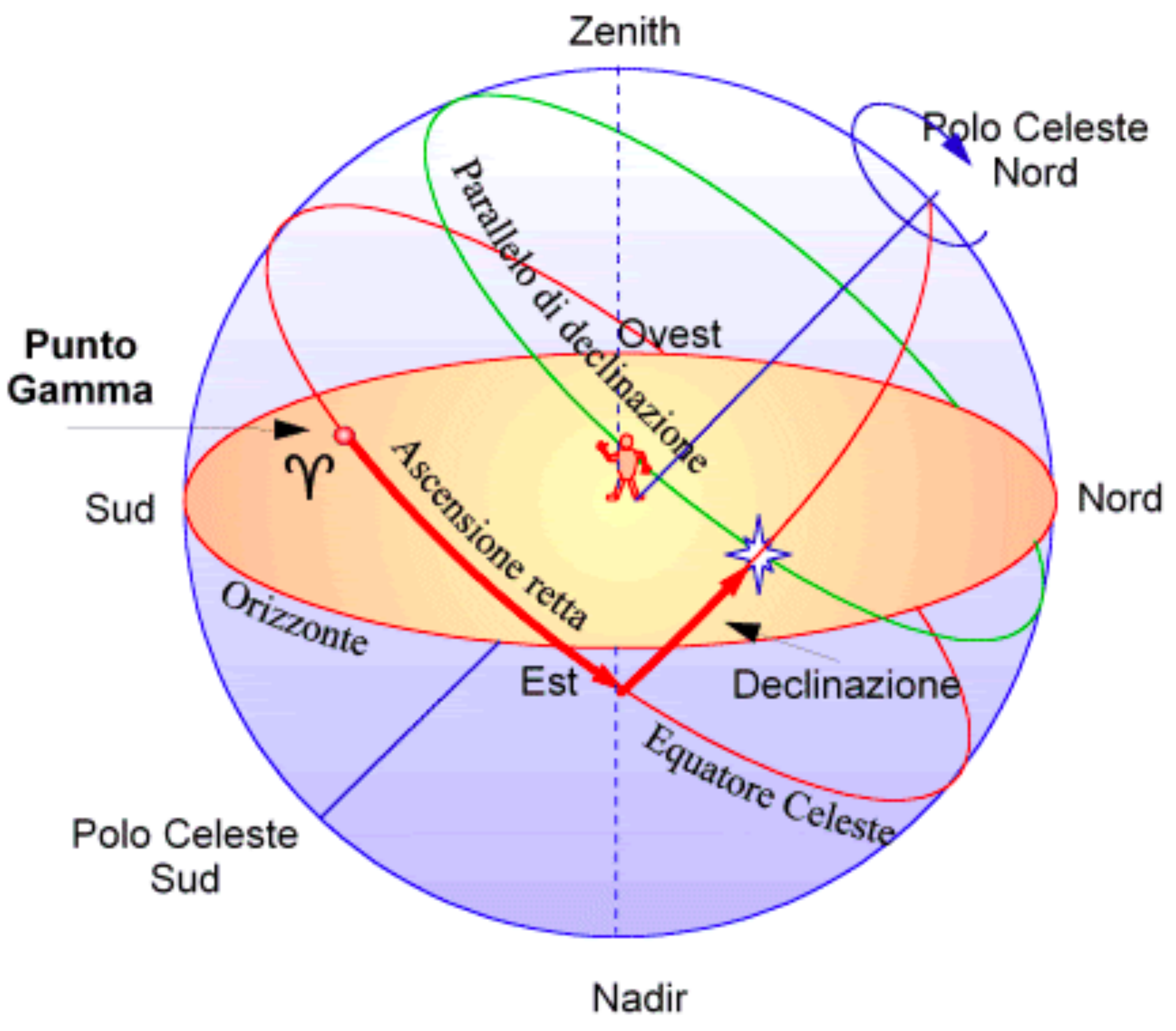
latitudine luogo Φ=10°

Non sono universali, non si possono usare in cataloghi

Le coordinate orizzontali dipendono dal *tempo*

Le coordinate di un corpo celeste nel sistema orizzontale dipendono dal *luogo*

Il sistema equatoriale



L'asse di rotazione terrestre è (quasi) costante nel tempo, e quindi sono fisse la posizione del *polo* e dell'*equatore celeste*

Piano di riferimento

Meridiano astronomico: passa per zenit e polo

Punto γ: intersezione primaverile tra equatore celeste ed eclittica (posizione apparente del Sole sulla sfera, percorsa in un anno)

Coordinate equatoriali:

- ascensione retta *RA* o α: distanza angolare tra la stella e il punto γ
- declinazione δ: altezza stella sull'equatore celeste

Indipendenti dalla rotazione terrestre e dalla posizione dell'osservatore!!

Il sistema equatoriale

Durante la notte le stelle appaiono ruotare intorno al polo nord celeste

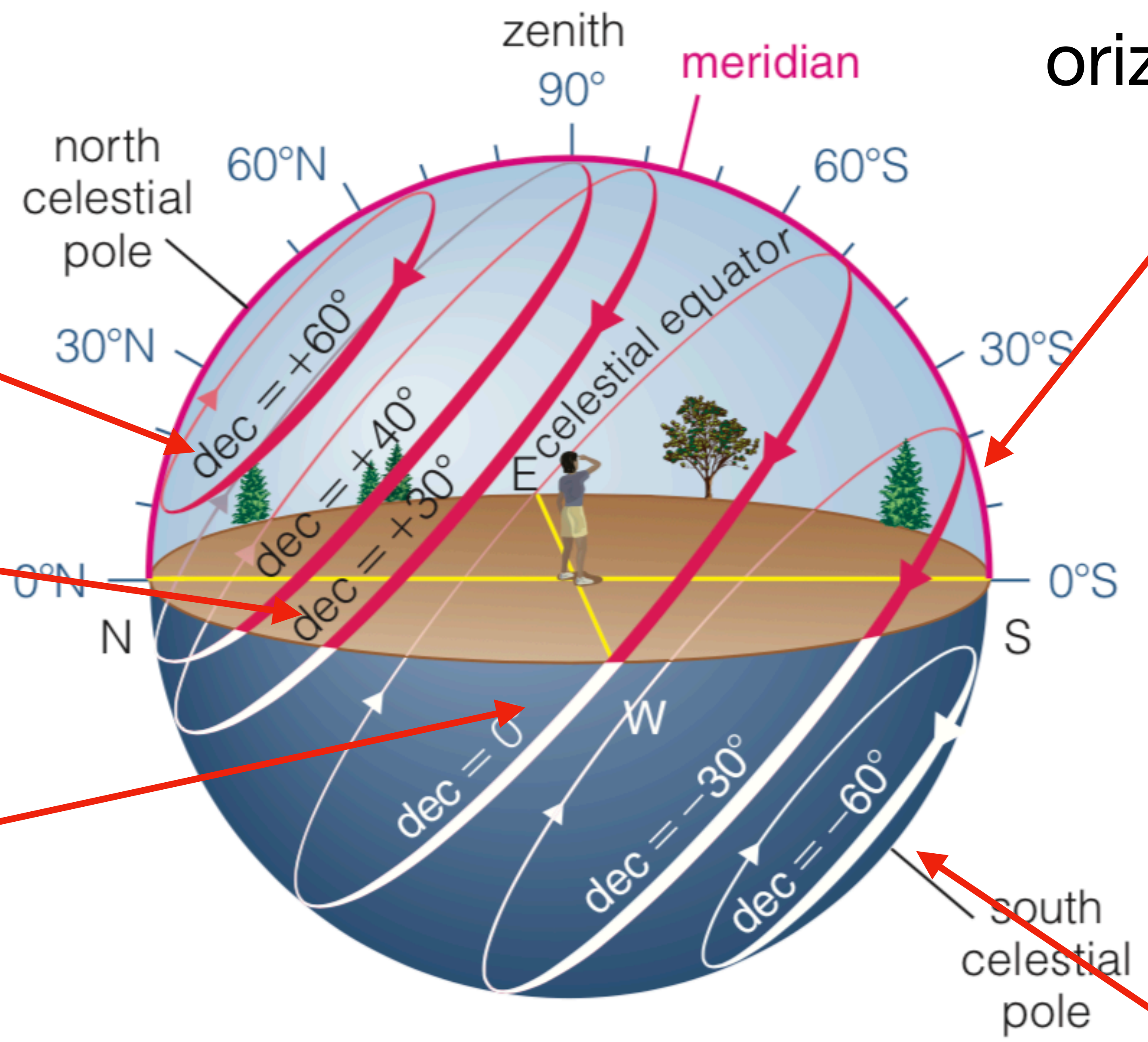
L'altezza del polo sull'orizzonte è uguale alla latitudine del luogo

Stella circumpolare: sempre visibile

Stella che sorge e tramonta, sopra orizzonte per > 12h

Stella che sorge esattamente a E e tramonta a O, sopra orizzonte per 12h

Stella che sorge e tramonta, sopra orizzonte per < 12h

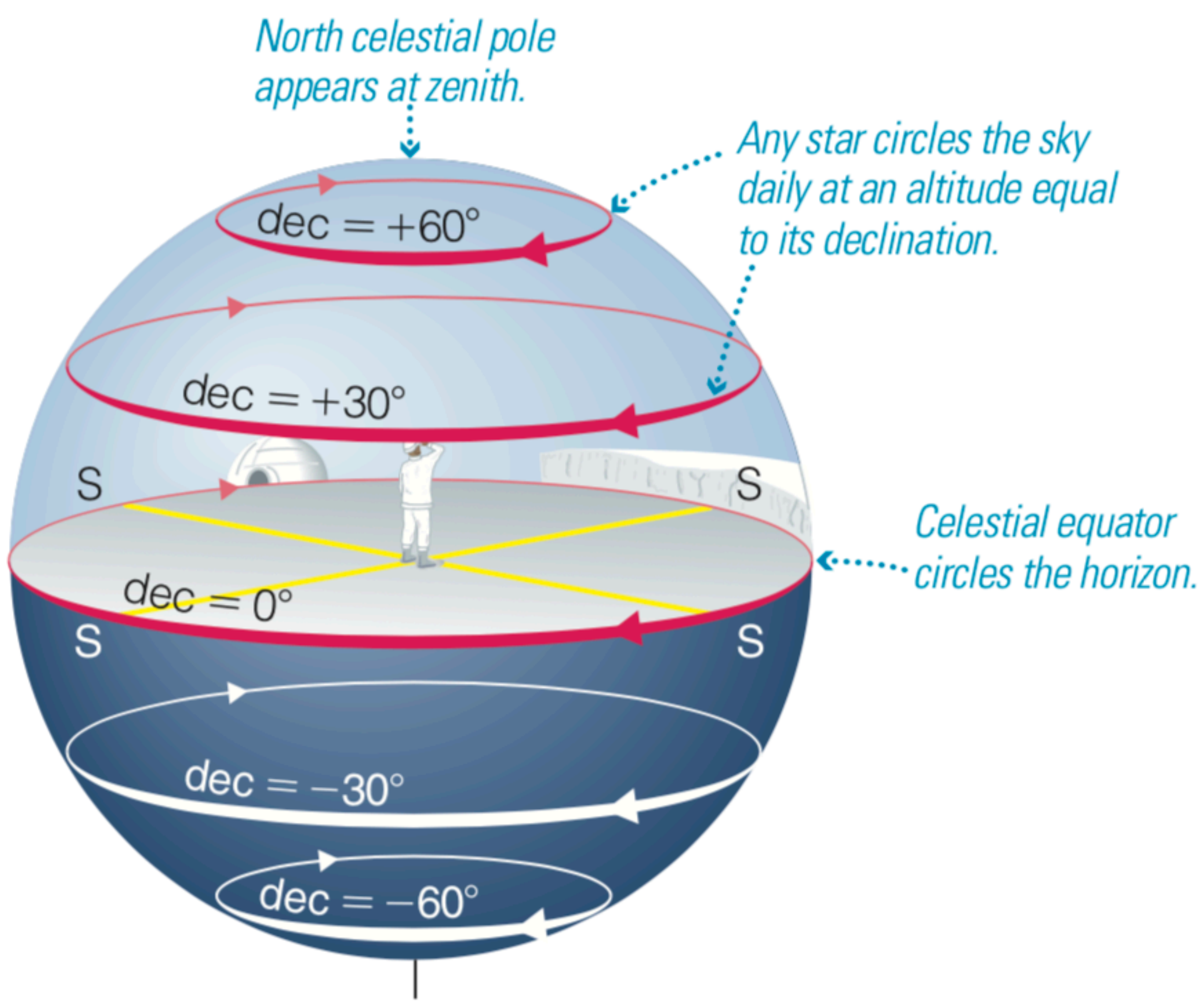


$\phi = 40°N$

Stella mai visibile

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

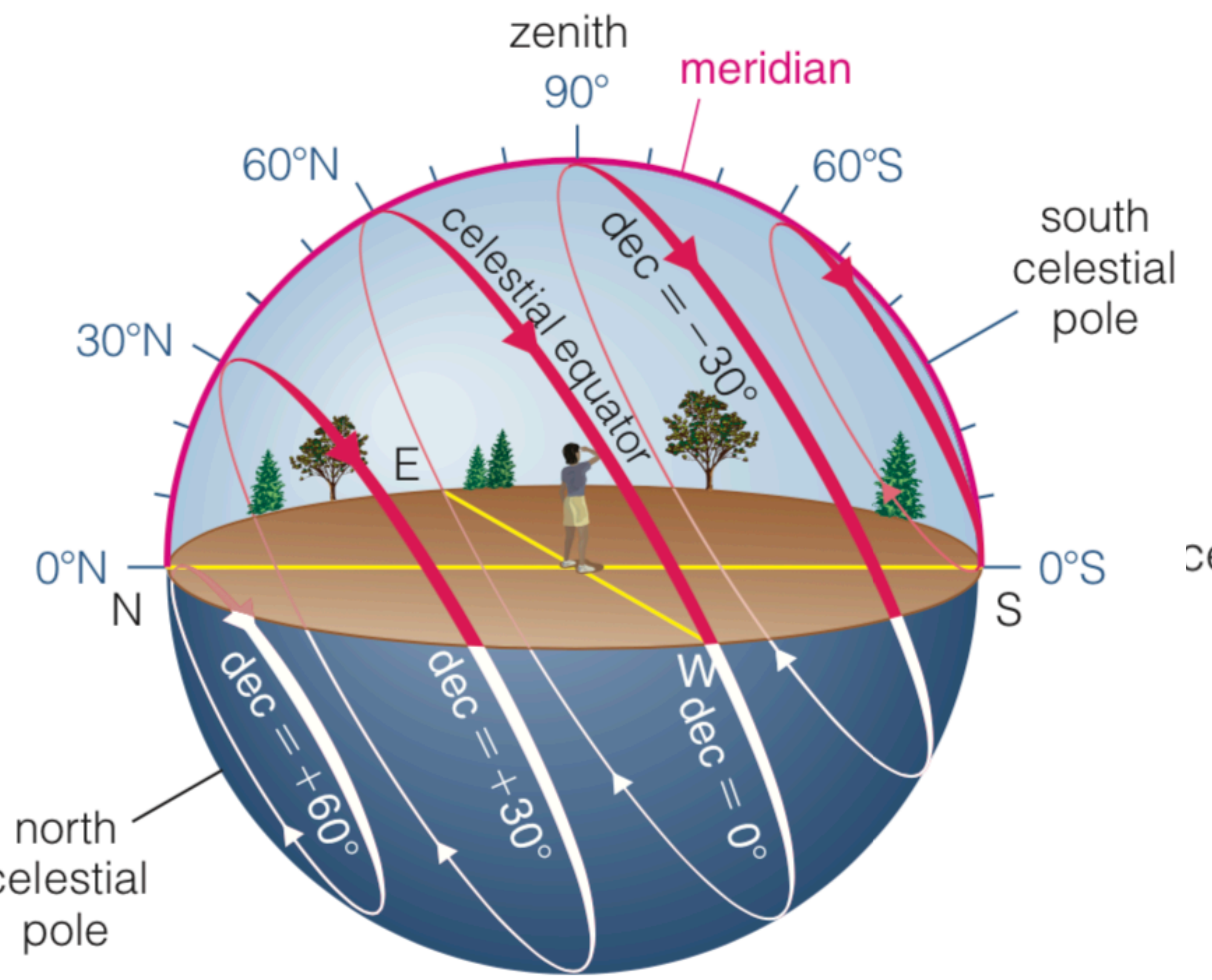
Il sistema equatoriale



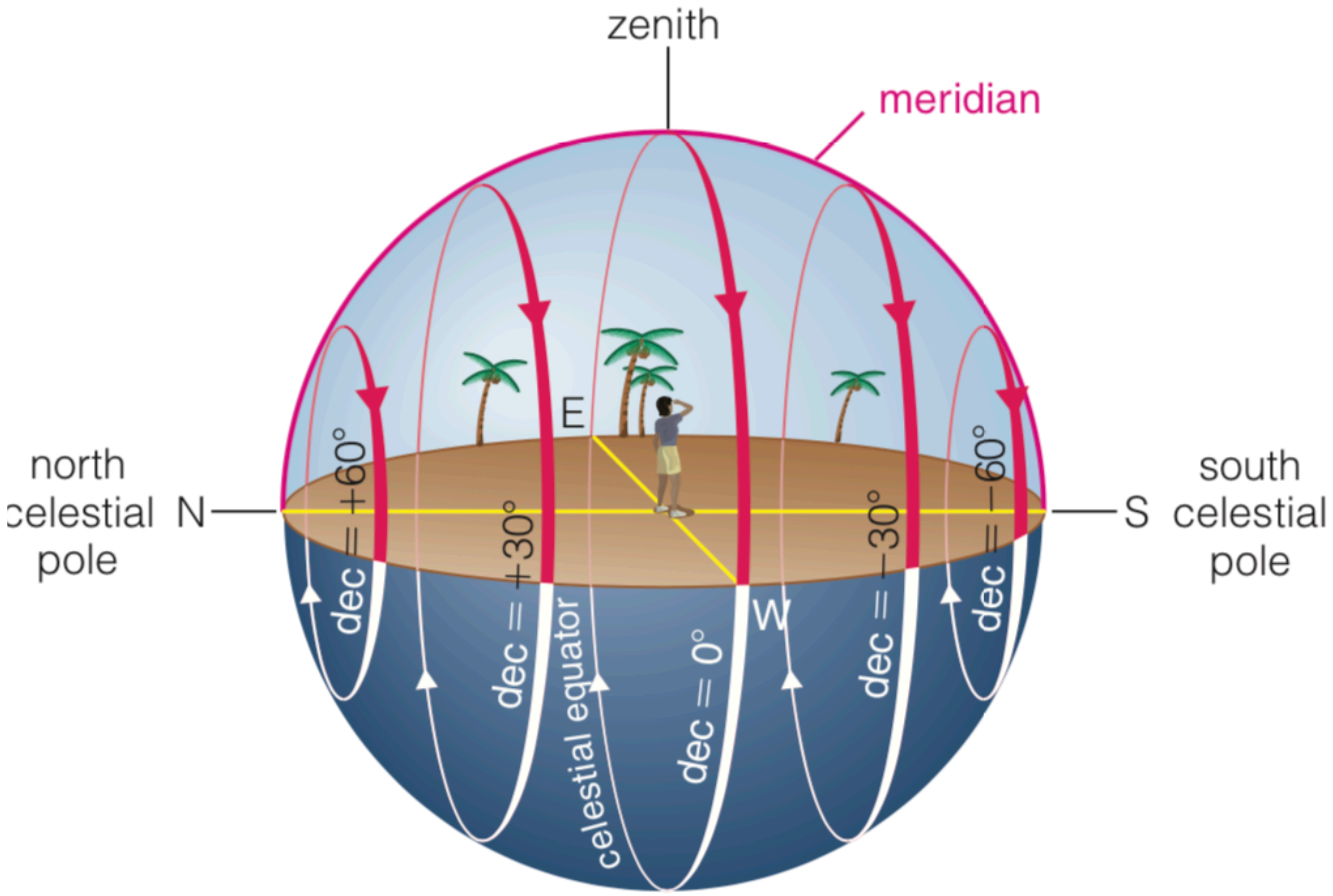
Cielo al polo nord

È visibile solo mezza sfera celeste

Tutte le stelle visibili sono circumpolari, visibili per 24h



Cielo a 30° S

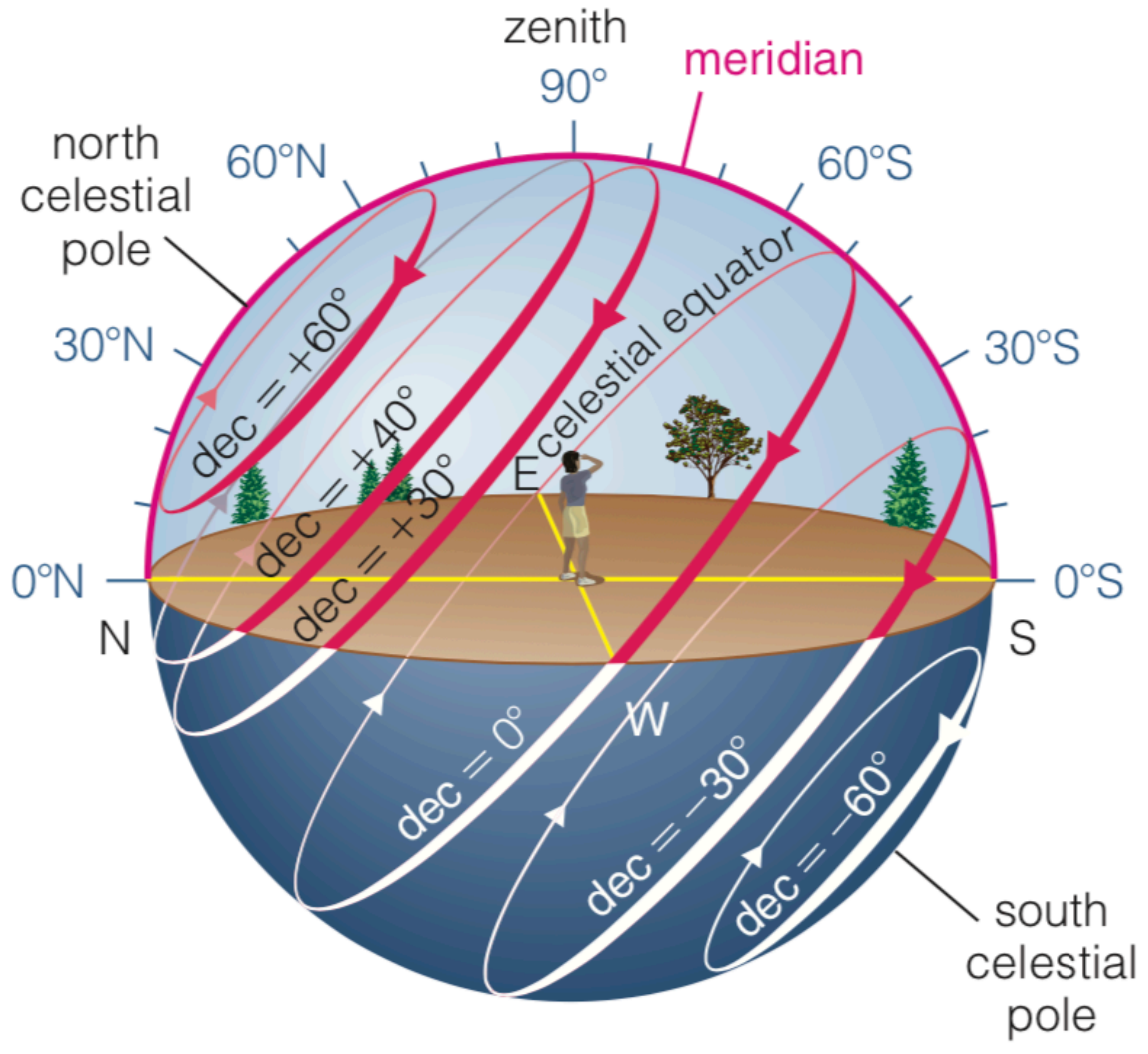


Cielo all'equatore

Si vede tutta la sfera celeste

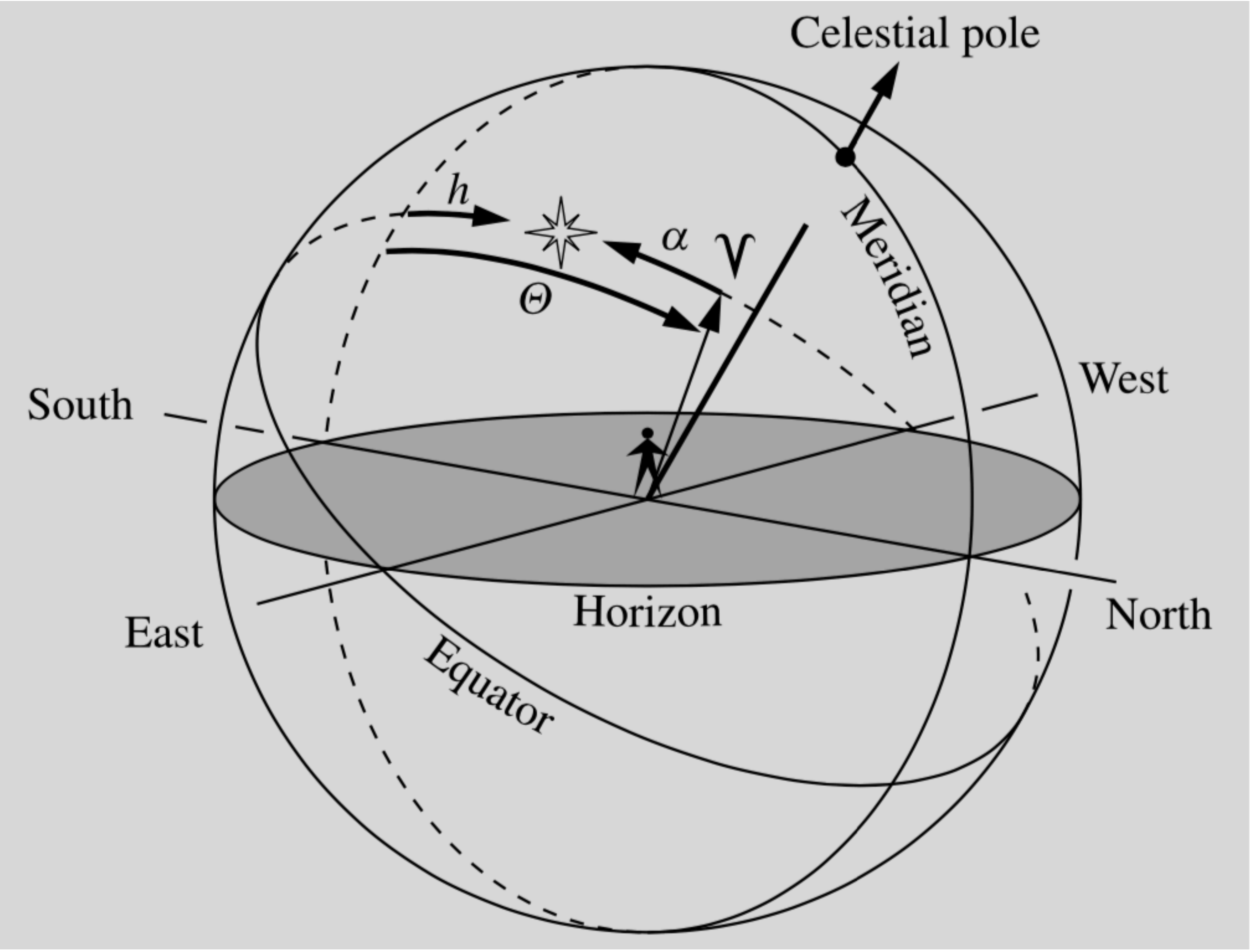
Non ci sono stelle circumpolari.
Tutte le stelle sono visibili per 12h

Il sistema equatoriale



La declinazione δ di un oggetto ci permette di sapere su che cerchio tale oggetto si muove

Il punto γ però si muove in cielo durante la notte a causa della rotazione terrestre, quindi non possiamo usare la RA per trovare l'oggetto



Necessitiamo di una coordinata locale legata alla RA: usiamo il meridiano sud per definire l'angolo orario *h*, misurato in senso orario dal meridiano

L'angolo orario del punto γ si chiama tempo siderale Θ (o LST)

$$\boxed{\Theta = h + \alpha}$$

Il sistema equatoriale

Sia tempo siderale che angolo orario cambiano allo stesso passo: è pratico esprimerli in unità di tempo; di conseguenza anche α (o RA) si esprime in tempo

24h corrispondono a 360°; 1h → 15°; 1m → 15’

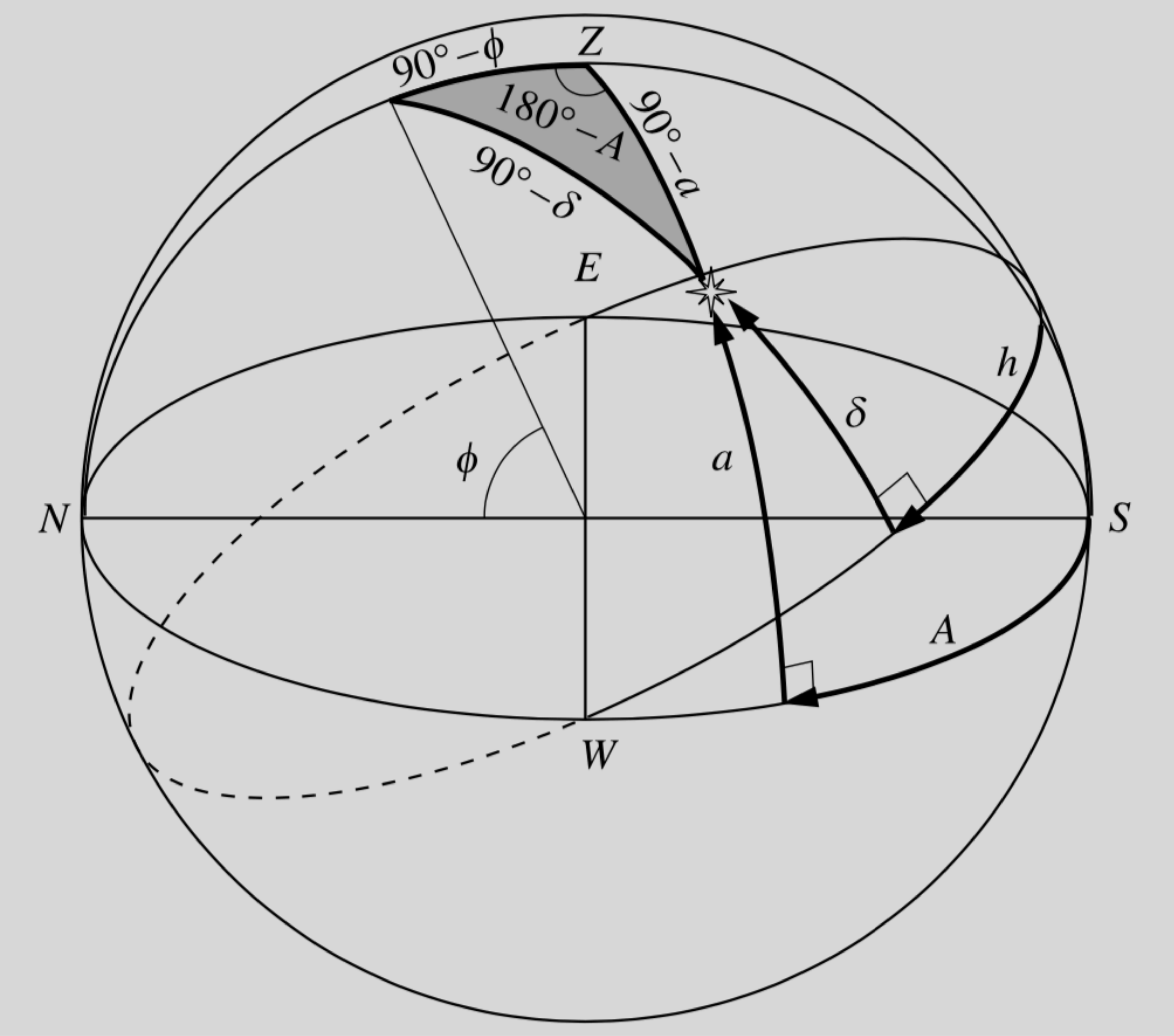
Il tempo siderale si può ottenere puntando una stella di *α, δ* note e leggendo *h* sulla ruota oraria del telescopio; poi applico $\Theta = h + \alpha$

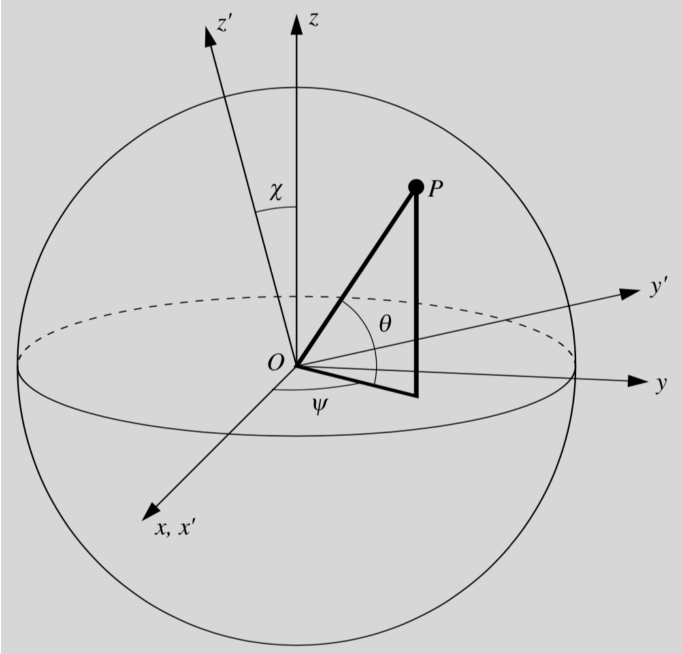
Giorno siderale: intervallo dopo il quale le stelle tornano nella stessa posizione in cielo

Giorno solare: intervallo dopo il quale in sole torna nella stessa posizione in cielo

Tempo solare ≠ tempo siderale; il tempo siderale va 3m56s più veloce di quello solare in un giorno

Trasformazioni tra sistema alt-azimutale e equatoriale (1)





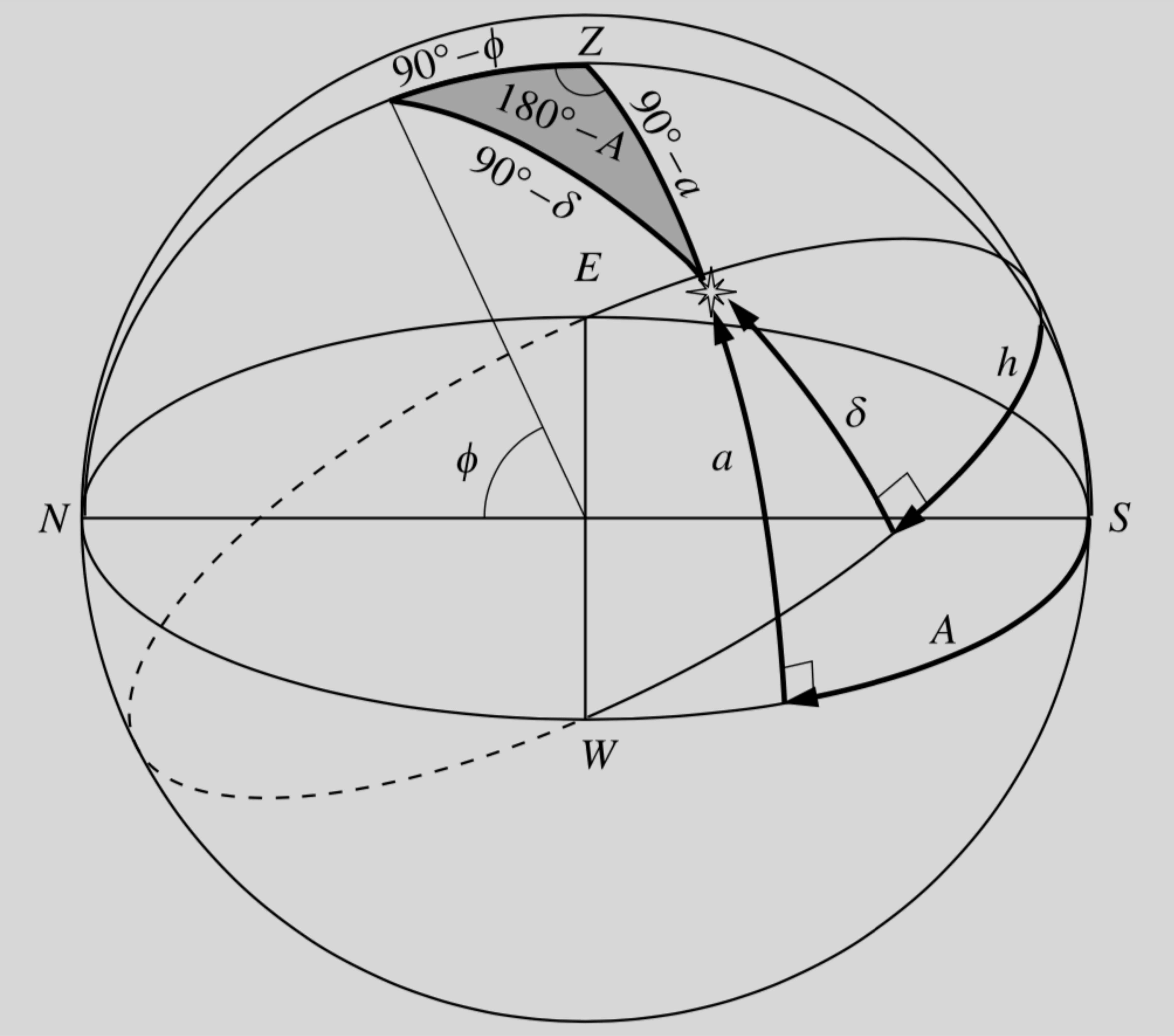
$$\cos\psi'\cos\theta' = \cos\psi\cos\theta$$
$$\sin\psi'\cos\theta' = \sin\psi\cos\theta\cos\chi + \sin\theta\sin\chi$$
$$\sin\theta' = \sin\theta\cos\chi - \sin\chi\sin\psi\cos\theta$$

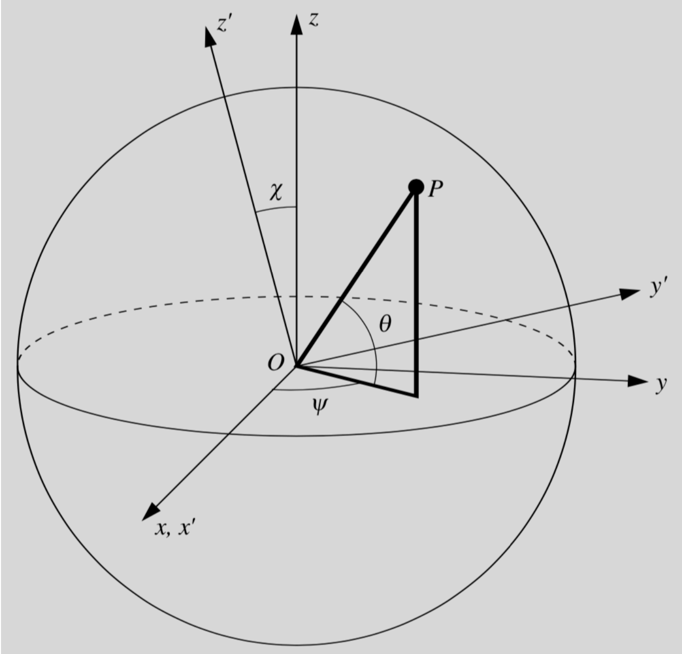
$$\psi = 90^\circ - A \qquad \theta = a$$
$$\psi' = 90^\circ - h \qquad \theta' = \delta$$
$$\chi = 90^\circ - \phi$$

$$\sin h\cos\delta = \sin A\cos a$$
$$\cos h\cos\delta = \cos A\cos a\sin\phi + \sin a\cos\phi$$
$$\sin\delta = -\cos A\cos a\cos\phi + \sin a\sin\phi$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Trasformazioni tra sistema alt-azimutale e equatoriale (2)



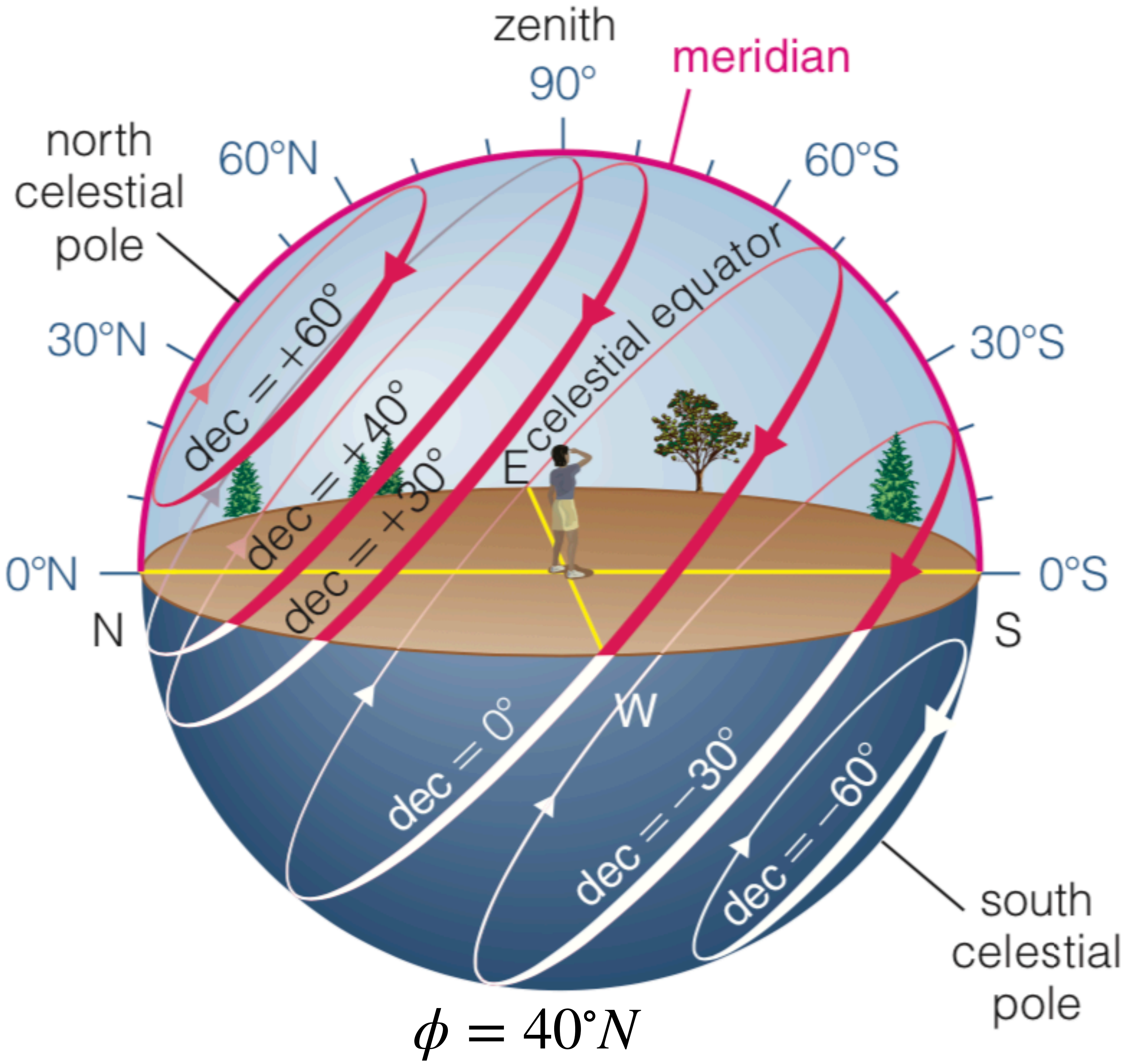


$$\cos\psi'\cos\theta' = \cos\psi\cos\theta$$
$$\sin\psi'\cos\theta' = \sin\psi\cos\theta\cos\chi + \sin\theta\sin\chi$$
$$\sin\theta' = \sin\theta\cos\chi - \sin\chi\sin\psi\cos\theta$$

$$\psi = 90° - h \qquad \theta = \delta$$
$$\psi' = 90° - A \qquad \theta' = a$$
$$\chi = -(90° - \phi)$$

$$\sin A\cos a = \sin h\cos\delta$$
$$\cos A\cos a = \cos h\cos\delta\sin\phi - \sin\delta\cos\phi$$
$$\sin a = \cos h\cos\delta\cos\phi + \sin\delta\sin\phi$$

Il sistema equatoriale



Una stella raggiunge l'altezza massima quando passa per il meridiano sud: *h*=0 h → culminazione superiore

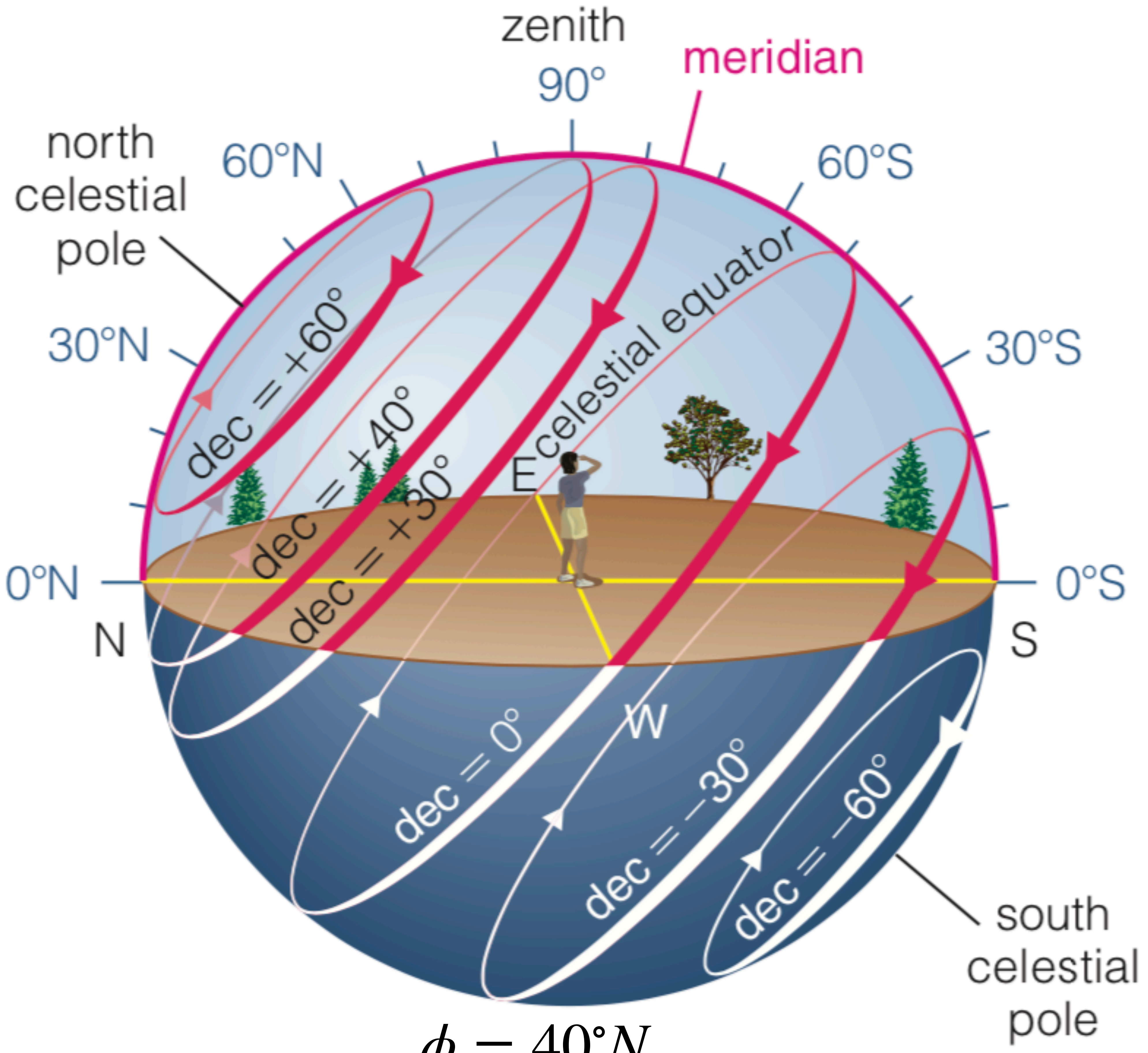
se h =0 in $\sin a = \cos h \cos\delta \cos\phi + \sin\delta \sin\phi$

$$\sin a = \cos\delta\cos\phi + \sin\delta\sin\phi = \begin{cases} = \cos(\phi-\delta) = \sin(90° - \phi + \delta) \\ = \cos(\delta-\phi) = \sin(90° - \delta + \phi) \end{cases}$$

$$a_{max} = \begin{cases} 90° - \phi + \delta & \text{la stella culmina a sud dello zenith} \\ 90° + \phi - \delta & \text{la stella culmina a nord dello zenith} \end{cases}$$

$a_{max}>0$ se $\delta>\phi-90°$; corpi con $\delta<\phi-90°$ non visibili dal luogo

Il sistema equatoriale



$\phi = 40°N$

Una stella raggiunge l'altezza minima quando h=12 h → culminazione inferiore (per le stelle non-circumpolari, quest'altezza sarà negativa)

se h = 12h in $\sin a = \cos h \cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi$

$$\sin a = -\cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi$$

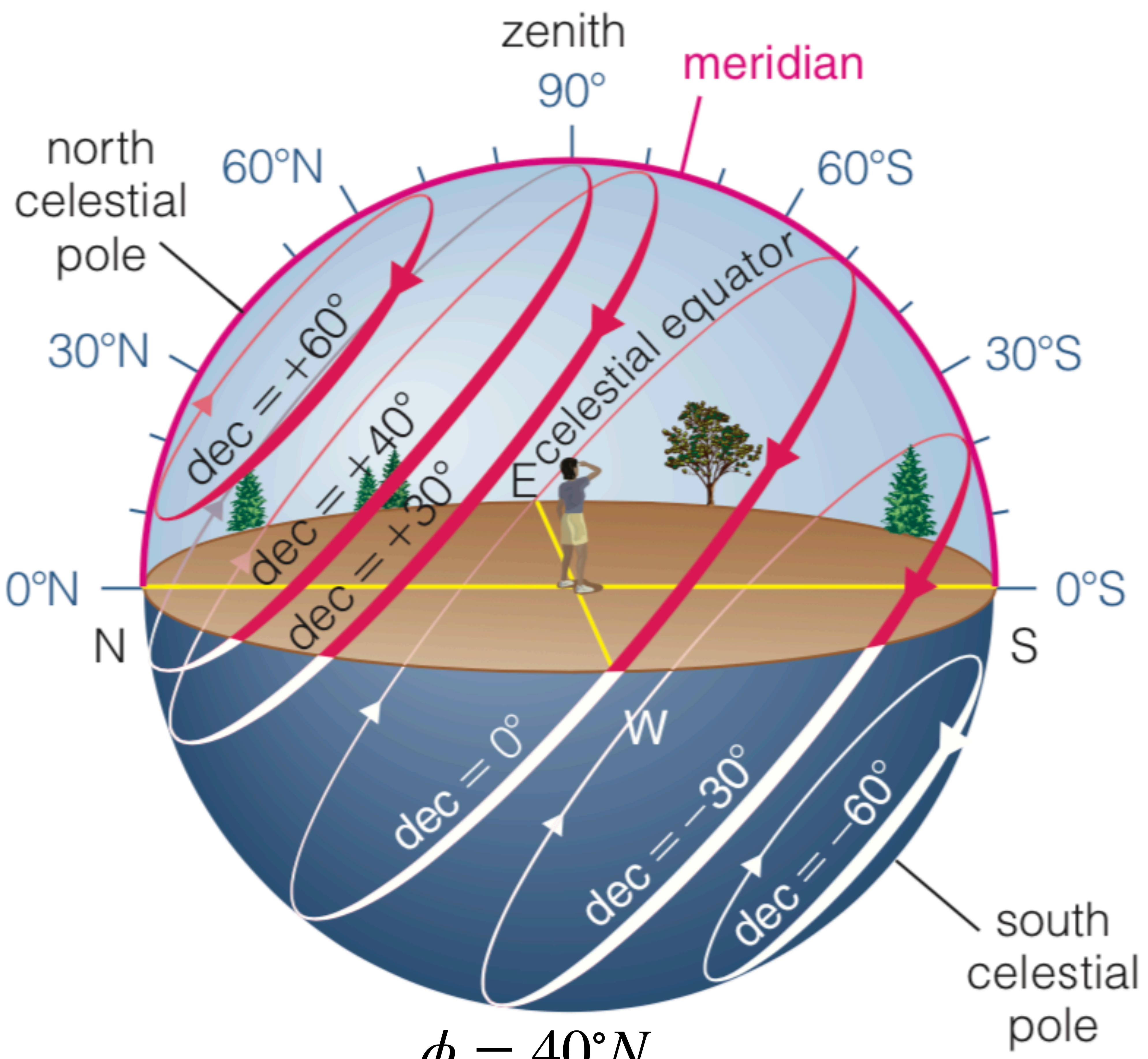
$$= -\cos(\phi + \delta) = \sin(\phi + \delta - 90°)$$

$$= -\cos(-\phi - \delta) = \sin(-\phi - \delta - 90°)$$

$$a_{min} = \begin{cases} \phi + \delta - 90° & \text{la stella “anti-culmina” a nord dello zenith} \\ -\phi - \delta - 90° & \text{la stella “anti-culmina” a sud dello zenith} \end{cases}$$

a_{min}>0 se $\delta+\phi>90°$; corpi con $\delta+\phi>90°$ circumpolari

Sorgere e tramontare



$\phi = 40°N$

da $\quad \sin a = \cos h \cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi$

$\sin a = \cos h \cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi$

$\cos h \cos \delta \cos \phi = \sin a - \sin \delta \sin \phi$

$\cos h = \dfrac{\sin a}{\cos \delta \cos \phi} - \tan \delta \tan \phi$

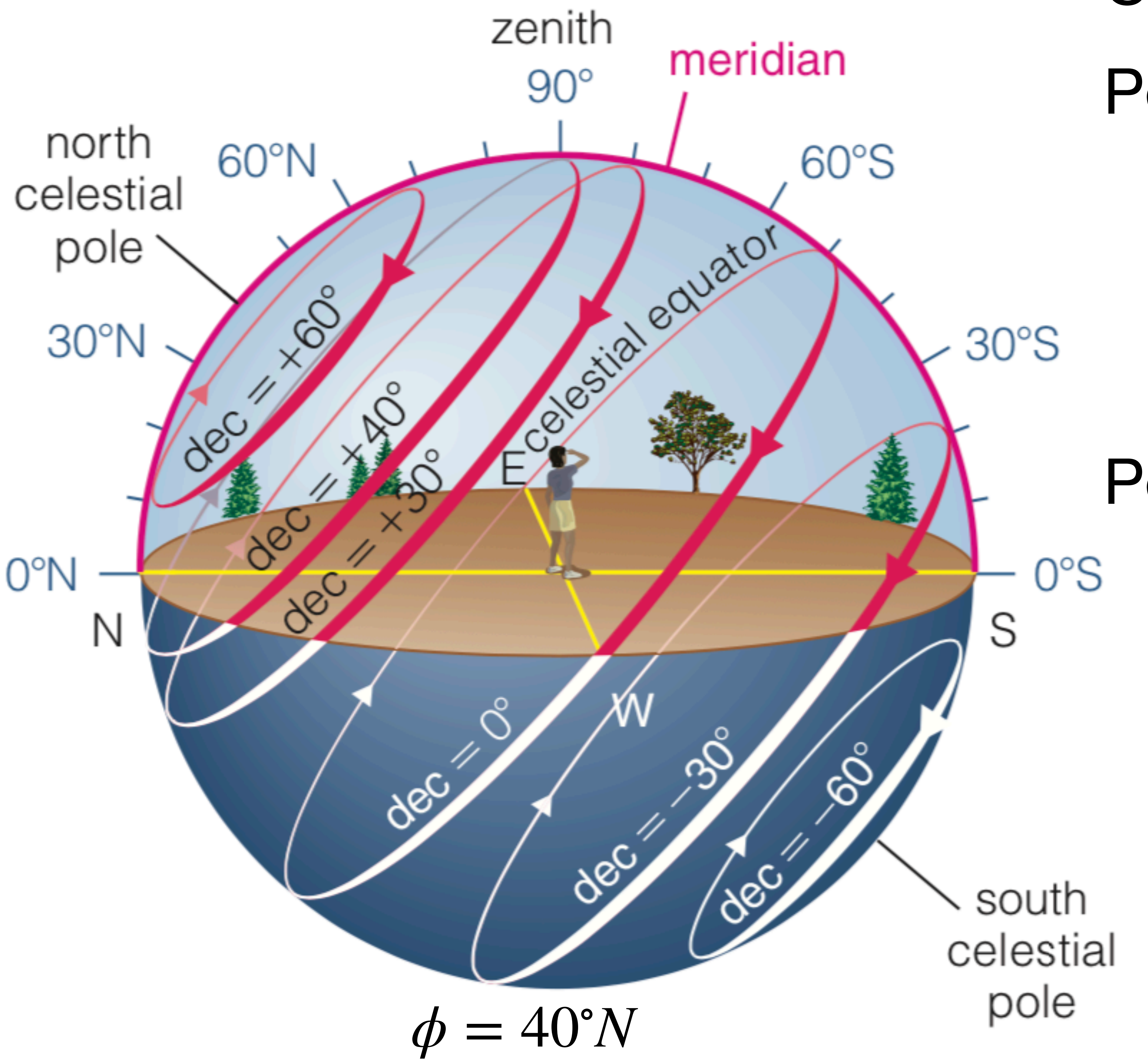
$$\cos h = \frac{\sin a}{\cos \delta \cos \phi} - \tan \delta \tan \phi$$

a = 0 sorgere, tramontare

$$\cos h_{s,t} = - \tan \delta \tan \phi \qquad \Theta_{s,t} = h_{s,t} + \alpha$$

non tengono conto della rifrazione atmosferica (circa 34’)

Il sistema equatoriale



Come determinare le coordinate α e δ dalle osservazioni

Per una stella circumpolare che culmina a N dello zenith:

$$a_{min} = \phi + \delta - 90° \qquad a_{max} = 90° + \phi - \delta$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{2}(a_{min} - a_{max}) + 90°$$

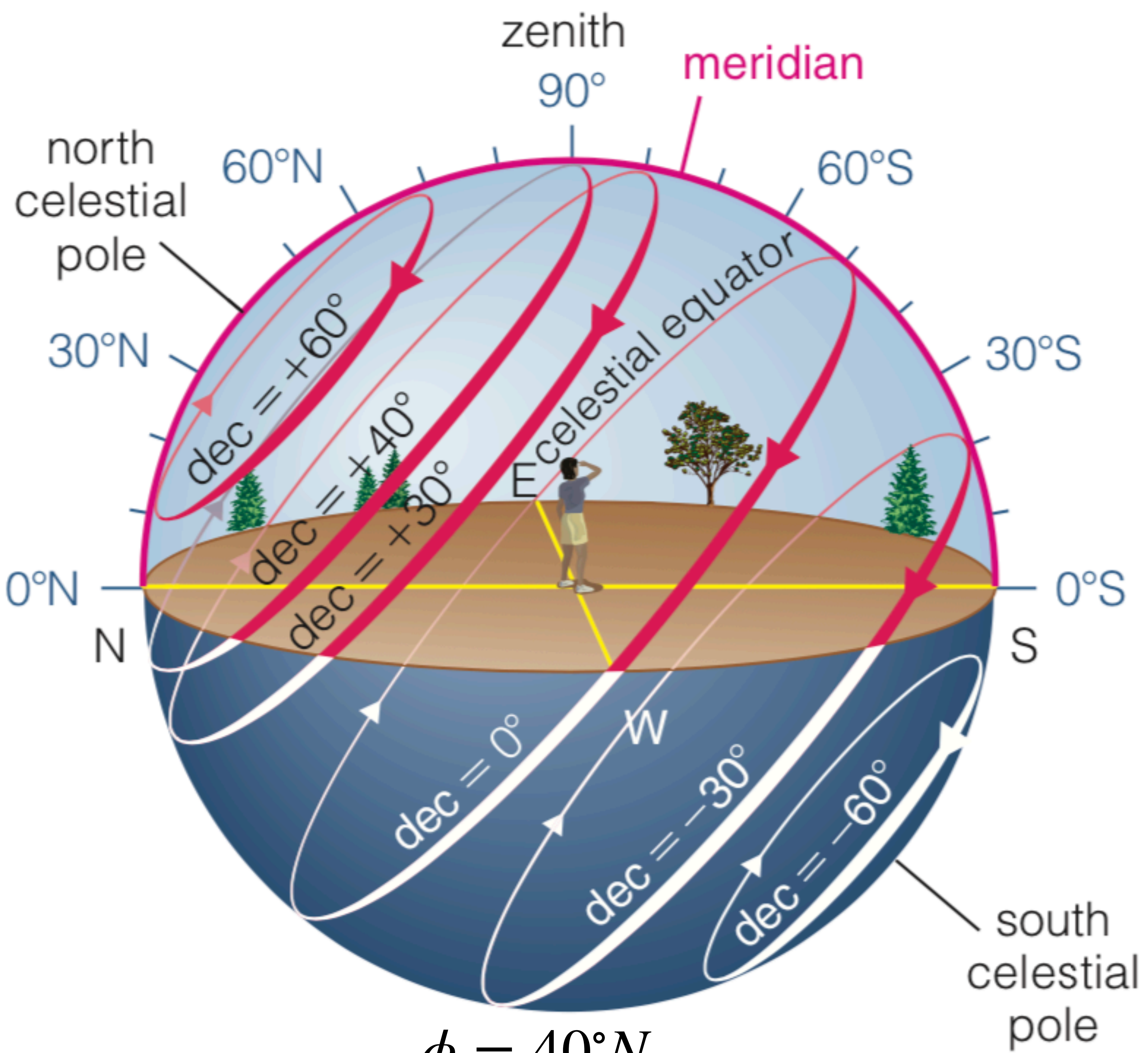
Per una stella circumpolare che culmina a S dello zenith:

$$\delta = \frac{1}{2}(a_{min} + a_{max})$$

Allo stesso tempo, otteniamo la posizione del polo, e possiamo ottenere la δ di qualsiasi oggetto come distanza da polo

Anche la posizione dell'equatore risulta definita, e come punto zero della RA o α usiamo il punto in cui il Sole attraversa l'equatore da sud a nord

Sorgere e tramontare



$\phi = 40^\circ N$

$$\cos h_{s,t} = -\tan\delta\tan\phi \qquad \Theta_{s,t} = h_{s,t} + \alpha$$

$\cos h = -\tan\delta \tan\phi$

$\phi = 40^\circ$ $\quad\cos h = -0.839 \cdot 0.577$

$\delta = -30^\circ$ $\quad h = \pm 1.065\ \text{rad} = \pm 61^\circ,\ 4{,}1h$

$\delta = 30^\circ$ $\quad \cos h = 0.839 \cdot 0.577 = \ldots$ $\quad h = \pm 119^\circ,\ 7{,}93h$

$\delta = 50^\circ$ $\quad \cos h = -1$ $\quad h = 180^\circ,\ 12h$

$\delta = -50^\circ$ $\quad \cos h = 1$ $\quad h = 0^\circ,\ 0h$

$\delta = 0^\circ$ $\quad \cos h = 0$ $\quad h = \pm 90^\circ,\ \pm 6h$