Uno strano linguaggio

Considera il linguaggio

$$L_1 = \{a^\ell b^m c^n \mid \ell, m, n \geq 0 \text{ e se } \ell = 1 \text{ allora } m = n\}.$$

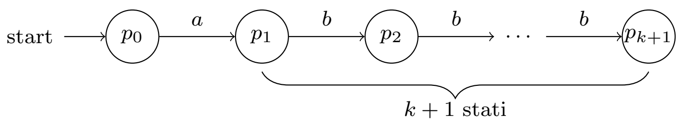
(a) Mostra che L_1 non è regolare.

(b) Mostra che L_1 si comporta come un linguaggio regolare rispetto al Pumping Lemma. In altre parole, dai una lunghezza del pumping k e dimostra che L_1 soddisfa le condizioni del Pumping Lemma per questo valore di k.

(c) Spiega perché i punti (a) e (b) non contraddicono il Pumping Lemma.

Soluzione

(a) **Prima alternativa:** Possiamo dimostrare che L_1 non è regolare modificando la dimostrazione che il linguaggio $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ non è regolare. Supponiamo che L_1 sia regolare: allora deve esistere un DFA A che lo riconosce. Il DFA avrà un certo numero di stati k. Consideriamo la computazione di A con l'input ab^k:



Poiché la sequenza di stati $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$ che legge b^k è composta da $k+1$ stati, allora esiste uno stato che si ripete: possiamo trovare $i < j$ tali che $p_i = p_j$. Chiamiamo q questo stato. Cosa succede quando l'automa A legge c^i partendo da q?

- Se termina in uno stato finale, allora l'automa accetta, sbagliando, la parola ab^jc^i.
- Se termina in uno stato non finale allora l'automa rifiuta, sbagliando, la parola ab^ic^i

In entrambi i casi abbiamo trovato un assurdo, quindi L_1 non può essere regolare.

Seconda alternativa: Per le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari, sappiamo che l'intersezione di linguaggi regolari è un linguaggio regolare. Se intersechiamo L_1 con un linguaggio regolare e quello che otteniamo non è un linguaggio regolare, allora possiamo concludere che L_1 non può essere regolare. Consideriamo il linguaggio $L' = L_1 \cap \{ab^*c^*\} = \{ab^mc^m \mid m \geq 0\}$, e usiamo il Pumping Lemma per dimostrare che non è regolare. Supponiamo per assurdo che L' sia regolare:

- sia k la lunghezza data dal Pumping Lemma;
- consideriamo la parola $w = ab^kc^k$, che appartiene ad L' ed è di lunghezza maggiore di k;
- sia $w = xyz$ una suddivisione di w tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq k$;
- siccome $|xy| \leq k$, allora x e y devono cadere all'interno del prefisso ab^k della parola w. Ci sono due casi possibili, secondo la struttura di y:
  - y contiene la a iniziale. In questo caso la parola xy^2z non appartiene ad L' perché contiene due a;
  - y contiene solamente b. In questo caso la parola xy^2z non appartiene ad L' perché contiene più b che c.

In entrambi i casi abbiamo trovato un assurdo quindi L' non è regolare, e possiamo concludere che neanche L_1 può essere regolare.

(b) Mostriamo che L_1 si comporta come un linguaggio regolare rispetto al Pumping Lemma.

- Poniamo come lunghezza del pumping $k = 2$.
- Data una qualsiasi parola $w = a^\ell b^m c^n \in L_1$ di lunghezza maggiore o uguale a 2, si possono presentare vari casi, secondo il numero di a presenti nella parola:
  - se c'è una sola a, allora $w = ab^mc^m$. Scegliamo la suddivisione $x = \varepsilon$, $y = a$ e $z = b^mc^m$. Per ogni esponente $i \geq 0$, la parola $xy^iz = a^ib^mc^m$ appartiene a L_1: se $i = 1$ allora il numero di b è uguale al numero di c come richiesto, mentre se $i \neq 1$ il linguaggio non pone condizioni sul numero di b e c;

- se ci sono esattamente due a, allora $w = aab^mc^n$. Scegliamo la suddivisione $x = \varepsilon$, $y = aa$ e $z = b^mc^n$. Per ogni esponente $i \geq 0$, la parola $xy^iz = a^{2i}b^mc^n$ appartiene a L_1: il numero di a è pari, quindi sempre diverso da 1, e ricadiamo nelle situazioni in cui il linguaggio non pone condizioni sul numero di b e c;
- se ci sono almeno tre a, allora $w = a^\ell b^mc^n$ con $\ell \geq 3$. Scegliamo la suddivisione $x = \varepsilon$, $y = a$ e $z = a^{\ell-1}b^mc^n$. Per ogni esponente $i \geq 0$, la parola $xy^iz = a^{i+\ell-1}b^mc^n$ contiene almeno due a, e quindi appartiene a L_1, perché rientra nelle situazioni in cui il linguaggio non pone condizioni sul numero di b e c;
- se non ci sono a, allora $w = b^mc^n$. Scegliamo la suddivisione che pone $x = \varepsilon$, y uguale al primo carattere della parola e z uguale al resto della parola. Per ogni esponente $i \geq 0$, la parola xy^iz sarà nella forma b^pc^q per qualche $p, q \geq 0$ e quindi appartenente a L_1, perché quando non ci sono a il linguaggio non pone condizioni sul numero di b e c.

In tutti i casi possibili la parola può essere pompata senza uscire dal linguaggio, quindi L_1 rispetta le condizioni del Pumping Lemma.

(c) Il Pumping Lemma stabilisce che se un linguaggio è regolare, allora deve rispettare certe condizioni. Il verso opposto dell'implicazione non è vero: possono esistere linguaggi, come L_1, che rispettano le condizioni ma non sono regolari. Di conseguenza, i punti (a) e (b) non contraddicono il lemma.