Automi e Linguaggi Formali

Parte 16 – Riducibilità

Davide Bresolin
Ultimo aggiornamento: 29 maggio 2023

Università degli Studi di Padova

Sommario

Il problema della fermata

$$HALT_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ è una TM che si ferma su input } w\}$$

- Come possiamo dimostrare che $HALT_{TM}$ è indecidibile?
- Possiamo provare con la diagonalizzazione
- Sappiamo che A_{TM} è indecidibile: possiamo usare questo fatto per semplificare la dimostrazione?

Sommario

- Una riduzione è un modo per trasformare un problema in un altro problema
- Una soluzione al secondo problema può essere usata per risolvere il primo problema

Riducibilità

- Una riduzione è un modo per trasformare un problema in un altro problema
- Una soluzione al secondo problema può essere usata per risolvere il primo problema
- Se A è riducibile a B, e B è decididibile, allora A è decidibile
- Se A è riducibile a B, e A è indecididibile, allora A è indecidibile

Dimostrazioni per riduzione

Sono usate per dimostrare che un problema è indecidibile:

1. Assumi che B sia decidibile
2. Riduci A al problema B
   - costruisci una TM che usa B per risolvere A
3. Se A è indecidibile, allora questa è una contraddizione
4. L'assunzione è sbagliata e B è indecidibile

Il problema del vuoto

$$E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una TM tale che } L(M) = \emptyset\}$$

- La dimostrazione è per contraddizione e riduzione di A_{TM}
- Chiamiamo R la TM che decide E_{TM}
- Useremo R per costruire la TM S che decide A_{TM}

Stabilire se un linguaggio è regolare

$$REGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una TM tale che } L(M) \text{ è regolare}\}$$

- La dimostrazione è per contraddizione e riduzione di A_{TM}
- Chiamiamo R la TM che decide $REGULAR_{TM}$
- Useremo R per costruire la TM S che decide A_{TM}
- Capire come possiamo usare R per implementare S è meno ovvio di prima

Il problema dell'equivalenza

$$EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \mid M_1, M_2 \text{ TM tali che } L(M_1) = L(M_2)\}$$

- La dimostrazione è per contraddizione e riduzione di E_{TM} (problema del vuoto)
- Chiamiamo R la TM che decide EQ_{TM}
- Useremo R per costruire la TM S che decide E_{TM}

Riducibilità mediante funzione

Trasforma istanze del problema A in istanze del problema B mediante una funzione calcolabile

- Chiarisce e formalizza la riducibilità

Funzioni calcolabili

Definition

$f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ è una funzione calcolabile se esiste una TM M che su input w, termina la computazione avendo solo $f(w)$ sul nastro

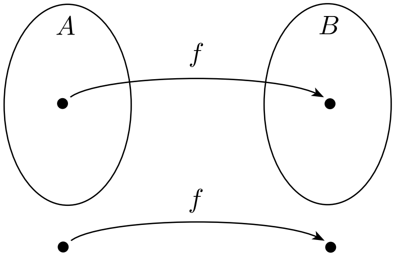
- Le operazioni aritmetiche sugli interi sono funzioni calcolabili
- Le trasformazioni di macchine di Turing possono essere funzioni calcolabili

Definizione

Definition

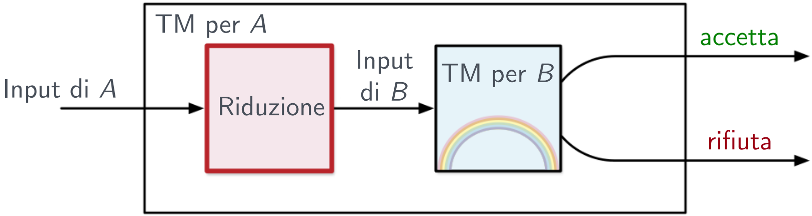
Un linguaggio A è riducibile mediante funzione al linguaggio B ($A \leq_m B$), se esiste una funzione calcolabile $f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ tale che

$$\text{per ogni } w : w \in A \text{ se e solo se } f(w) \in B$$



f è la riduzione da A a B

Se esiste una riduzione da A a B, possiamo risolvere A usando una soluzione per B:



Proprietà delle riduzioni

Theorem

Se $A \leq_m B$ e B è ??? , allora A è ???

Theorem

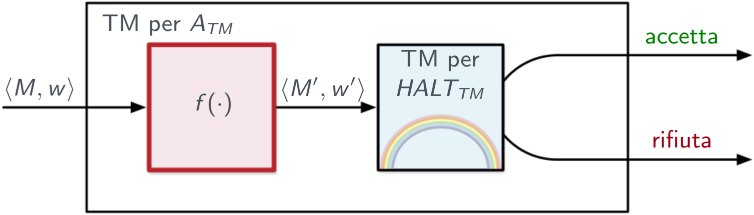
Se $A \leq_m B$ e A è ??? , allora B è ???

Il problema della fermata (2)

$$HALT_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ è una TM che si ferma su input } w\}$$

- Possiamo dimostrare che $A_{TM} \leq_m HALT_{TM}$?
- Qual è l'input della funzione di riduzione?
- Qual è l'output?
- Quali proprietà devono rispettare?

$A_{TM} \leq_m HALT_{TM}$?



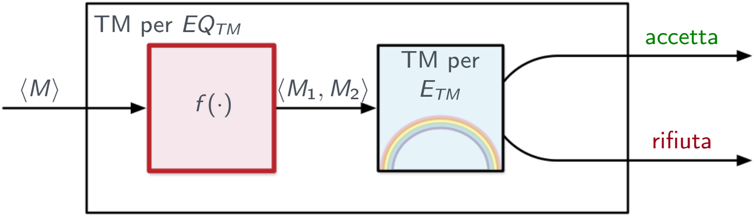
M accetta w se e solo se M' si ferma su w'

Il problema dell'equivalenza (2)

$$EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$$

- Possiamo dimostrare che $E_{TM} \leq_m EQ_{TM}$?
- Qual è l'input della funzione di riduzione?
- Qual è l'output?
- Quali proprietà devono rispettare?

$E_{TM} \leq_m EQ_{TM}$?



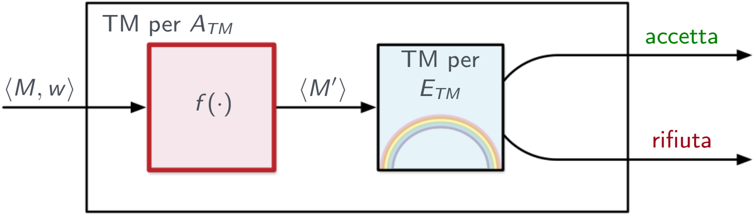
$$L(M) = \emptyset \text{ se e solo se } L(M_1) = L(M_2)$$

Il problema del vuoto (2)

$$E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una TM tale che } L(M) = \emptyset\}$$

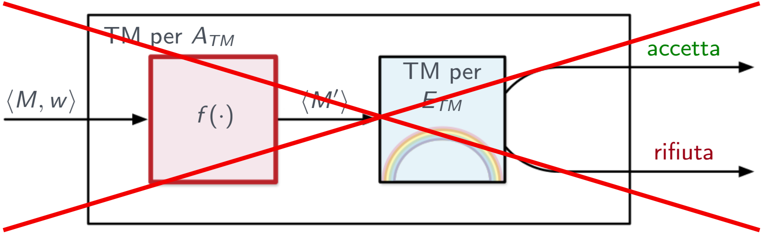
- Possiamo dimostrare che $A_{TM} \leq_m E_{TM}$?
- Qual è l'input della funzione di riduzione?
- Qual è l'output?
- Quali proprietà devono rispettare?

$A_{TM} \leq_m E_{TM}$?



M accetta w se e solo se $L(M') = \emptyset$

$A_{TM} \leq_m E_{TM}$?

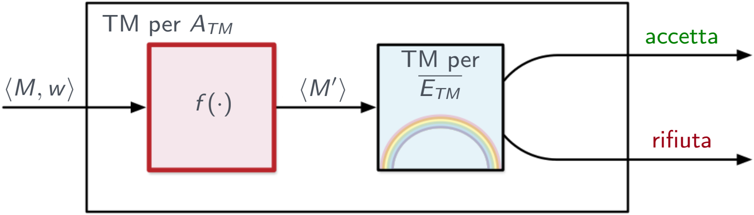


$$M \text{ accetta } w \text{ se e solo se } L(M') = \emptyset$$

STOP!!!

- Non sappiamo come ridurre il problema dell'accettazione al problema del vuoto!

$A_{TM} \leq_m \overline{E_{TM}}$



M accetta w se e solo se $L(M') \neq \emptyset$

Proprietà delle riduzioni (2)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Theorem

Se $A \leq_m B$ e B è ??? , allora A è ???

Theorem

Se $A \leq_m B$ e A è ??? , allora B è ???

8

Il problema dell'equivalenza (2)

$$EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1, M_2 \text{ TM tali che } L(M_1) = L(M_2)\}$$

- Possiamo dimostrare che EQ_{TM} non è né Turing-riconoscibile né co-Turing-riconoscibile?
- Quali riduzioni possiamo usare per dimostrare che EQ_{TM} non è Turing-riconoscibile?
- Quali riduzioni possiamo usare per dimostrare che EQ_{TM} non è co-Turing-riconoscibile?

Esercizi

1. Usa una riduzione mediante funzione per dimostrare che $ALL_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M$ è una TM tale che $L(M) = \Sigma^*\}$ è indecidibile.
2. Sia $X = \{\langle M, w \rangle \mid M$ è una TM a nastro singolo che non modifica la porzione di nastro che contiene l'input $w\}$. Dimostra che X è indecidibile.
3. Se $A \leq_m B$ e B è un linguaggio regolare, allora ciò implica che A è un linguaggio regolare? Perché si o perché no?
4. Mostra che A_{TM} non è riducibile mediante funzione a E_{TM}. In altre parole, dimostra che non esiste una funzione calcolabile che riduce A_{TM} ad E_{TM}.
5. Mostra che se A è Turing-riconoscibile e $A \leq_m \overline{A}$, allora A è decidibile.