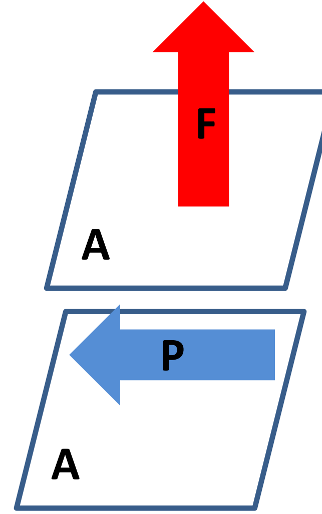
Tensioni



- **Tensione normale**

  σ = **F**/A dove **F** perpendicolare ad **A**

- **Tensione tangenziale** o a taglio

  τ = **P**/A dove **P** parallela ad **A**

T =

σ_{xx}	τ_{xy}	τ_{xz}
τ_{yx}	σ_{yy}	τ_{yz}
τ_{zx}	τ_{zy}	σ_{zz}

Dove $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ per ogni i e j, cioè **T è simmetrico e** T è il **tensore delle tensioni**

È possibile trovare un sistema di riferimento x'y'z' tale che il tensore delle tensioni **T' diventi diagonale**

T' =

σ_1	0	0
0	σ_2	0
0	0	σ_3

Dove σ_1, σ_2, σ_3 sono dette **tensioni principali** e sono gli autovalori del tensore T

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid

ISBN No. 0-13-227271-7

Tensioni principali

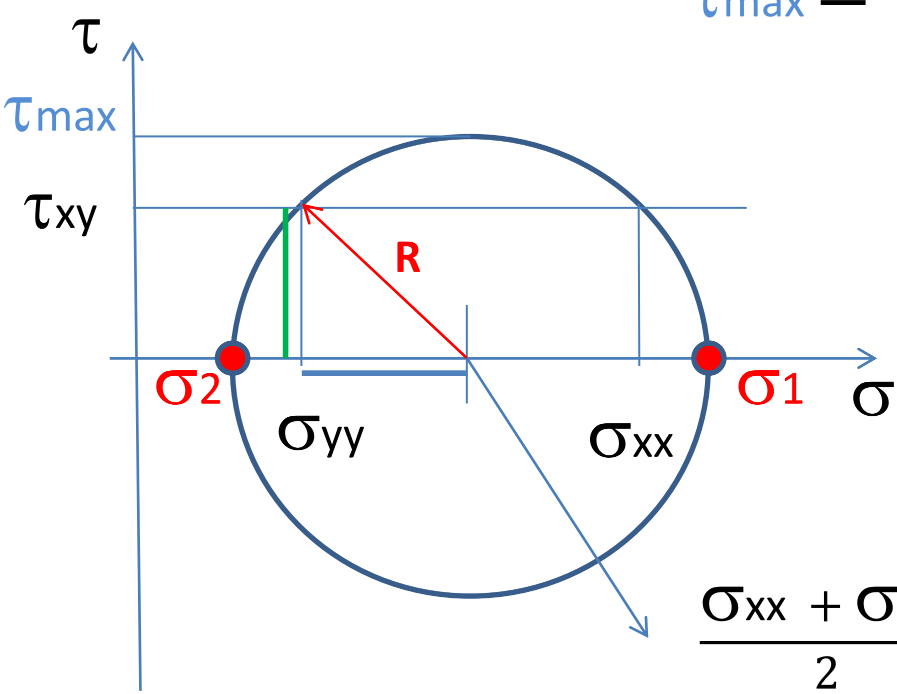
- Sono gli autovalori $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ del tensore T determinati grazie al calcolo del determinante della matrice seguente ed eguagliandolo a 0
- det $\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid
© 2008, Pearson Education
ISBN No. 0-13-227271-7

Rappresentazione dello stato tensionale mediante i cerchi di Mohr

$$\tau_{max} = \frac{\sigma 1 - \sigma 2}{2}$$



$$\frac{\sigma xx + \sigma yy}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sigma_{yy}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid
© 2008, Pearson Education
ISBN No. 0-13-227271-7

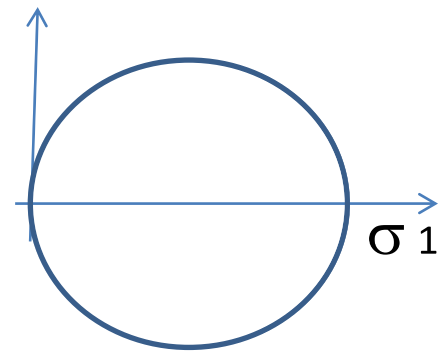
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma xx - \sigma yy}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Stato di tensione piana

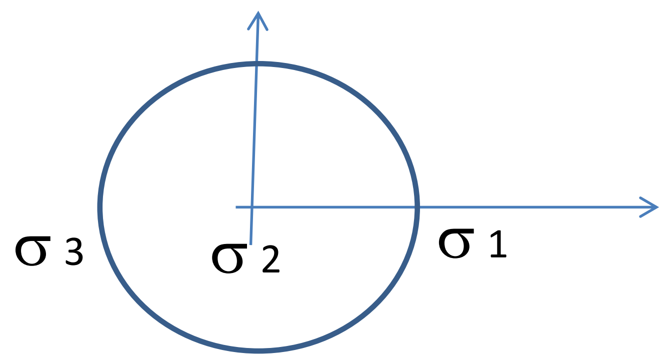
Esempi di stati di tensione

- Pura tensione

$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$



- Puro taglio



$\sigma_3 = -\sigma_1$

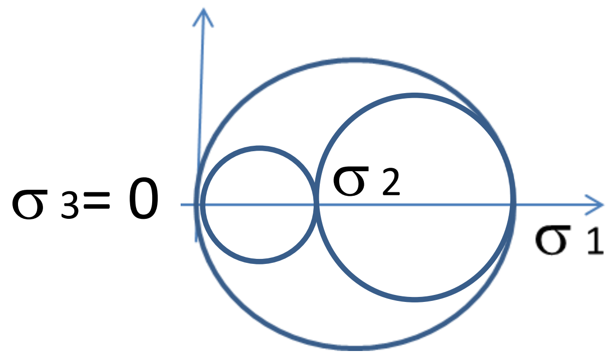
$\sigma_2 = 0$

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid

ISBN No. 0-13-227271-7

Esempi di stati di tensione

- Stato tensionale piano $\boldsymbol{\sigma_3 = 0}$

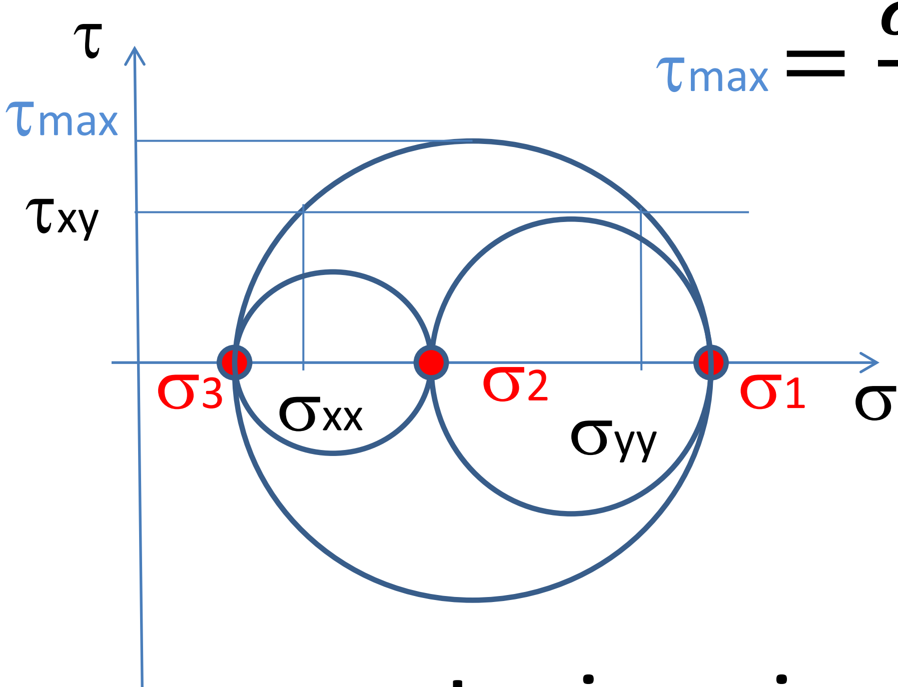


Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid

ISBN No. 0-13-227271-7

Rappresentazione dello stato tensionale mediante i cerchi di Mohr

Stato Triassiale



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}}{2}$$

$$R^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sigma_{yy}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + R$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - R$$

Stato di **tensione piana** se $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy} \neq 0$

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid

ISBN No. 0-13-227271-7

Deformazioni

- **Dilatazioni**
  normal strain

- **Scorrimenti**
  shear strain

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta u_y}{\Delta y} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta u_z}{\Delta z} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid
© 2008, Pearson Education
ISBN No. 0-13-227271-7

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

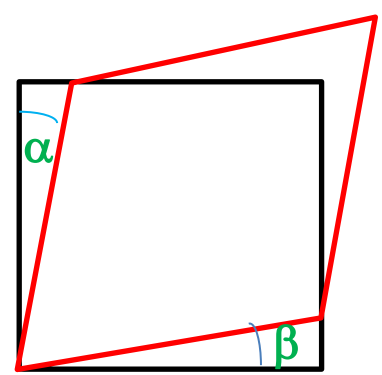
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

Tensore deformazioni

$$D = \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{matrix} \right\}$$

Tensore simmetrico = Diagonalizzabile



$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$

Tensore deformazioni principali

- $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ deformazioni principali autovalori di D

Tensore deformazioni

$$D' = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}$$

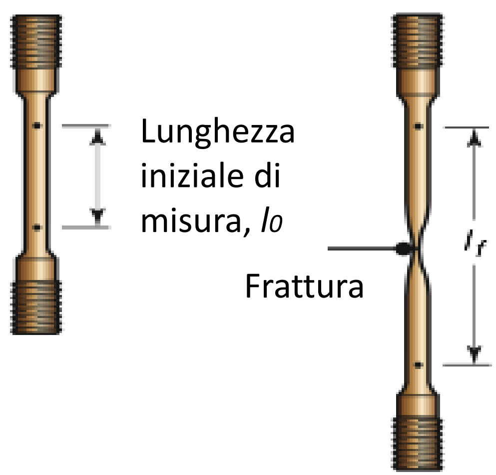
- Nel caso di deformazione piana solo
  - $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \neq 0$
  - $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid

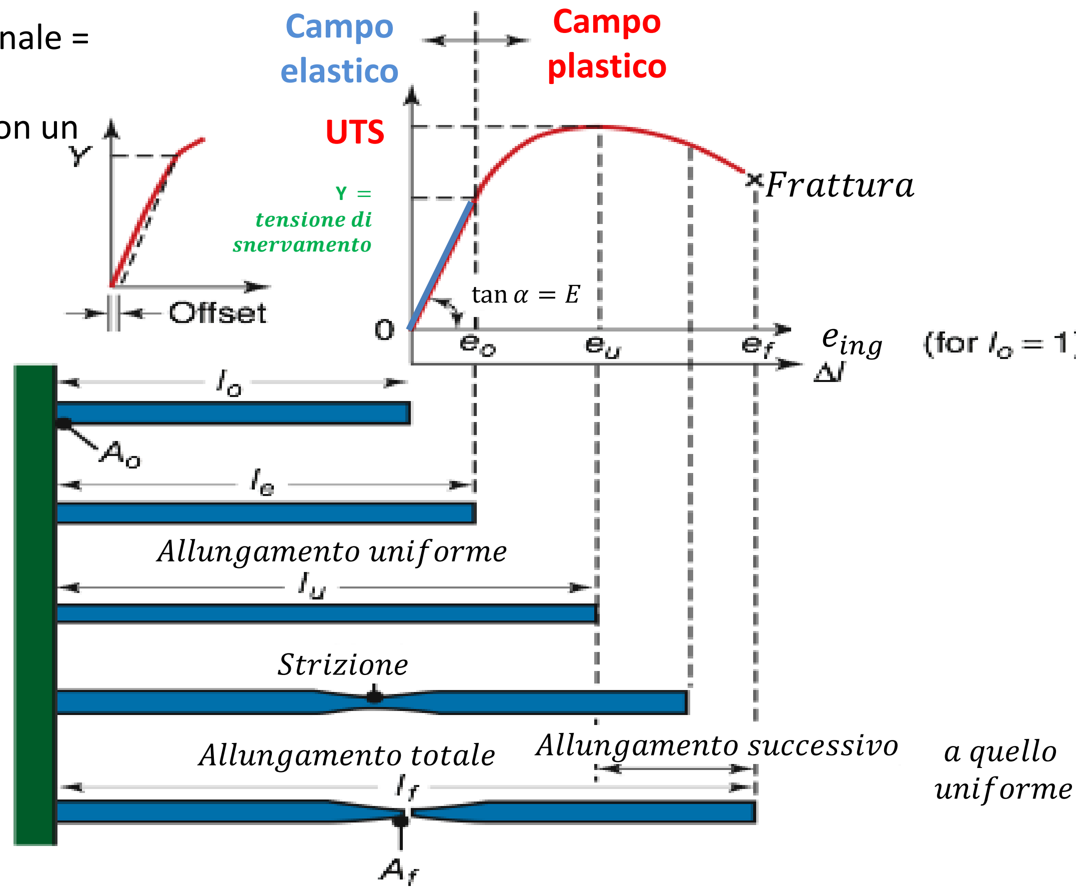
ISBN No. 0-13-227271-7

Curva tensione ingegneristica – deformazione ingegneristica

Determinazione Y convenzionale = intersezione curva con retta parallela al tratto lineare e con un offset pari 0.002



(a)



(b)

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid

ISBN No. 0-13-227271-7

Deformazione e tensione ingegneristica

- Deformazione ingegneristica

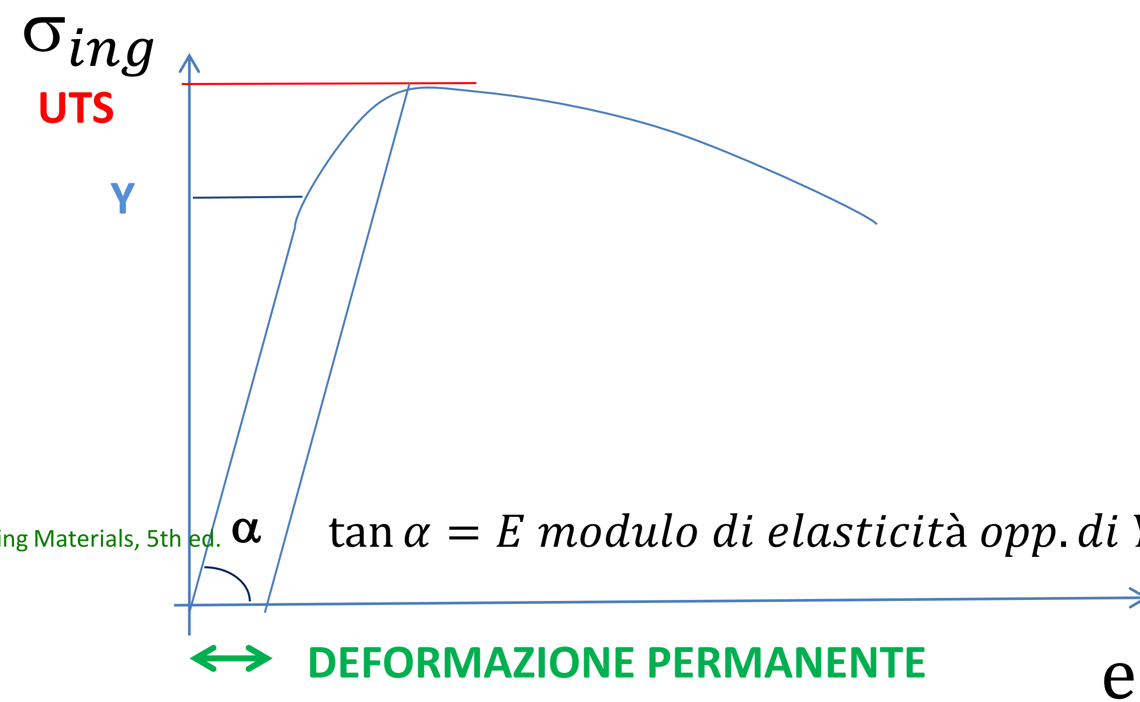
$$de = \frac{dl}{l_0} \xrightarrow{\text{integrazione}} e = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

- Tensione ingegneristica

$$\sigma_{ing} = \frac{P}{A_0}$$

Y=tensione di snervamento opp. Limite snervamento convenzionale

UTS=tensione di rottura



$$\tan\alpha = E \ modulo\ di\ elasticit\grave{a}\ opp.\ di\ Young$$

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid
© 2008, Pearson Education
ISBN No. 0-13-227271-7

- Il primo <u>tratto</u> è <u>lineare</u> ed è detto **elastico**

$$\sigma_{ing} = E \cdot e$$

- **Rapporto di Poisson** $\nu = \dfrac{[deformazione\ trasversale\ ]}{[deformazione\ longitudinale]}$

- $G = \dfrac{\tau}{\gamma} = \dfrac{\frac{1}{\nu}}{2\left(1+\frac{1}{\nu}\right)} E = \dfrac{\frac{1}{\nu}}{2\left(\frac{1+\nu}{\nu}\right)} E = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{1+\nu} E = \dfrac{m\,E}{2(m+1)}$ dove $m = \dfrac{1}{\nu}$

- **Legge di Hooke generalizzata**

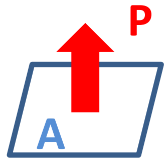
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_X}{E} - \frac{\sigma_Y + \sigma_Z}{mE} = \frac{\sigma_X}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_Y + \sigma_Z}{E}\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid
© 2008, Pearson Education
ISBN No. 0-13-227271-7

Tensione e deformazione vere

- **Tensione vera = True stress**



$$\boldsymbol{\sigma_t} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{A}}$$

- **Deformazione vera = True strain**

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l_0}}\right) = \ln(e+1)$$

Siccome la deformazione ingegneristica $e = \frac{l-l_0}{l_0} \Rightarrow \frac{l}{l_0} = e + 1$

$\varepsilon = ln(e+1)$ le **ε sono sommabili**

le **e non sono sommabili**

- Nel senso che **data una serie di deformazioni ingegneristiche applicate in successione, la deformazione ingegneristica totale NON è la somma della serie di deformazioni ingegneristiche** (vedere esempio successivo)

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid

ISBN No. 0-13-227271-7

Esempio di calcolo deformazioni

- Un pezzo di lunghezza di lunghezza iniziale 1.5 m viene deformato prima ad una lunghezza di 2.0 m poi di 2.5 m ed infine di 3.0 m calcolare tutte le deformazioni (vere ed ingegneristiche)
- L_0=1.5 m, L_1=2.0 m, L_2=2.5 m, L_3=3.0 m
- $\varepsilon_1 = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) = 0.288$ $\qquad e_1 = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = 0.333$
- $\varepsilon_2 = \ln\left(\frac{l_2}{l_1}\right) = 0.223$ $\qquad e_2 = \frac{l_2 - l_1}{l_1} = 0.250$
- $\varepsilon_3 = \ln\left(\frac{l_3}{l_2}\right) = 0.182$ $\qquad e_3 = \frac{l_3 - l_2}{l_2} = 0.200$
- $\varepsilon_{tot} = \ln\left(\frac{l_3}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{l_3}{l_2}\,\frac{l_2}{l_1}\,\frac{l_1}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{l_3}{l_2}\right) + \ln\left(\frac{l_2}{l_1}\right) + \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.693$
- $e_{tot} = e_1 + e_2 + e_3 = 0.783 \neq \frac{l_3 - l_0}{l_0} = 1$

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid
© 2008, Pearson Education
ISBN No. 0-13-227271-7

In **campo elastico** *non vale la conservazione del volume* $\qquad \nu \approx 0.3$ per i metalli

In **campo plastico** *vale la conservazione del volume* $\qquad \nu = 0.5$

Infatti

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \nu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_1\right)\right)$$

- $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) =$

$$= \ln\left(\frac{l_1}{l_{10}}\right) + \ln\left(\frac{l_2}{l_{20}}\right) + \ln\left(\frac{l_3}{l_{30}}\right) =$$

$$= \ln \frac{l_1\, l_2\, l_3}{l_{10} l_{20} l_{30}} = \ln\left(\frac{Volume}{Volume_0}\right) = ln(1) = 0$$

In campo plastico il volume rimane costante

- Poiché $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \neq 0$ ➡ $1 - 2\nu = 0$

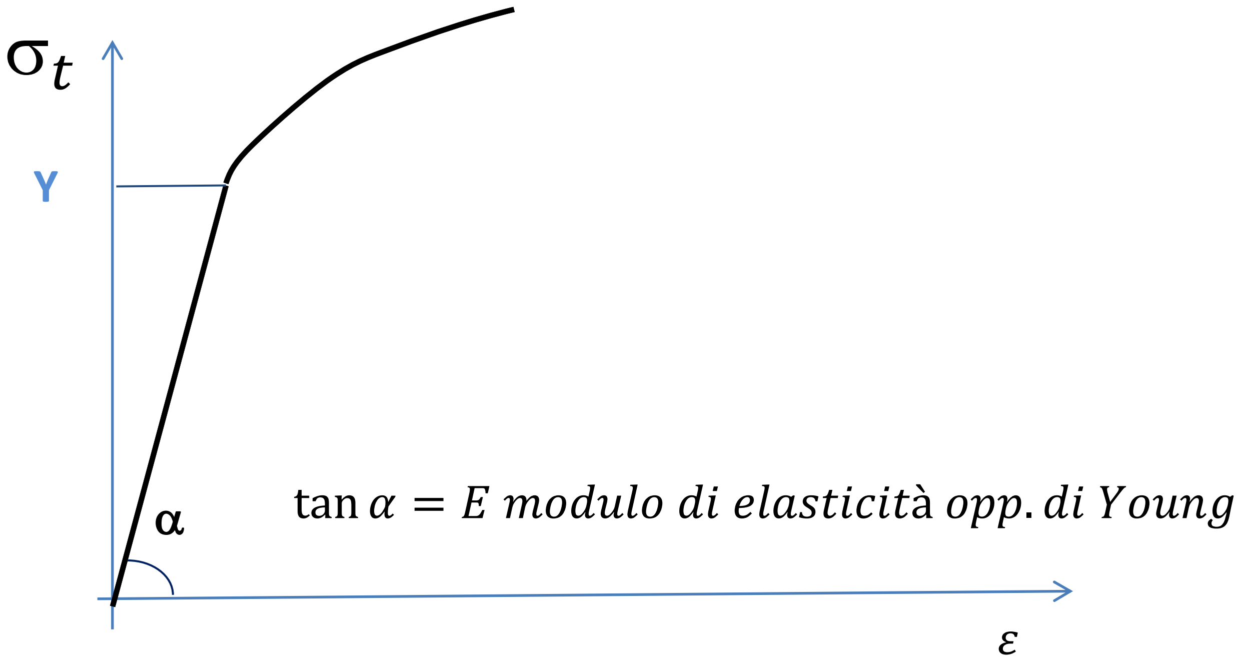
➡ $\nu = 0.5$

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid

ISBN No. 0-13-227271-7

Curva true stress – true strain

- Fino allo snervamento Y coincide con quella ingegneristica $\sigma_t = E \cdot \varepsilon$



- Poi diventa $\sigma_t = K\,\varepsilon^n$ dove n = esponente di incrudimento

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid

ISBN No. 0-13-227271-7

- $P = \sigma_t \mathrm{A} = \sigma_t \mathrm{A}_0 \exp(-\varepsilon)$
- $\varepsilon = ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = ln\left(\frac{A_0}{A}\right)$
- $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}\ \exp(\varepsilon)$ $\qquad$ $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0\ \exp(-\varepsilon)$
- $\frac{dP}{d\varepsilon} = \mathrm{A}_0 \exp(-\varepsilon)\frac{d\sigma_t}{d\varepsilon} - \sigma_t \mathrm{A}_0 \exp(-\varepsilon) =$

  $= \mathrm{A}_0 \exp(-\varepsilon)\left(\frac{d\sigma_t}{d\varepsilon} - \sigma_t\right) = 0$

<u>Poichè $dP = 0\ \ all'UTS$</u>

$$\left(\frac{d\sigma_t}{d\varepsilon} - \sigma_t\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma_t}{d\varepsilon} = \sigma_t$$

$$\sigma_t = K\varepsilon^n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{nK} \cdot \varepsilon_{UTS}^{n-1} = K\varepsilon_{UTS}^n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{n} = \varepsilon_{UTS}$$

Manufacturing Processes for Engineering Materials, 5th ed.
Kalpakjian • Schmid

ISBN No. 0-13-227271-7