

PARTE A

Circuiti elettrici in regime stazionario

Premessa – I fenomeni elettrici si possono manifestare in contesti molto differenti. Fra questi si inseriscono senz'altro i *circuiti elettrici*, che sono strutture la cui conoscenza generale è ampiamente diffusa. Da essi partiremo, ma in seguito vedremo anche strutture elettriche non propriamente circuitali, ma che potremo studiare estendendo e adattando le conoscenze acquisite nello studio dei circuiti elettrici.

La descrizione dei fenomeni elettrici fa uso di diverse *quantità o grandezze elettriche*. Fra queste, due sono basilari: la *corrente elettrica* e la *tensione elettrica*. Se vogliamo stabilire una relazione di causa ed effetto, potremmo affermare, in modo semplicistico, che la corrente elettrica che percorre un tratto di circuito è l'effetto della tensione elettrica applicata ai capi di tale ramo circuitale.

Il concetto di circuito non si applica solo in campo elettrico, ma anche in differenti altri ambiti. In seguito vedremo, per esempio, anche i circuiti magnetici. Per prendere conoscenza con i modelli circuitali consideriamo dapprima un caso non elettrico, molto familiare.

Capitolo 1 - Tensioni e correnti elettriche, Principi di Kirchhoff

1.1 Circuito idraulico – Nella sottostante Fig. 1 è mostrato un collage che rappresenta realisticamente un circuito idraulico¹.

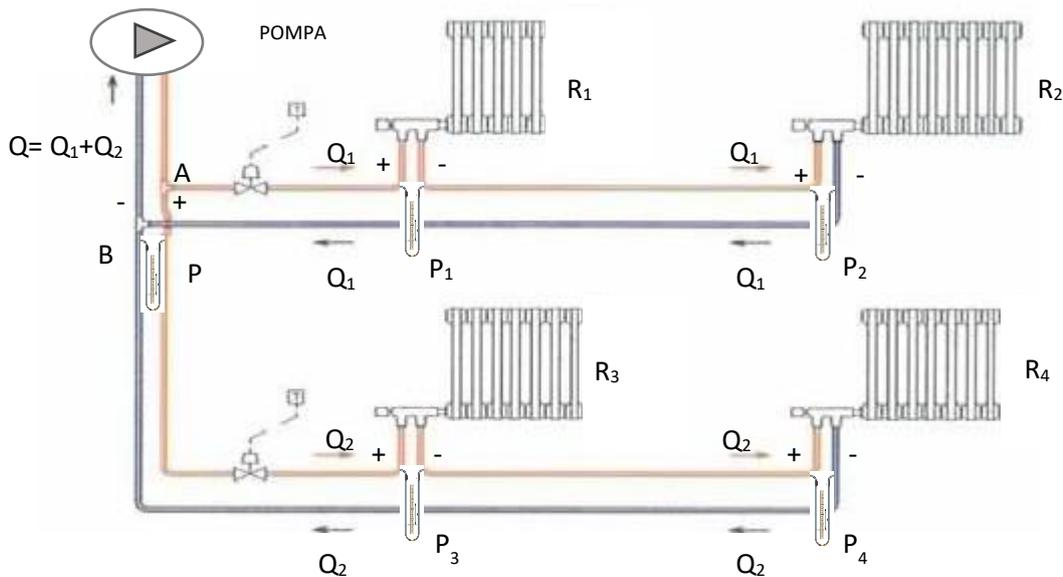


Fig. 1 - Rappresentazione realistica di un circuito idraulico

Analizziamolo per punti per confrontarlo poi con un circuito elettrico e trovare una corrispondenza fra grandezze elettriche (tensioni, correnti) e le più familiari grandezze idrauliche (pressioni, portate).

- C'è una pompa che fa circolare la portata Q nel circuito applicando allo stesso un salto di pressione P (prevalenza della pompa) fra il nodo di mandata A e il nodo di ritorno B , fra i quali è inserito il manometro differenziale² che si intravede in figura.
- Il circuito è formato da due rami in parallelo. Sono in parallelo due rami quando hanno in comune i loro due punti di ingresso e di uscita e pertanto sono sottoposti allo stesso salto di pressione fra ingresso e uscita. I due rami in parallelo in figura fanno capo ai nodi A e B .
- Ciascun ramo è formato da due radiatori (carichi idraulici) fra loro in serie. Sono in serie due elementi del circuito quando sono percorsi dalla stessa portata: nel caso in esame, la portata Q_1 per il ramo formato dalla serie di R_1 e R_2 ; Q_2 per quello formato dalla serie di R_3 e R_4 .

¹ Si riconosce che riproduce un impianto di riscaldamento, p.es. da pannello fotovoltaico; tuttavia, facciamo riferimento alla sola dinamica del fluido (acqua) ignorando ogni problematica di scambio termico. Come se circolasse acqua tutta alla stessa temperatura.

² Un manometro differenziale misura la differenza di pressione (pressione differenziale) fra i due punti, aventi pressioni assolute differenti, fra i quali è collegato.

- d. La pressione P della pompa si ripartirà sugli elementi R_1 e R_2 per le frazioni P_1 e P_2 , misurate dai manometri differenziali che si intravedono in figura installati fra i capi di ciascun radiatore. Analogamente, la stessa pressione P si ripartirà nelle frazioni P_3 e P_4 , sugli elementi R_3 e R_4 rispettivamente, nel secondo ramo.
- e. La portata Q si ripartirà fra i due rami in parallelo nelle frazioni Q_1 e Q_2 dipendenti dalle resistenze idrauliche totali dei due rami, dalle quali, data la pressione P , dipenderanno appunto le portate Q_1 e Q_2 .

Abbandoniamo la rappresentazione realistica, quasi fotografica di Fig. 1 e tracciamo la sua rappresentazione schematica circuitale (modello circuitale). La possiamo vedere in Fig. 2: a sinistra è rispettata anche la disposizione spaziale dei componenti dell'impianto idraulico che appare in Fig. 1, a destra in altra forma più ordinata ed elegante, ma del tutto equivalente. Nella figura di sinistra sono simbolicamente mostrati anche il manometro differenziale che misura la pressione P fra i nodi A e B (mandata e ritorno della pompa) e un flussimetro per la misura della portata Q_2 che interessa il secondo dei due rami in parallelo.

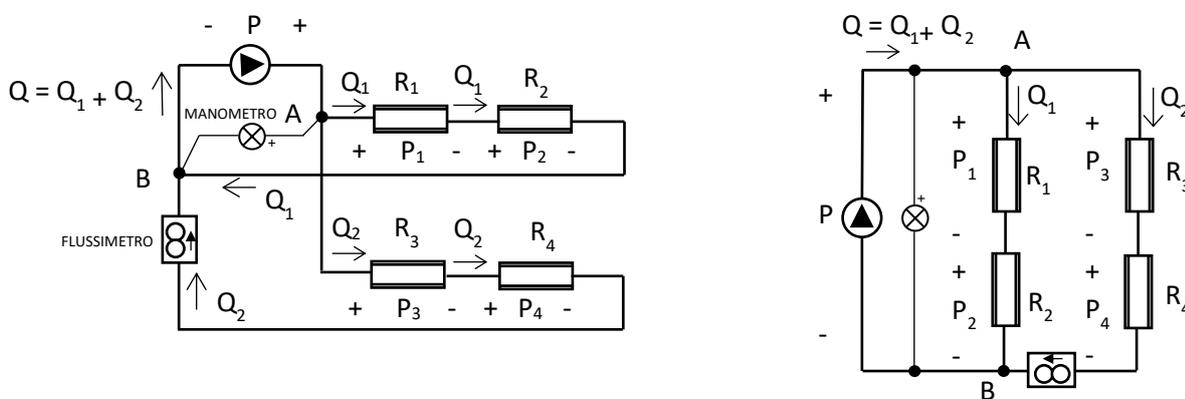


Fig. 2 - Schema circuitale della struttura di Fig. 1 (simboli di fantasia).

1.2 Circuito elettrico – Qui sotto in Fig. 3 è mostrato un collage che rappresenta realisticamente un circuito elettrico. Analizziamo anch'esso per identificare le similitudini con il circuito idraulico appena visto.

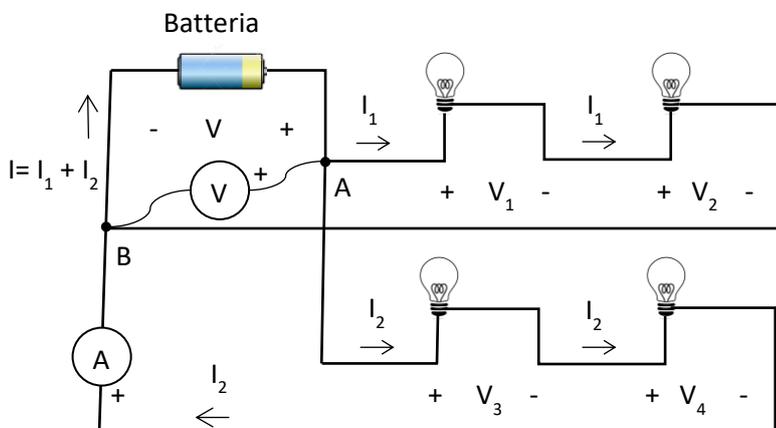


Fig. 3 - Rappresentazione realistica di un circuito elettrico

La sua descrizione è la seguente:

- C'è una batteria che applica una differenza di potenziale V (tensione) fra i nodi A e B del circuito connessi ai suoi morsetti positivo e negativo, producendo una corrente I assorbita nel circuito. La tensione è misurata con il voltmetro "V" di figura, inserito fra A e B.
- Il circuito è formato da due rami in parallelo. Sono in parallelo due rami quando i loro terminali sono connessi alla stessa coppia di nodi e pertanto sono sottoposti alla stessa tensione fra ingresso e uscita (fra i terminali di ciascun ramo). I due circuiti in parallelo fanno capo ai nodi A e B.
- Ciascun ramo parallelo è formato da due lampade a incandescenza (carichi elettrici resistivi) fra loro in serie³. Sono in serie due carichi quando sono percorsi dalla stessa corrente: corrente I_1 per il ramo formato dalla serie di R_1 e R_2 ; I_2 per quello formato dalla serie di R_3 e R_4 .
- La tensione V si ripartirà sugli elementi R_1 e R_2 per le frazioni V_1 e V_2 , misurabili con voltmetri inseriti fra i terminali dei resistori (non mostrati in figura). Analogamente la stessa tensione si ripartirà nelle quote V_3 e V_4 , sugli elementi R_3 e R_4 rispettivamente, nel secondo ramo.
- La corrente I si ripartirà fra i due rami in parallelo nelle quote I_1 e I_2 , dipendenti dalla resistenza elettrica totale dei due rami dalla quale, data la tensione V , risultano le rispettive correnti. La corrente I_2 è misurata dall'ampmetro "A" mostrato in figura, inserito sul secondo dei due circuiti in parallelo.

Il corrispondente circuito elettrico simbolico (modello circuitale) lo vediamo in Fig. 4: a sinistra è conservata anche la disposizione spaziale dei componenti come in quello di Fig. 3; a destra è in altra forma più ordinata ed elegante, ma totalmente equivalente.

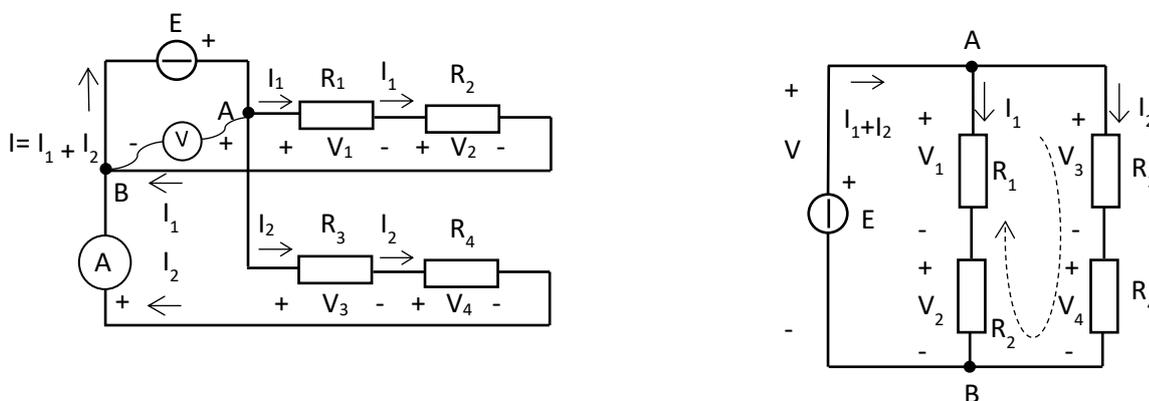


Fig. 4 - Schema circuitale della struttura di Fig. 3.

Facciamo anche la descrizione del circuito di Fig. 4 così da anticipare alcuni concetti che saranno meglio definiti ed approfonditi nei prossimi capitoli.

- C'è un generatore ideale di tensione che impone una differenza di potenziale V (tensione), pari alla sua *forza elettromotrice* (fem) E , fra i nodi A e B del circuito, connessi ai suoi morsetti positivo e negativo, producendo una corrente assorbita I nel circuito. La tensione è misurata con un voltmetro inserito fra A e B (mostrato in figura).
Così come la portata Q [kg/s o l/s] in una sezione di un circuito idraulico esprime il rapporto fra la quantità di liquido ΔM [kg o l] che, nel tempo Δt [s], attraversa la sezione in un predefinito verso e il tempo Δt stesso, così l'intensità I della corrente elettrica [A o C/s] in una sezione di un circuito elettrico

³ Il collegamento in serie di lampade non è frequente; qui è usato a scopo didattico.

esprime il rapporto fra la quantità di carica Δq [C] che, nel tempo Δt [s], attraversa la sezione in un predefinito verso e il tempo Δt stesso. Il concetto sarà meglio definito e approfondito nel Cap. 3.

Analogamente, così come la differenza di pressione P [Pa] fra mandata e ritorno di un circuito idraulico è un'indicazione della forza distribuita lungo il circuito, che sostiene il movimento del fluido nella direzione prestabilita, così la differenza di potenziale (tensione) V fra il terminale assunto positivo e quello assunto negativo di un circuito elettrico misura la forza (elettrica) distribuita lungo il circuito, che sostiene il movimento (il flusso) delle cariche elettriche (cioè produce la corrente elettrica). Il concetto sarà meglio definito e approfondito nel Cap. 2.

- b. Il circuito è formato da due rami (circuiti) in parallelo. Sono in parallelo due rami quando i loro terminali sono connessi alla stessa coppia di nodi e pertanto sono sottoposti alla stessa tensione fra i loro terminali. I due rami in parallelo fanno capo ai nodi A e B.
- c. Ciascun ramo è formato da due resistori (carichi elettrici) fra loro in serie. Sono in serie due carichi quando sono percorsi dalla stessa corrente: la corrente I_1 per il ramo formato dalla serie di R_1 e R_2 ; I_2 per quello formato dalla serie di R_3 e R_4 .
- d. La tensione $V=E$ si ripartirà sugli elementi R_1 e R_2 con le quote V_1 e V_2 , misurabili con voltmetri inseriti fra i terminali dei resistori (non mostrati in figura). Analogamente la stessa tensione si ripartirà nelle quote V_3 e V_4 , sugli elementi R_3 e R_4 rispettivamente, nel secondo ramo. *Come una tensione totale si ripartisca su resistori in serie lo studieremo in seguito ricavando la regola del partitore di tensione resistivo.*
- e. La corrente I si ripartirà fra i due rami in parallelo nelle quote I_1 e I_2 , dipendenti dalla resistenza elettrica totale dei due rami. La corrente I_2 è misurata dall'amperometro "A" mostrato in figura. *Come una corrente totale si ripartisca su resistori in parallelo lo studieremo in seguito ricavando la regola del partitore di corrente resistivo.*

1.3 Principi di Kirchhoff – Dalle esemplificazioni sopra fatte ci appare evidente che tensioni e correnti di un circuito elettrico (come le pressioni e le portate di quello idraulico) sono vincolate da precise *leggi topologiche* cioè che dipendono dal come i vari rami ed elementi del circuito sono collegati fra di loro e non dalla natura dei componenti: sono i principi di Kirchhoff che ora proviamo a formulare.

Principio di Kirchhoff per le correnti – Se consideriamo per esempio il nodo B di Fig. 4, in esso confluiscono le correnti I_1 e I_2 (correnti entranti, perché definite con verso entrante nel nodo) e defluisce la corrente I (corrente uscite, perché definita con verso uscite dal nodo). Se non c'è deposito o prelievo di carica nel nodo (se ci fosse non saremmo in regime stazionario) deve valere, come scritto in figura, il bilancio $I = I_1 + I_2$.

Generalizzando possiamo formulare il seguente **Principio di Kirchhoff per le correnti**: se non c'è deposito o prelievo di carica nei nodi deve valere, *per ogni nodo e per ogni istante di tempo (quindi anche se le correnti fossero variabili nel tempo)*:

$$\sum i_{entranti} = \sum i_{uscite} \quad \text{per ogni nodo}$$

od anche

$$\sum i_{entranti} - \sum i_{uscite} = 0 \quad \text{per ogni nodo}$$

dove le correnti entranti sono quelle definite con verso positivo entrante nel nodo (ma alcune di esse o anche tutte potrebbero essere di valore negativo) e le correnti uscenti sono quelle definite con verso positivo uscente dal nodo (ma alcune di esse o anche tutte potrebbero essere di valore negativo). Le sommatorie sono quindi sommatorie algebriche.

Il principio di Kirchhoff per le correnti si può applicare anche a porzioni di circuito diverse dai nodi. Più precisamente si applica ad ogni insieme di lati del circuito che attraversano una superficie chiusa *che contiene parte del circuito stesso* (questi insiemi di lati sono detti *insiemi di taglio*). Per il momento limitiamoci ai nodi, nel qual caso l'insieme di taglio è costituito dai lati connesso al nodo e la superficie chiusa è quella che contiene il solo nodo.

Principio di Kirchhoff per le tensioni – Nel descrivere il circuito di Fig. 4 abbiamo affermato che la tensione V fra A (assunto nodo positivo) e B (assunto nodo negativo) si ripartisce sugli elementi R_1 e R_2 con le quote V_1 e V_2 . I valori delle tensioni parziali V_1 e V_2 seguono la regola del partitore di tensione (non ancora studiata) ma comunque è ragionevole pensare che, con le scelte dei morsetti positivi e negativi di figura, deve valere $V = V_1 + V_2$ ovvero $V_1 + V_2 - V = 0$. Quest'ultima versione la possiamo interpretare come *la somma delle tensioni che incontriamo percorrendo in senso orario il percorso chiuso formato da R_1 e R_2 e dal generatore ideale la cui tensione ai morsetti è V , prese con il segno proprio (cioè sommate con il segno positivo) se incontrate dal morsetto positivo a quello negativo, con il segno negativo se, viceversa, le incontriamo dal morsetto negativo a quello positivo.*

Stesso ragionamento lo possiamo applicare con riferimento al ramo di R_3 e R_4 per il quale possiamo scrivere $V = V_3 + V_4$ ed anche $V_3 + V_4 - V = 0$.

Generalizzando possiamo stabilire il seguente **Principio di Kirchhoff per le tensioni**: *considerando i percorsi chiusi formati da lati del circuito (maglie), percorsi a piacere in uno dei due possibili versi, deve valere, per ciascuno di essi e per ogni istante di tempo (quindi anche se le tensioni fossero variabili nel tempo):*

$$\sum v_{\text{concordi al verso di percorrenza}} - \sum v_{\text{discordi al verso di percorrenza}} = 0 \quad \text{per ogni maglia}$$

dove le tensioni "concordi" sono quelle definite con verso positivo tale che le si incontra passando dal terminale + al terminale - (ma alcune di esse o anche tutte potrebbero essere di valore negativo) e le tensioni "discordi" sono quelle definite con verso positivo che si incontra passando dal - al + (ma alcune di esse o anche tutte potrebbero essere di valore negativo). Le sommatorie sono quindi sommatorie algebriche.

Se prendiamo in considerazione, per esempio, la maglia di destra del circuito a destra di Fig. 4, evidenziata con la freccia a tratteggio che ne definisce anche il verso di percorrenza (scelto arbitrariamente), dobbiamo scrivere

$$V_3 + V_4 - V_2 - V_1 = 0$$

ovvero

$$V_3 + V_4 = V_1 + V_2$$

che banalmente risulta anche dal fatto che entrambe le somme ai due membri abbiamo visto essere pari a V .

Capitolo 2 - Carica elettrica – Campo elettrico - Tensione elettrica

Premessa – Questo capitolo è dedicato ai richiami dei concetti di carica elettrica, campo elettrico, tensione elettrica che dovrebbero essere noti dagli insegnamenti di Fisica. Se necessario, tali concetti possono essere rinfrescati con lo studio delle parti incorniciate di “Approfondimento”.

2.1 Carica elettrica - Possiamo definire la carica elettrica come uno stato particolare della materia. Ogni corpo è costituito da una certa quantità di materia che si misura attraverso la massa attribuita al corpo stesso. La massa si manifesta attraverso, per esempio, il fenomeno dell’attrazione gravitazionale (o della forza d’inerzia).

La massa può essere elettricamente neutra oppure elettricamente carica. Fra due corpi dotati rispettivamente delle cariche elettriche q_1 e q_2 (misurate in C, (coulomb)), oltre alla forza gravitazionale legata alle loro masse, si manifesta anche la forza di attrazione coulombiana (attrazione elettrica).

La carica elettrica può essere sia di segno positivo che negativo e pertanto la forza elettrica coulombiana può assumere sia segno positivo (attrazione) che negativo (repulsione). Cariche di uguale segno si respingono; di segno contrario si attraggono.

Un concetto fondamentale dedotto dall’osservazione sperimentale e noto dai corsi di Fisica è quello di **carica elettrica**.

Possiamo definire la carica elettrica come uno stato particolare della materia. Ogni corpo è costituito da una certa quantità di materia che si misura attraverso la massa attribuita al corpo stesso. La massa si manifesta attraverso, per esempio, il fenomeno dell’attrazione gravitazionale, secondo la quale due corpi di massa m_1 e m_2 i cui baricentri siano distanti d si attraggono con la forza di attrazione gravitazionale

$$f = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad [\text{N, (newton)}]$$

ove $G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, misurando le masse in Kg (chilogrammi) e la distanza d in m (metri).

La massa può essere elettricamente neutra oppure elettricamente carica. Fra due corpi dotati di cariche elettriche q_1 e q_2 rispettivamente (misurate in C, (coulomb, vedi oltre)), oltre alla forza gravitazionale legata alle loro masse, si manifesta anche la forza di attrazione coulombiana⁴ (attrazione elettrica)

$$f = -\alpha \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad [\text{N, (newton)}]$$

ove $\alpha = 8.987 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$ nel caso di cariche poste nel vuoto a distanza d , misurata in m (metri).



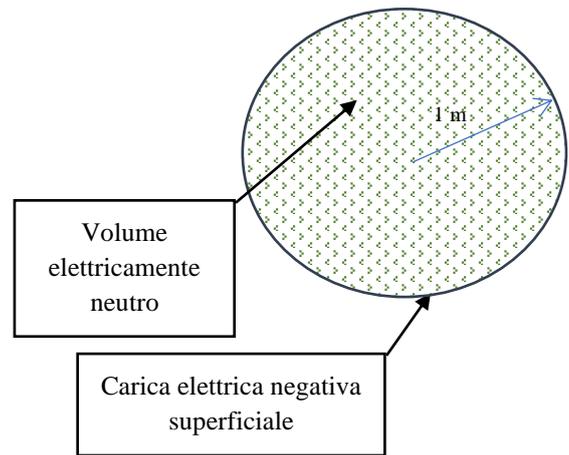
4 Charles Augustin de Coulomb (Angoulême, 14 giugno 1736 – Parigi, 23 agosto 1806) è stato un ingegnere e fisico francese. Con la sua legge di Coulomb, è considerato il fondatore della teoria matematica dell’elettricità e del magnetismo.

La carica elettrica può essere sia di segno positivo che negativo e pertanto la forza F può assumere sia segno positivo (attrazione) che negativo (repulsione). Cariche di uguale segno si respingono; di segno contrario si attraggono.

Le cariche più piccole in natura sono quella dell'elettrone e quella del protone cui si assegnano rispettivamente i valori $e^- = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ed $e^+ = +1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Tutte le cariche in natura, negative e positive, sono multiple di queste quantità, ma ciò può essere in genere ignorato nelle problematiche ingegneristiche, assumendo che le cariche possano assumere ogni valore, senza soluzione di continuità.

Problema 2.1: Su una sfera metallica, piena, del raggio $r=1\text{m}$ viene depositata la carica elettrica di $Q = -1\text{C}$ mediante la deposizione di n_e elettroni.

- Calcolare il valore di n_e
- Studiare la distribuzione degli elettroni sulla sfera nel regime elettrostatico raggiunto.



Il numero di elettroni n_e si calcola con la

$$n_e = \frac{Q}{e^-} = \frac{-1}{-1.602 \cdot 10^{-19}} = 6,242 \cdot 10^{18}$$

da cui si può affermare che la carica di 1 C (negativa) è pari a quella complessiva di $6,242 \cdot 10^{18}$ elettroni.

Le cariche elettriche possono essere fisse (impossibilitate a muoversi, per esempio perché ancorate a nuclei atomici in corpi in quiete; è il caso dei materiali isolanti, vedi oltre), o mobili, per esempio trasportate dal corpo sul quale sono depositate, o perfino libere di muoversi all'interno del corpo o del mezzo stesso (come è il caso dei materiali metallici, vedi oltre).

Gli elettroni iniettati sulla sfera metallica del problema sono quindi liberi di muoversi al interno del volume sferico e, sotto l'effetto della forza di repulsione elettrica reciproca finiranno col disporsi uniformemente distribuiti sulla superficie esterna della sfera, al di fuori della quale non possono andare se si suppone che il mezzo circostante sia un mezzo isolante (cioè che non permette il movimento delle cariche al suo interno), come mostrato in figura.

Per quantificare il problema, oltre alla carica elettrica nel suo complesso, possiamo definire la densità di carica, con riferimento a differenti entità geometriche.

Per esempio, la densità volumica (o volumetrica) di carica in un punto P dello spazio possiamo definirla come:

$$\rho_c(P) \cong \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad \text{o meglio} \quad \rho_c(P) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right]$$

ove Δv è la porzione (piccola) di volume, intorno al punto P , che contiene la carica Δq .

Nel caso del problema, la densità volumica di carica in ogni punto interno della sfera è nulla, essendo la carica disposta sulla superficie. La densità volumica nei punti della superficie è invece infinita.

In modo analogo possiamo definire la densità areica (o superficiale) di carica in un punto P di una superficie sede di carica elettrica definendola in ogni punto come:

$$\sigma_c(P) \cong \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad \text{o meglio} \quad \sigma_c(P) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

ove ΔS è la porzione (piccola) di superficie intorno al punto P sulla quale è depositata la carica Δq .
Nel caso del problema, la densità areica di carica in ogni punto della superficie della sfera è:

$$\sigma_c(P) = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{-1}{4\pi 1^2} = -7.958 \cdot 10^{-2} \quad C/m^2$$

Per ogni punto di una superficie definite entro la sfera, la densità superficiale è invece nulla.

Per altre applicazioni possiamo definire anche la densità lineica (o lineare) di carica in un punto P di una linea sede di carica elettrica definendola in ogni punto come:

$$\delta_c(P) \cong \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad \text{o meglio} \quad \delta_c(P) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad \left[\frac{C}{m} \right]$$

ove Δl è la porzione (piccola) di linea intorno al punto P sulla quale è depositata la carica Δq .
Nel caso del problema, la densità lineica di carica in ogni punto di qualsiasi linea è nulla.

2.2 Generalità sui materiali per l'ingegneria elettrica. Conduttori e isolanti –

L'ingegneria elettrica suole classificare i vari materiali che essa impiega in base alle loro attitudini nei confronti dei fenomeni elettrici e magnetici. Con riferimento al comportamento elettrico, i materiali si classificano in conduttori e isolanti (o dielettrici).

La distinzione fra materiali conduttori e isolanti si fonda sul diverso comportamento di essi sotto l'azione di un campo elettrico, ossia di una distribuzione di forze elettriche che si manifestano in ciascun punto del mezzo (il campo elettrico sarà oggetto di definizione e studio nel seguito). Un campo elettrico stazionario applicato ad un materiale conduttore origina nel suo seno uno spostamento di cariche volto a creare una distribuzione di carica tendente ad annullare il campo elettrico originale. Finché ciò non si raggiunge lo spostamento di cariche persiste.

Nei dielettrici, invece, il campo elettrico crea uno stato fisico particolare (polarizzazione dielettrica, anche questa sarà oggetto di studio in un capitolo successivo) che non implica un vero e proprio trasporto di cariche elettriche, ma piuttosto uno "stiramento" degli atomi e delle molecole polari (quelle che hanno, al loro interno, regioni con cariche di segno diverso) nella direzione del campo elettrico stesso.

I conduttori li possiamo suddividere in *conduttori di prima classe* (metalli e corpi che si comportano essenzialmente come questi) e *conduttori di seconda classe* (elettroliti). Nei conduttori di prima classe il movimento di carica avviene per *conduzione elettronica pura*, in quelli di seconda classe, invece, si ha la *conduzione ionica pura*. Nei primi, quindi, la propagazione delle cariche elettriche avviene senza spostamento di materia e/o modificazioni chimiche; nei secondi, viceversa, si ha trasporto di materia (ioni) e modificazioni chimiche quali quelle dei processi elettrochimici.

Un caso di grande importanza pratica è quindi quello dei *materiali conduttori metallici*. In questi materiali, gli elettroni più esterni di ciascun atomo sono debolmente legati ai rispettivi nuclei e possono di fatto muoversi liberamente da un atomo all'altro. Essi costituiscono la cosiddetta *carica libera* del mezzo conduttore. Nel caso di corpi metallici neutri (ove il numero dei loro elettroni è pari a quello dei protoni collocati nei nuclei degli atomi) e non sottoposti ad alcun campo elettrico, la carica libera (elettroni) è uniformemente distribuita nel volume ed ogni frazione di volume è esso stesso neutro. Se invece si inseriscono in un corpo metallico degli elettroni addizionali, questi si comportano come descritto nel Problema 2.1.

Infine, dobbiamo ricordare che anche i gas, specialmente a bassa pressione, si comportano come conduttori se sottoposti ad opportuni valori di campo elettrico. La conduzione può avvenire per via ionica pura (come nell'aria) o anche per via mista ionica ed elettronica (come nel caso delle scariche in gas rarefatti).

2.3 Campo elettrico (coulombiano) – Il *campo elettrico* (coulombiano) è il concetto mediante il quale descriviamo l'evidenza sperimentale dell'attrazione elettrica coulombiana precedentemente richiamata. Precisamente, se una carica Δq è attratta o respinta da un'altra carica Q (o, in generale, da un insieme di altre cariche, non uniformemente distribuite nello spazio, che si esprime dicendo che nello spazio c'è una *separazione di cariche*), dobbiamo pensare che la carica Q (o l'insieme delle cariche) crei nello spazio circostante uno stato fisico, che chiameremo appunto *campo elettrico*, che non è visibile, ma è avvertito dalla carica Δq attraverso la manifestazione della forza elettrica coulombiana che su di essa agisce.

Il *campo elettrico* $\bar{k}_e(P)$ in un generico punto è una *quantità fisica vettoriale* che ci permette di prevedere la forza elettrica coulombiana (in ampiezza, direzione e verso) che agisce su una carica data posta appunto in P e ciò si ottiene definendolo come:

$$\bar{k}_e(P) \cong \frac{\Delta \bar{f}}{\Delta q} \quad \text{o meglio} \quad \bar{k}_e(P) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{f}}{\Delta q} \quad \left[\frac{N}{C} \right]$$

dove Δq è la carica "di prova" che viene posta in P e $\Delta \bar{f}$ la forza elettrica agente su di essa. Quindi vale anche:

$$\Delta \bar{f} = \bar{k}_e(P) \Delta q$$

La rappresentazione grafica del campo elettrico (come di ogni campo vettoriale) si fa attraverso le linee di campo e linee di flusso. Le linee di campo non sono vettori, ma linee continue orientate che nascono (o muoiono) nelle cariche sorgenti del campo. Esse non si incrociano mai, hanno direzione generalmente variabile e verso sempre da una carica positiva ad una negativa. Esse forniscono le seguenti informazioni:

1. La direzione del vettore campo elettrico in un punto è data dalla tangente alla linea di forza che passa in quel punto.
2. Le linee sono orientate e quindi determinano anche il verso del vettore campo elettrico.
3. La densità delle linee di campo può essere maggiore in certe zone, minore in altre. La densità delle linee in una zona è proporzionale all'intensità del campo in quella zona.

Problema 2.2: Studiare il campo elettrico nello spazio circostante la sfera del Problema 2.1, assumendo che sia immersa nel vuoto e nessun altro corpo (carico o neutro) sia presente.

Il problema richiama il concetto di campo elettrico. La definizione sopra richiamata è generale, valida per qualsiasi distribuzione di cariche. Si può facilmente applicare al caso di una sfera carica, come vuole il problema.

Se una carica Δq , positiva per comodità, è posta a distanza d dal centro della sfera (con d maggiore del raggio della sfera), su di essa agisce la forza di attrazione

$$\Delta f = -\alpha \frac{Q \Delta q}{d^2}$$

che, essendo la Q del Problema 2.1 negativa, $Q = -|Q|$, possiamo anche scrivere come:

$$\Delta f = \alpha \frac{|Q|\Delta q}{d^2}$$

la cui direzione sarà radiale e il verso orientato verso la sfera. Il campo elettrico sarà pertanto rappresentato in ogni punto da un vettore orientato verso la sfera e di ampiezza pari a

$$k_e(P) = \frac{\Delta f}{\Delta q} = \alpha \frac{|Q|}{d^2}$$

Potremmo rappresentare il campo disegnando i vettori campo elettrico in parecchi punti dello spazio, ma ne risulterebbe un disegno abbastanza confuso.

Le *linee di campo* o *linee di forza* sono un utile artificio grafico che permette di visualizzare l'andamento del campo elettrico in una determinata zona di spazio, senza ricorrere a continui calcoli.

L'idea delle linee di campo si deve a Michael Faraday⁵ che le utilizzò per rappresentare il campo magnetico che si manifesta nello spazio fisico intorno ad un magnete; oggi possiamo utilizzare la sua idea per rappresentare *qualsiasi grandezza di campo vettoriale*.

Qui sotto a sinistra sono mostrate le linee del campo per la sfera caricata negativamente del Problema 1.1. A destra le stesse linee per una sfera caricata positivamente come quella del Problema 1.2.



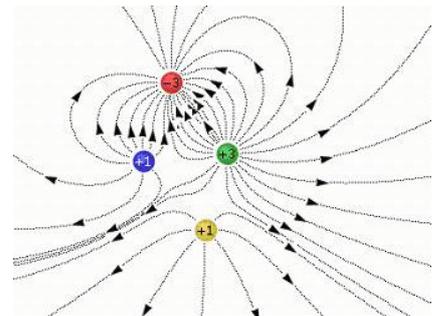
Le linee di campo non sono vettori, ma *linee continue orientate* che nascono (o muoiono) nelle cariche sorgenti del campo. Esse non si incrociano mai, hanno direzione generalmente variabile e verso sempre da una carica positiva ad una negativa.

Quali informazioni sul campo elettrico danno le linee di campo?

1. La **direzione** del vettore campo elettrico in un punto è data dalla tangente alla linea di forza che passa in quel punto.
2. Le linee sono orientate e quindi determinano anche il **verso** del vettore campo elettrico.
3. La **densità** delle linee di campo può essere maggiore in certe zone, minore in altre. La densità delle linee in una zona è proporzionale all'**intensità** del campo in quella zona.

Qui accanto è mostrata la rappresentazione con linee di forza del campo elettrico nella zona di spazio circostante quattro cariche sorgenti.

Ricordiamo che un campo si dice *uniforme* se esso è costante nello spazio, *stazionario* se è costante nel tempo. Quello qui rappresentato non è quindi uniforme. Se le cariche sono di valore costante e fisse, esso è stazionario.



⁵ Michael Faraday (Southwark, 22 settembre 1791 – Hampton Court, 25 agosto 1867) è stato un fisico e chimico britannico. Faraday ha contribuito ai campi dell'elettromagnetismo e dell'elettrochimica.

2.4 Tensione elettrica, voltmetro – La tensione elettrica, indicata qui per completezza con $v_{AB,l}$, è una quantità scalare, con segno, riferita ad una linea orientata ℓ , di estremi A (inizio) e B (fine), immersa nel campo elettrico generico \vec{k} (non necessariamente di sola natura coulombiana, come si vedrà più avanti). La tensione elettrica $v_{AB,l}$ in un campo elettrico generico quantifica il lavoro $\Delta L_{AB,l}$ svolto dalle forze del campo elettrico su una carica di prova Δq che si sposta tra i due punti estremi A e B lungo la curva orientata ℓ , diviso per la carica Δq stessa

$$v_{AB,l} \cong \frac{\Delta L_{AB,l}}{\Delta q} \quad \text{o meglio} \quad v_{AB,l} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta L_{AB,l}}{\Delta q} \quad \left[\frac{J}{C} \right], [V]$$

Si dice anche, in modo non rigoroso e guardando la prima definizione, che la tensione è il lavoro svolto dal campo elettrico su una carica di prova Δq unitaria che si sposta tra i due punti estremi A e B della curva orientata ℓ ovvero che è il lavoro per unità di carica. La tensione si misura pertanto in joule/coulomb [J/C], unità di misura cui è stato dato il nome di volt [V] in onore di A. Volta⁶.

Il lavoro ΔL è pari all'integrale di tutti i suoi contributi infinitesimi corrispondenti ad ogni spostamento infinitesimo $d\ell$ lungo la linea ℓ , ciascuno dei quali, per la definizione di lavoro compiuto da una forza, sarà pari al seguente prodotto scalare:

$$d(\Delta L) = \Delta \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = (\Delta q) \vec{k} \cdot d\vec{\ell}$$

ove \vec{k} è il campo elettrico generico in corrispondenza del punto ove si compie lo spostamento $d\vec{\ell}$. Quindi il totale lavoro ΔL lo calcoliamo con:

$$\Delta L = \int_{A,l}^B d(\Delta L) = \int_{A,l}^B \Delta \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \Delta q \int_{A,l}^B \vec{k} \cdot d\vec{\ell}$$

e in definitiva abbiamo:

$$v_{AB,l} = \frac{\Delta L}{\Delta q} = \int_{A,l}^B \vec{k} \cdot d\vec{\ell}$$

La tensione equivale quindi all'integrale di linea del campo elettrico.

Da questa relazione si deduce anche che il campo elettrico può essere misurato in volt/metro (V/m), in quanto facendone l'integrale di linea si ottiene una tensione, che è espressa in volt.

In generale la tensione $v_{AB,l}$ dipende oltre che dai punti estremi della linea ℓ anche dalla linea stessa, nel senso che a parità di punti estremi si ottengono tensioni differenti con differenti linee.

Nel caso dei campi coulombiani che sono i soli per ora considerati in questa Parte A e dovuti a una separazione statica (invariabile) di cariche, detti anche **campi elettrostatici**, la tensione NON dipende dalla linea ℓ , ma solo dai punti estremi. Tali campi sono detti anche coulombiani e indicati con \vec{k}_e .

In questo caso la tensione si può esprimere come la differenza di una quantità, omogenea con la tensione stessa, valutata nel punto A e poi nel punto B:

$$v_{AB,l} = v_{AB} = v_A - v_B$$

6 Il conte Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta (Como, 18 febbraio 1745 – Como, 5 marzo 1827) è stato un fisico italiano, conosciuto soprattutto per l'invenzione del primo generatore elettrico, della pila e per la scoperta del metano.

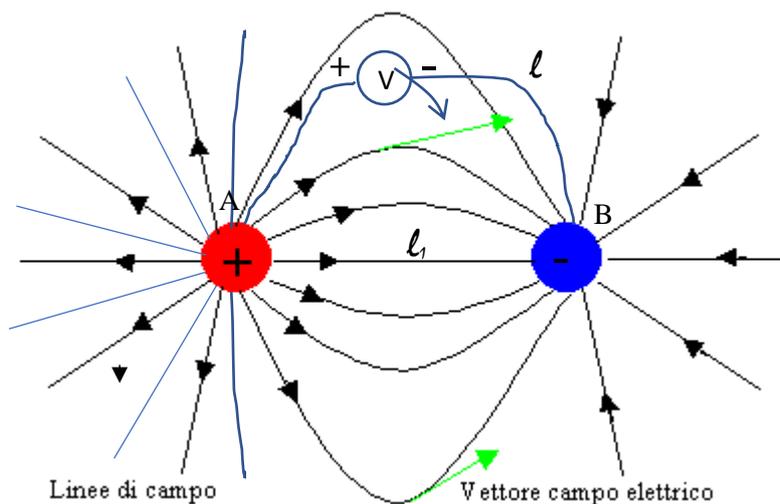
ove v_A e v_B sono detti **potenziali elettrici** dei punti A e B rispettivamente.

Il voltmetro (ideale) è lo strumento per misurare la tensione elettrica. Esso indica la tensione $v_{AB,l}$ pari all'integrale del campo elettrico \vec{k} valutato dall'estremo A (puntale) del cordone connesso al suo morsetto positivo (in genere rosso) all'estremo B (l'altro puntale) del cordone connesso al suo morsetto negativo (in genere nero).

Nel caso di campi elettrostatici la disposizione dei cordoni, fermi restando i punti A e B toccati dai puntali, non incide sulla misura della tensione. Il voltmetro reale è una buona approssimazione di quello ideale.



Problema 2.2: Calcolare l'indicazione del voltmetro ideale di figura i cui terminali sono appoggiati alle due sfere metalliche dalla prima delle quali si sono rimossi elettroni per una carica totale di $-1 \mu\text{C}$ (quindi è caricata positivamente) e sulla seconda si sono depositati elettroni per una carica complessiva di $-0.5 \mu\text{C}$ (quindi è caricata negativamente). Sia $r=1 \text{ m}$ il raggio di ciascuna delle due sfere e $d=12 \text{ m}$ la distanza dei loro centri.



Il Problema 2.2 si riferisce ad un campo coulombiano elettrostatico e pertanto la tensione misurata dal voltmetro è la stessa di un qualsiasi altro voltmetro i cui cordoni siano disposti lungo una linea che parte da A e finisce in B. Si può allora più comodamente considerare la linea l_1 di unione più breve fra le due sfere (orizzontale in figura) e le porzioni di linea lungo le sfere che uniscono tale linea ai punti A e B.

L'integrale del campo elettrostatico lungo queste porzioni di linee che giacciono sulle sfere è nullo, non potendosi avere campo tangenziale sulle superficie delle sfere altrimenti le cariche, che sono libere, si sposterebbero e non saremmo più in condizioni elettrostatiche. Rimane pertanto solo da svolgere l'integrale sulla linea l_1 di congiunzione delle due sfere, integrando da sinistra verso destra in figura, quindi, per la sfera carica positivamente, dalla distanza r dal suo centro fino a $d-r$ mentre per la sfera con carica negativa di destra, dalla distanza $d-r$ alla distanza r dal suo centro.

Usando l'espressione del campo elettrico intorno ad una sfera carica, la sovrapposizione degli effetti e chiamando con x la generica distanza di un punto su l_1 dal centro della sfera con la carica in esame si ha:

$$v_{AB} = \int_r^{d-r} \frac{\alpha Q^+}{x^2} dx + \int_{d-r}^r \frac{\alpha |Q^-|}{(d-x)^2} (-dx) = \alpha(Q^+ + |Q^-|) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d-r} \right)$$

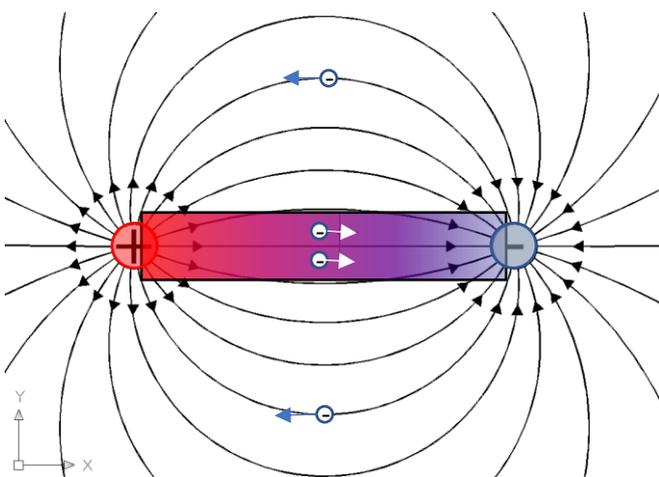
Sostituendo i valori fra i quali $Q^+ = 1 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ e $Q^- = -0.5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ ($|Q^-| = +0.5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$) si ottiene la tensione $v_{AB} = 12132 \text{ V}$.

2.5 Generatori di tensione

- Abbiamo visto che un campo elettrostatico (coulombiano) si manifesta quando c'è una distribuzione di cariche **non uniforme** ovvero quando nello spazio c'è una separazione delle cariche positive da quelle negative. La presenza di campo elettrico consente di esercitare forze sulle cariche che sono immerse nello spazio ove il campo è presente e tali forze possono svolgere (o ricevere) lavoro (cioè scambi di energia) nel caso di spostamento delle cariche. La tensione elettrica è una misura della possibilità del manifestarsi di questi fenomeni energetici, che possono essere sfruttate in varie applicazioni pratiche.

Un generatore di tensione è un dispositivo con due terminali (in linea di principio) capace di produrre e sostenere una separazione di cariche, positiva su uno dei suoi due terminali, la stessa ma negativa sull'altro. Ci sono varie soluzioni per ottenere questo risultato; meccaniche, elettrochimiche, elettromagnetiche ecc.

Per esempio, le comuni pile (e gli accumulatori) sono generatori di tensione ottenuti sfruttando processi elettrochimici che si sviluppano al loro interno a seguito dei quali una certa quantità di elettroni è spostata



da un polo (che diventa caricato positivamente, detto catodo) all'altro polo (che sarà quello negativo, detto anodo). Il processo è ostacolato dal campo elettrico che viene a crearsi fra catodo e anodo dallo spostamento stesso delle cariche che, se non vengono rimosse (caso del funzionamento a vuoto), finisce alla fine con il bloccare il fenomeno al raggiungimento di un dato ammontare di cariche separate e allora fra i due poli viene a stabilirsi una certa tensione elettrica (tensione a vuoto o forza elettromotrice) che è caratteristica della pila.

Il campo elettrico che ovunque viene a crearsi può essere sfruttato per muovere, esternamente alla pila, cariche elettriche da un polo all'altro. Quando

ciò avviene, per esempio quando un elettrone viene spostato dal polo negativo a quello positivo lungo un percorso conduttore esterno (come, per esempio, nel Problema 3.1 che si vedrà in seguito), i processi elettrochimici ripristinano l'elettrone con analogo spostamento interno (dal polo positivo al negativo). Ciò si svolge finché la pila è carica, cioè chimicamente attiva; quando è scarica i processi elettrochimici non sono più attivi e la capacità di produrre una separazione di cariche si estingue.

Capitolo 3 - Corrente elettrica – Resistenza elettrica

Premessa – Questo capitolo è dedicato ai richiami dei concetti di corrente elettrica, resistenza elettrica, legge di Ohm che dovrebbero essere noti dagli insegnamenti di Fisica. Se necessario, tali concetti possono essere rinfrescati con lo studio delle parti incorniciate di “Approfondimento”.

3.1 Corrente elettrica – La corrente elettrica è un flusso di cariche elettriche attraverso una prefissata superficie S orientata (cioè per la quale si è stabilito un verso positivo di attraversamento). L'intensità $i(t)$ della corrente elettrica è una grandezza scalare con segno che misura la portata di tale flusso di cariche attraverso la superficie S prestabilita per la quale si è definito un verso positivo di attraversamento. Consideriamo un piccolo intervallo di tempo Δt , centrato nell'istante t , e supponiamo che la *carica elettrica netta* che attraversa la superficie S nel verso stabilito sia Δq allora definiamo

$$i(t) \cong \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \text{o meglio} \quad i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad \left[\frac{C}{s} \right], [A]$$

L'intensità della corrente elettrica (brevemente: la corrente elettrica) è pertanto una grandezza scalare, con segno, riferita ad una superficie orientata e si misura in coulomb [C] al secondo [s], unità a cui è stato dato il nome di ampere e il simbolo [A].

La carica netta si valuta tenendo conto del segno delle cariche che attraversano la superficie e del verso positivo o negativo di attraversamento.

Se 3 cariche positive identiche $+q$ attraversano tutte e tre la superficie in senso positivo, la carica netta è $+3q$.

Se 3 cariche positive identiche $+q$ e una carica negativa $-q$ attraversano tutte e quattro la superficie in senso positivo, la carica netta è $+2q$.

Se 3 cariche positive identiche $+q$ attraversano tutte e tre la superficie in senso positivo e, contestualmente, una carica positiva $+q$ attraversa la superficie in senso negativo, la carica netta è $+2q$.

Se 3 cariche positive identiche $+q$ attraversano tutte la superficie in senso positivo e, contestualmente, una carica negativa $-q$ attraversa la superficie in senso negativo, la carica netta è $+4q$.

Se consideriamo una porzione piccola ΔS della superficie S, centrata nel punto P, interessata dalla frazione Δi della corrente, possiamo definire la densità (superficiale o areica) di corrente in P, normale a S, come

$$j_n(P) \cong \frac{\Delta i}{\Delta S} \quad \text{o meglio} \quad j_n(P) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S} \quad \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

Se la corrente è uniforme sulla superficie, la densità di corrente possiamo valutarla semplicemente con $j_n = i/S$.

Infine, ricordiamo che la densità di corrente $j_n(P)$, normale a S in un punto P di una superficie di un mezzo conduttore è proporzionale alla componente normale $k_n(P)$ del campo elettrico in P (non necessariamente solo coulombiano k_e). Questo concetto è esteso definendo un vettore densità di corrente $\vec{j}(P)$ proporzionale al vettore campo elettrico $\vec{k}(P)$ secondo la legge

$$\vec{j}(P) = \gamma * \vec{k}(P)$$

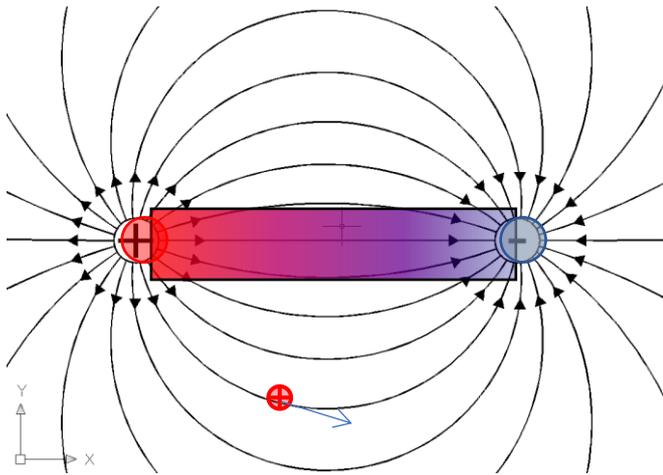
ovvero in forma inversa:

$$\vec{k}(P) = \rho * \vec{j}(P)$$

ove γ è la *conducibilità elettrica del mezzo* (unità di misura $[A(Vm)^{-1}]$) e $\rho=1/\gamma$ è la *resistività elettrica del mezzo* (unità di misura $[VmA^{-1}]$). Le due equazioni costituiscono la *legge di Ohm per le grandezze specifiche*.
 Come il campo elettrico in una certa regione può essere rappresentato graficamente dalle linee di campo o linee di flusso, così si potrà fare anche con il vettore densità di corrente. Si parlerà allora di *campo di corrente*.



Immaginiamo di prendere un generatore di tensione ideale e di annegarolo in un mezzo conduttore omogeneo di volume sufficientemente grande rispetto alle dimensioni del generatore. Potrebbe trattarsi per esempio di una vasca di mercurio



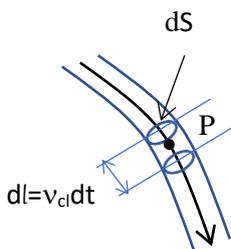
(allora le cariche libere sarebbero gli elettroni) oppure possiamo sotterrarlo nel terreno (e allora le cariche libere sarebbero gli ioni disciolti nell'acqua del suolo). Vogliamo dedurre gli effetti sulle cariche libere del mezzo conduttore. Supponiamo per semplicità che queste siano di una sola tipologia.

La sperimentazione mostra che in questo caso le cariche libere si muovono sotto l'effetto del campo elettrico, scorrendo all'interno del mezzo conduttore che oppone una certa resistenza viscosa a tale movimento. Proprio la natura viscosa della resistenza al moto porta ad osservare che le *cariche libere* si muovono con una velocità \bar{v}_{cl} (indicata in

figura per uno dei punti del mezzo) che ha la stessa direzione del campo elettrico (e stesso verso se la carica è positiva, verso contrario se è negativa) e modulo proporzionale all'intensità del campo secondo la formula, punto per punto:

$$\bar{v}_{cl} = \mu_{cl} \bar{k}$$

ove μ_{cl} è il *coefficiente di mobilità* (positivo per cariche positive, negativo per quelle negative; esprimibile in $m^2s^{-1}V^{-1}$) caratteristico di ogni tipo di carica libera.



Nota: Nel caso di moto delle cariche nel vuoto, anziché in un mezzo conduttore, non si avrebbe resistenza al moto e proporzionale al campo elettrico sarebbe l'accelerazione e non la velocità.

L'equazione appena scritta non rende conto della quantità di carica che si muove; occorre perfezionarla introducendo la densità di carica libera spaziale.

Concentriamo allora l'attenzione su un fascetto di linee di campo, lungo le quali si muovono le cariche, attorno ad una data linea; sia dS la sezione ortogonale del fascetto e prendiamo un segmento $dl=v_{cl}dt$ di tale fascetto nei pressi di un punto P. La carica libera (di un certo tipo) ivi contenuta sarà pari al volume in esame per la densità di carica:

$$dq = (dS * dl)\rho_{cl} = (dS * v_{cl} * dt)\rho_{cl} = (dS * \mu_{cl}k(P) * dt)\rho_{cl}$$

Nel tempo dt tutta la carica dq fuoriesce dal volumetto attraverso la sua sezione a valle; possiamo allora quantificare l'entità del movimento della carica elettrica che scorre lungo il nostro fascetto con la quantità

$$di = \frac{dq}{dt} = dS * \mu_{cl} \rho_{cl} * k(P) = dS * \gamma * k(P) \text{ unit\`a } \left[\frac{C}{s} = A \right] \text{ detta ampere}$$

che chiameremo *intensità di corrente elettrica* del fascetto e dove abbiamo introdotto la *conducibilità elettrica γ del mezzo* (con riferimento alla carica libera in questione; si deve esprimere in $[Am^{-1}V^{-1}]$). Osserviamo che la conducibilità del mezzo è sempre positiva, perché il coefficiente di mobilità ha lo stesso segno della densità di carica e il loro prodotto, appunto la conducibilità, è quindi sempre positivo.

Per avere una quantità che descrive il fenomeno in modo puntuale possiamo riferire l'intensità della corrente elettrica alla sezione sulla quale è definita e cioè valutare la *densità di corrente (elettrica)* nel punto P come:

$$j(P) = \frac{di}{dS} = \gamma * k(P) \quad \text{unit\`a } [A/m^2]$$

Infine, per completare il ragionamento, possiamo recuperare anche l'informazione della direzione e del verso con cui si muovono le cariche in P (lungo la linea di k) assegnando a j come era per k una natura vettoriale:

$$\vec{j}(P) = \gamma * \vec{k}(P)$$

ovvero in forma inversa:

$$\vec{k}(P) = \rho * \vec{j}(P)$$

ove $\rho = 1/\gamma$ è la resistività elettrica del mezzo (unit\`a $[VmA^{-1}]$). Le ultime due equazioni costituiscono la *legge di Ohm⁷ per le grandezze specifiche*.

3.2 - Resistività elettrica dei materiali – Nei richiami precedenti abbiamo introdotto il parametro *resistività elettrica* (detto anche resistenza elettrica specifica o volumica) *caratteristico* di ogni materiale conduttore. Essa è una misura della resistenza opposta dal materiale al movimento delle cariche elettriche al suo interno. Nel sistema internazionale la resistività si misura in $[VmA^{-1}]$ ovvero in ohm·metro $[\Omega \cdot m]$ se si definisce l'unità di misura detta ohm $[\Omega = V/A]$.

Allo stesso modo si può dire che la *conducibilità elettrica* (o *conduttanza elettrica specifica o volumica*) è una misura dell'attitudine di un materiale a consentire il movimento delle cariche elettriche al suo interno. Nel sistema internazionale la conducibilità si misura in $[\Omega^{-1}m^{-1}]$ o anche in siemens/metro $[S/m]$ se si definisce l'unità di misura $[S = 1/\Omega]$ detta siemens.

Nei metalli la resistività aumenta all'aumentare della temperatura con la legge:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

dove ρ è la resistività e T la temperatura, mentre ρ_0 è la resistività del metallo alla temperatura T_0 di riferimento, solitamente $0^\circ C$ oppure $20^\circ C$, α è il *coefficiente di temperatura* dipendente dal materiale (e dalla temperatura assunta di riferimento).

Nella grafite, nei semiconduttori (silicio per esempio) e nelle soluzioni, la resistività diminuisce, invece, all'aumentare della temperatura.

⁷ George Simon Alfred Ohm (Erlangen, 16 marzo 1789 – Monaco di Baviera, 6 luglio 1854) è stato un fisico e matematico tedesco. Utilizzando attrezzature di sua creazione, Ohm si accorse che esiste una proporzionalità diretta tra la differenza di potenziale (o tensione) applicata attraverso un conduttore e la corrente elettrica risultante (legge di Ohm).

PARTE A - CIRCUITI ELETTRICI IN REGIME STAZIONARIO

Nella costantana (lega binaria di Cu-Ni), la resistività non varia apprezzabilmente al variare della temperatura.

Nella seguente tabella sono riportate le *resistività* ρ_0 caratteristiche di alcuni materiali a condizioni normali (temperatura di 20 °C) e il valore del *coefficiente di temperatura* α .

Materiale	Resistività a 20°C (Ωm) [$\rho_{[\Omega\text{m}]} = \rho_{[\Omega\text{mm}^2/\text{m}]} * 10^{-6}$]	Resistività a 20°C ($\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$) [$\rho_{[\Omega\text{mm}^2/\text{m}]} = \rho_{[\Omega\text{m}]} * 10^6$]	Coefficiente di temperatura a 20°C ($^{\circ}\text{K}^{-1}$)
CONDUTTORI METALLICI			
Argento	1.64×10^{-8}	0.0164	3.8×10^{-3}
Rame ricotto	1.75×10^{-8}	0.0175	4.26×10^{-3}
Oro	2.35×10^{-8}	0.0235	3.8×10^{-3}
Alluminio	$2,78 \times 10^{-8}$	0.0278	4.35×10^{-3}
Tungsteno	$5,5 \times 10^{-8}$	0.055	4.5×10^{-3}
Ferro	13×10^{-8}	0.13	5×10^{-3}
Platino	$10,4 \times 10^{-8}$	0.104	3.6×10^{-3}
Bronzo	$5 \div 10 \times 10^{-8}$	0.05 ÷ 0.10	4.26×10^{-3}
Nikel-Cromo	110×10^{-8}	1.1	0.1×10^{-3}
Costantana	50×10^{-8}	0.5	0.008×10^{-3}
Manganina	40×10^{-8}	0.4	0.01×10^{-3}
Ottone	6.5×10^{-8}	0.065	2×10^{-3}
Piombo	20.8×10^{-8}	0.208	3.9×10^{-3}
Magnesio	4.3×10^{-8}	0.043	4.1×10^{-3}
Manganese	43×10^{-8}	0.43	0.004×10^{-3}
Zinco	6.1×10^{-8}	0.06	3.7×10^{-3}
Stagno	11.5×10^{-8}	0.115	4.3×10^{-3}
Tungsteno	5.5×10^{-8}	0.055	4.5×10^{-3}
Ghisa	55×10^{-8}	0.55	1.5×10^{-3}
Acciaio inox	13×10^{-8}	0.13	4.0×10^{-3}
Grafite	$4000 \div 12000 \times 10^{-8}$	40 ÷ 120	<0
LIQUIDI CONDUTTORI			
Mercurio	95.8×10^{-8}	0.958	0.9×10^{-3}
Acqua di mare	2.00×10^{-1}	2.00×10^5	--
Acqua potabile	20 ÷ 2000	$2 \div 200 \times 10^7$	--
SEMICONDUTTORI			
Silicio puro (non drogato)	$2.5 \div 3.0 \times 10^3$	$25 \div 30 \times 10^8$	-70×10^{-3}
Carbone	6.0×10^{-5}	60	--
Carburo di silicio (SiC)	$5.0 \div 7.0 \times 10^5$	$50 \div 70 \times 10^{10}$	--
Germanio (puro)	6.0×10^{-1}	6.0×10^5	--
NON CONDUTTORI (ISOLANTI)			
Aria	tra 1.30×10^{16} e 3.30×10^{16}	--	--
Olio isolante	10^{11}	10^{17}	--
Vetro	$10^{10} \div 10^{14}$	$10^{16} \div 10^{20}$	--

Porcellana	$10^{10} - 10^{12}$	--	--
Quarzo fuso	circa 10^{16}	--	--
Teflon	$10^{23} - 10^{25}$	--	--
Mica	$10^{11} \div 10^{15}$	$10^{17} \div 10^{21}$	--

3.3 Resistenza elettrica – Un circuito inerte (privo di forze elettromotrici interne) che faccia capo a due terminali, lo possiamo caratterizzare in regime stazionario (in corrente continua) con una parametro detto *resistenza elettrica* R che rappresenta il rapporto fra la tensione V fra i suoi terminali e la corrente I che lo attraversa, dal terminale (morsetto) assunto positivo per la definizione della tensione, a quello assunto negativo (versi positivi della tensione e della corrente coordinati secondo la *convenzione di segno degli utilizzatori* (vedi oltre)):

$$R = \frac{V}{I} \quad [V/A] \quad \text{da cui} \quad V = RI \quad \text{oppure} \quad I = \frac{V}{R}$$

che è nota con il nome di *legge di Ohm (per le resistenze)*.

La resistenza elettrica si misura in volt/ampere [V/A], unità di misura cui è stato dato il nome di ohm e il simbolo [Ω].

Se il valore della resistenza R è indipendente dai livelli della tensione e della corrente, possiamo rappresentare graficamente la legge di Ohm, ovvero il comportamento di un bipolo resistore di resistenza R , con una retta nel piano corrente-tensione passante per l'origine degli assi e avente pendenza R , come mostrato in Fig. 5.

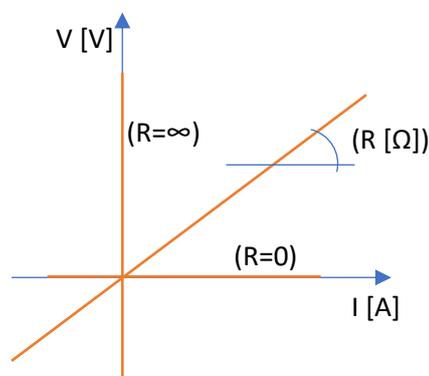


Fig. 5 - Caratteristica del bipolo resistore (circuito resistivo)

Nella figura vediamo anche i casi limite del bipolo resistore con $R=0$, *corto circuito ideale*, per il quale la tensione è nulla qualsiasi sia la corrente che lo percorre, e di $R=\infty$, *circuito aperto ideale*, per il quale la corrente è nulla qualsiasi sia la tensione ai suoi capi.

Dobbiamo ricordare che ci sono anche bipoli resistivi la cui resistenza varia, per esempio cresce con la corrente come in una lampada ad incandescenza.

Problema 3.1: *Gli estremi di una pila da 9 V sono collegati con un conduttore di Nichel-Cromo (Ni-Cr) della lunghezza di $l=1$ m e del diametro (uniforme) $d=0.2$ mm. Calcolare la corrente elettrica I che percorre il filo.*

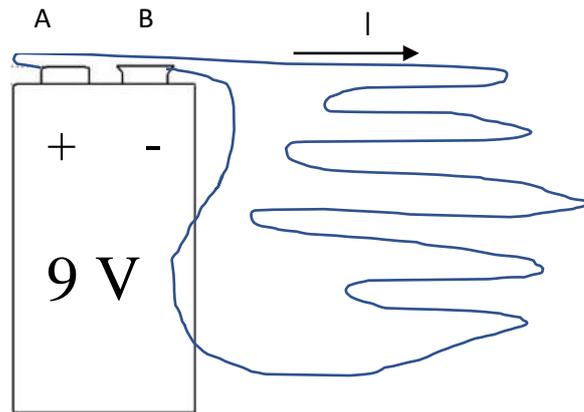
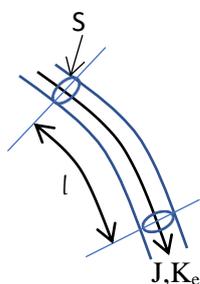


Fig. 6 - Semplice circuito resistivo

La pila è, come visto, un dispositivo elettrochimico in grado di produrre una separazione di cariche. Le reazioni chimiche al suo interno spostano elettroni dal morsetto che diventa positivo (detto *catodo* nelle pile) al morsetto negativo (detto *anodo*). Ciò determina nello spazio nel quale la pila è immersa (e all'interno della pila stessa) la formazione di un campo elettrico coulombiano. Il campo interno si oppone allo spostamento delle cariche per effetto elettrochimico e ad un certo punto lo arresta. Lo spostamento riprende se gli elettroni depositati presso l'anodo vengono rimossi e trasportati esternamente al catodo (o viceversa) mediante un percorso conduttore come in Fig. 6.

L'integrazione di linea di tale campo (cioè la tensione) lungo una qualsiasi linea geometrica che si stacca dal morsetto positivo e finisce su quello negativo della pila produce sempre lo stesso risultato: la cosiddetta *forza elettromotrice E* della pila, nel caso specifico pari a 9V, che nell'esercizio si immagina costante nel tempo e con le condizioni operative.

Il filo metallico è l'unico mezzo conduttore presente (a parte la pila) se immaginiamo che il tutto sia immerso in un mezzo isolante, per esempio in aria. Nel filo di Nichel-Cromo possiamo pertanto avere spostamenti di cariche elettriche (che saranno di fatto elettroni). Vista la natura filiforme del mezzo conduttore possiamo assumere che questo spostamento sarà in realtà uno scorrimento ordinato lungo il filo stesso. In ultima analisi, l'introduzione del filo conduttore modifica le linee del campo (mediante una modificazione della distribuzione delle cariche positive, che si depositeranno in parte anche lungo il filo, e di quelle negative, che faranno altrettanto dall'altra parte). Un fascetto di linee del campo risulterà "canalizzato" lungo il filo e sosterrà il citato scorrimento delle cariche libere lungo il filo stesso.



Per studiare il fenomeno e risolvere il problema, consideriamo una porzione di filo di *lunghezza l* e *sezione ortogonale S*, come nella figura accanto. Al suo interno troveremo un fascetto di linee di *J* e quindi di *K* (in questo caso K_e) con i due campi legati dalla legge di Ohm per le grandezze specifiche. Possiamo assumere la *J* uniforme sulla sezione (se questa è piccola). Allora troviamo che la corrente *I* che attraversa la sezione è pari a



$$I = J S = \frac{K_e}{\rho} S$$

dove ρ è la resistività elettrica del conduttore. Siccome le linee di campo sono canalizzate nel filo conduttore, nessuna carica esce da esso e pertanto la corrente calcolata *I* è la stessa per qualsiasi sezione e possiamo parlare di *corrente I che percorre il filo*.

Calcoliamo ora la tensione V prendendo come linea di integrazione l'asse del conduttore (che è linea di campo per quanto abbiamo detto in merito alla canalizzazione delle linee), a partire dal morsetto positivo e terminando su quello negativo. Troveremo:

$$V = \int_+^- \bar{K} \cdot d\bar{l} = \int_+^- K_e dl = \int_+^- I \frac{\rho}{S} dl = I \left(\rho \frac{l}{S} \right)$$

Il fattore entro parentesi definisce la *resistenza elettrica* R di un conduttore filiforme di lunghezza l , sezione ortogonale S e resistività ρ uniformi (costanti) lungo la lunghezza

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad \text{formula della resistenza di un conduttore filiforme}$$

per cui tensioni e correnti sono legate dalle relazioni

Il problema dato lo risolviamo calcolando dapprima la resistenza dell'intero filo conduttore, da un terminale della pila all'altro, con la formula della resistenza di un conduttore filiforme

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad \text{formula della resistenza di un conduttore filiforme}$$

di sezione S e resistività ρ uniformi lungo la sua lunghezza l :

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{\frac{\pi d^2}{4}} = 1.1 [\Omega \text{mm}^2/\text{m}] \frac{1[\text{m}]}{\frac{\pi (0.2)^2}{4} [\text{mm}^2]} = 35.01 \Omega$$

oppure con la

$$R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{\frac{\pi d^2}{4}} = 1.1 \times 10^{-6} [\Omega \text{m}] \frac{1[\text{m}]}{\frac{\pi (0.210^{-3})^2}{4} [\text{m}^2]} = 35.01 \Omega$$

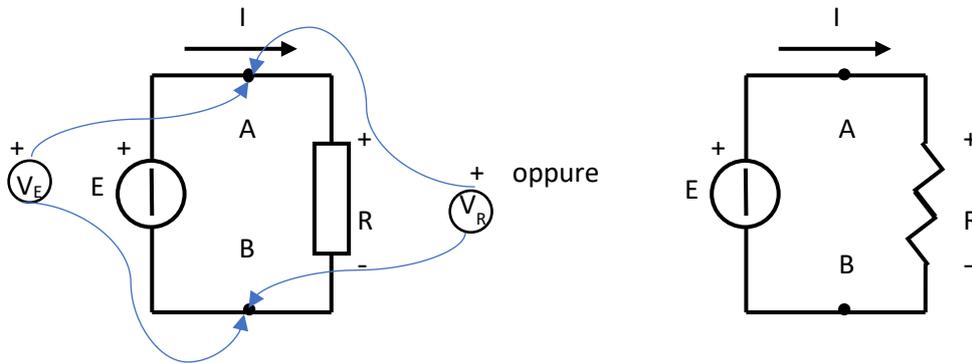
e applicando quindi la legge di Ohm del bipolo resistivo per ottenere:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{9}{35.01} = 0.2571 \text{ A}$$

3.4 Convenzioni di segno – I versi positivi di definizione (di misura) delle tensioni e delle correnti ai terminali di un circuito o di un componente possono essere coordinati secondo due diversi criteri. Vediamo di illustrarli con riferimento al sistema elettrico appena studiato al quale possiamo associare un circuito elettrico rappresentativo (un modello circuitale) che contiene le principali grandezze elettriche coinvolte e la descrizione dei componenti.

Con facile intuizione si perviene al circuito elettrico seguente ove si sono utilizzati i simboli convenzionali per rappresentare il componente a due terminali (bipolo) *generatore ideale di tensione di forza elettromotrice*

(fem) E (rappresentazione idealizzata della pila), e il bipolo resistore di resistenza R (che rappresenta il conduttore di Ni-Cr).



Il circuito evidenzia che il *nodo A* è quello connesso al morsetto positivo del generatore, mentre all'altro polo è connesso il nodo B. Evidenzia anche il *verso positivo* secondo il quale si è calcolata la corrente (cioè il verso assunto positivo per il movimento delle cariche) e, altresì, distingue il morsetto positivo da quello negativo (i morsetti sui quali dovranno poggiarsi rispettivamente i puntali positivo e negativo del voltmetro ideale) per la definizione (la misura) della tensione fra i capi del resistore. Osserviamo che il morsetto assunto positivo è quello dal quale entra la corrente positiva nel resistore; questo coordinamento di segni della tensione e della corrente è denominato convenzione di segno degli utilizzatori o dei carichi.

Nel caso invece del generatore di tensione, il morsetto scelto come positivo per la tensione è quello dal quale la corrente positiva esce dal bipolo; questa è la convenzione di segno dei generatori.

La definizione e l'uso di una o dell'altra convenzione di segno sono di estrema importanza nello svolgimento dei bilanci energetici, come vedremo.