ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.02.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(\log|x| - 4)$$

(a) determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie;

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione f è pari e $f(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = 4$ quindi per $x = \pm e^4$. Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > 4$ quindi per $x > e^4$ e $x < -e^4$.

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\log y - 4}{y^2} = 0$$

grazie la gerarchia degli infiniti. Dato che f è pari anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali o obliqui a $\pm\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è derivabile nel suo dominio in quanto composizione e prodotto di funzioni derivabili, inoltre

$$f'(x) = 2x(\log|x| - 4) + x = x(2\log|x| - 7).$$

Vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-2\log|y| - 7}{y} = 0 \qquad \text{per la gerarchia degli infiniti, dove } y = \frac{1}{x};$$

inoltre f' è dispari in quanto f è pari, quindi anche

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$

Abbiamo $f'(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = \frac{7}{2}$ quindi per $x = \pm e^{\frac{7}{2}}$. Se $x \in (0, +\infty)$ vale $f'(x) > 0$ quando $\log x > \frac{7}{2}$ quindi per $x \in (e^{\frac{7}{2}}, +\infty)$. Visto che f' è dispari, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-e^{\frac{7}{2}}, 0) \cup (e^{\frac{7}{2}}, +\infty)$. In particolare f è strettamente crescente negli insiemi $[-e^{\frac{7}{2}}, 0)$ e $[e^{\frac{7}{2}}, +\infty)$ e

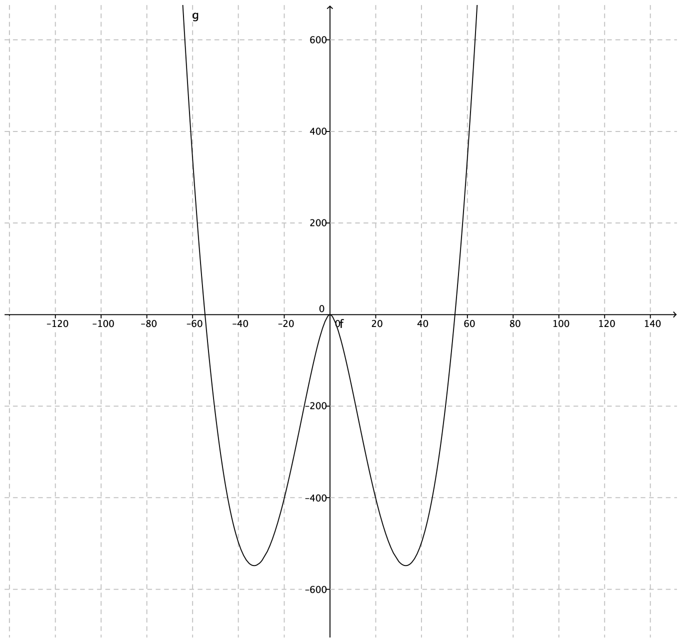

Figure 1: Grafico di f

strettamente decrescente negli insiemi $(-\infty, -e^{\frac{7}{2}}]$ e $(0, e^{\frac{7}{2}}]$. I punti $\pm e^{\frac{7}{2}}$ sono punti di minimo assoluto e la funzione assume il valore minimo $-\frac{e^7}{2}$, mentre $\sup f = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura **??**.

Esercizio 2 (8 punti) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 - 2z - i = 0.$$

Le due soluzioni sono

$$z_1 = \frac{2 + w_1}{2\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \frac{2 + w_2}{2\sqrt{3}},$$

dove w_1, w_2 sono le due radici quadrate in $\mathbb{C}$ di $b^2 - 4ac = 4 + 4\sqrt{3}i$. Le due radici w_1 e w_2 hanno modulo $\sqrt{|4 + 4\sqrt{3}i|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(4 + 4\sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{6}$ e $\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(4 + 4\sqrt{3}i\right) + \pi = \frac{7\pi}{6}$. Quindi

$$w_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}i \qquad \text{e} \qquad w_2 = -w_1 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i.$$

Dunque le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}i, \qquad z_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}i.$$

Esercizio 3 (8 punti) Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[1 + \frac{1}{3n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/3}\right],$$

(a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di $(a_n)_n$ per ogni $a > 0$;

(b) discutere il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a > 0$.

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(1-x)x^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/4} f_{1/2}(x)\,dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{1/4} f_\alpha(x)\,dx.$$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Sviluppi di Mac Laurin.

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \qquad \forall n \geq 0$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.02.2023

TEMA 2

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(2\log|x| - 3)$$

(a) determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie;

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione f è pari e $f(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = \frac{3}{2}$ quindi per $x = \pm e^{\frac{3}{2}}$. Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > \frac{3}{2}$ quindi per $x > e^{\frac{3}{2}}$ e $x < -e^{\frac{3}{2}}$.

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-2\log y - 3}{y^2} = 0$$

grazie la gerarchia degli infiniti. Dato che f è pari anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali o obliqui a $\pm\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è derivabile nel suo dominio in quanto composizione e prodotto di funzioni derivabili, inoltre

$$f'(x) = 2x(2\log|x| - 3) + 2x = 4x(\log|x| - 1).$$

Vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-4\log|y| - 4}{y} = 0 \qquad \text{per la gerarchia degli infiniti, dove } y = \tfrac{1}{x};$$

inoltre f' è dispari in quanto f è pari, quindi anche

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$

Abbiamo $f'(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = 1$ quindi per $x = \pm e$. Se $x \in (0, +\infty)$ vale $f'(x) > 0$ quando $\log x > 1$ quindi per $x \in (e, +\infty)$. Visto che f' è dispari, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-e, 0) \cup (e, +\infty)$. In particolare f è strettamente crescente negli insiemi $[-e, 0)$ e $[e, +\infty)$ e strettamente decrescente negli

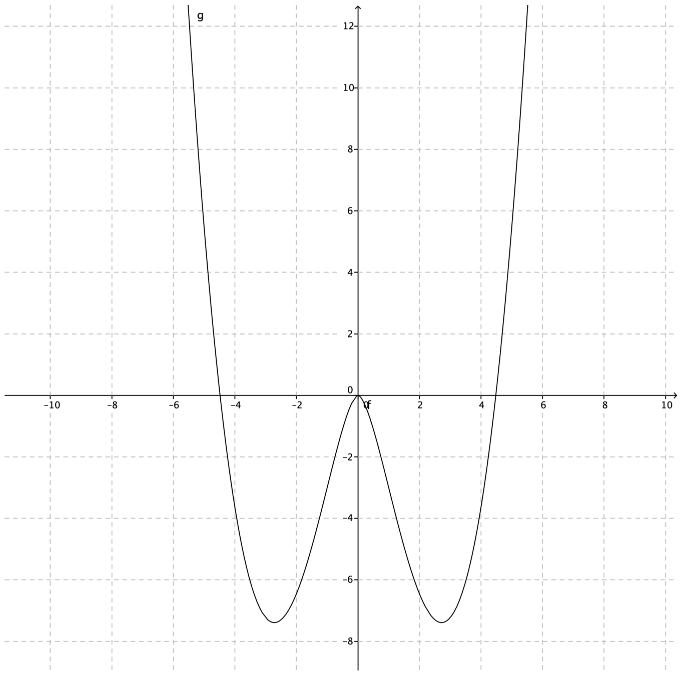

Figure 2: Grafico di f

insiemi $(-\infty, -e]$ e $(0, e]$. I punti $\pm e$ sono punti di minimo assoluto e la funzione assume il valore minimo $-e^2$, mentre $\sup f = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura **??**.

Esercizio 2 (8 punti) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 - 2z + i = 0.$$

Le due soluzioni sono

$$z_1 = \frac{2 + w_1}{2\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \frac{2 + w_2}{2\sqrt{3}},$$

dove w_1, w_2 sono le due radici quadrate in $\mathbb{C}$ di $b^2 - 4ac = 4 - 4\sqrt{3}i$. Le due radici w_1 e w_2 hanno modulo $\sqrt{|4 - 4\sqrt{3}i|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{1}{2}\text{Arg}\left(4 - 4\sqrt{3}i\right) = -\frac{\pi}{6}$ e $\frac{1}{2}\text{Arg}\left(4 - 4\sqrt{3}i\right) + \pi = \frac{5\pi}{6}$. Quindi

$$w_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}i \qquad \text{e} \qquad w_2 = -w_1 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i.$$

Dunque le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}i, \qquad z_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}i.$$

Esercizio 3 (8 punti) Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-1/2} - 1 + \frac{1}{n}\right],$$

(a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di $(a_n)_n$ per ogni $a > 0$;

(b) discutere il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a > 0$.

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(9-x)x^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 f_{1/2}(x)\, dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx.$$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Sviluppi di Mac Laurin.

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \qquad \forall n \geq 0$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.02.2023

TEMA 3

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(3\log|x| - 2)$$

(a) determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie;

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione f è pari e $f(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = \frac{2}{3}$ quindi per $x = \pm e^{\frac{2}{3}}$. Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > \frac{2}{3}$ quindi per $x > e^{\frac{2}{3}}$ e $x < -e^{\frac{2}{3}}$.

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-3\log y - 2}{y^2} = 0$$

grazie la gerarchia degli infiniti. Dato che f è pari anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali o obliqui a $\pm\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è derivabile nel suo dominio in quanto composizione e prodotto di funzioni derivabili, inoltre

$$f'(x) = 2x(3\log|x| - 2) + 3x = x(6\log|x| - 1).$$

Vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-6\log|y| - 1}{y} = 0 \qquad \text{per la gerarchia degli infiniti, dove } y = \tfrac{1}{x};$$

inoltre f' è dispari in quanto f è pari, quindi anche

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$

Abbiamo $f'(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = \frac{1}{6}$ quindi per $x = \pm e^{\frac{1}{6}}$. Se $x \in (0, +\infty)$ vale $f'(x) > 0$ quando $\log x > \frac{1}{6}$ quindi per $x \in (e^{\frac{1}{6}}, +\infty)$. Visto che f' è dispari, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se

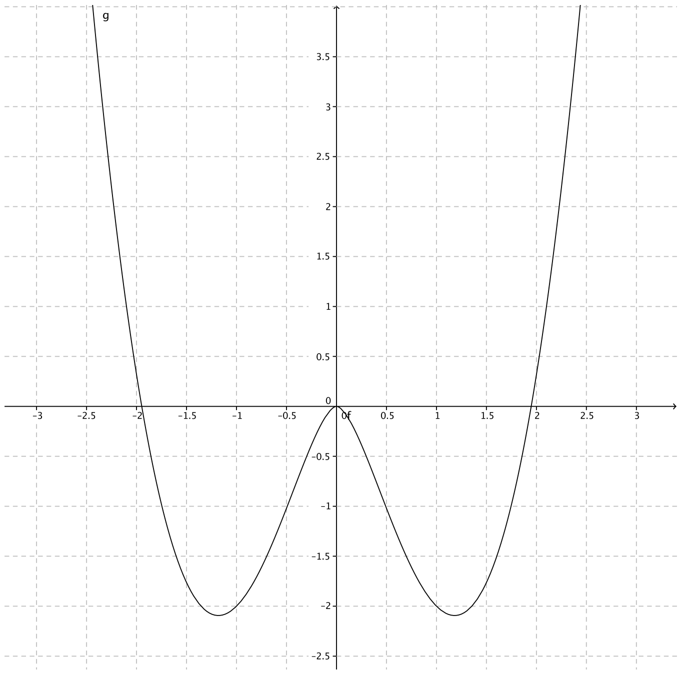

Figure 3: Grafico di f

$x \in (-e^{\frac{1}{6}}, 0) \cup (e^{\frac{1}{6}}, +\infty)$. In particolare f è strettamente crescente negli insiemi $[-e^{\frac{1}{6}}, 0)$ e $[e^{\frac{1}{6}}, +\infty)$ e strettamente decrescente negli insiemi $(-\infty, -e^{\frac{1}{6}}]$ e $(0, e^{\frac{1}{6}}]$. I punti $\pm e^{\frac{1}{6}}$ sono punti di minimo assoluto e la funzione assume il valore minimo $-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{3}}$, mentre $\sup f = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura **??**.

Esercizio 2 (8 punti) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 + 2z - i = 0.$$

Le due soluzioni sono

$$z_1 = \frac{-2 + w_1}{2\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \frac{-2 + w_2}{2\sqrt{3}},$$

dove w_1, w_2 sono le due radici quadrate in $\mathbb{C}$ di $b^2 - 4ac = 4 + 4\sqrt{3}i$. Le due radici w_1 e w_2 hanno modulo $\sqrt{|4 + 4\sqrt{3}i|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(4 + 4\sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{6}$ e $\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(4 + 4\sqrt{3}i\right) + \pi = \frac{7\pi}{6}$. Quindi

$$w_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}i \qquad \text{e} \qquad w_2 = -w_1 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i.$$

Dunque le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}i, \qquad z_2 = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}i.$$

Esercizio 3 (8 punti) Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\sinh\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/3} - 1 + \frac{1}{3n}\right],$$

(a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di $(a_n)_n$ per ogni $a > 0$;

(b) discutere il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a > 0$.

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(4-x)x^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 f_{1/2}(x)\, dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx.$$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Siluppi di Mac Laurin.

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \qquad \forall n \geq 0$$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.02.2023

TEMA 4

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(4\log|x| - 1)$$

(a) determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie;

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione f è pari e $f(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = \frac{1}{4}$ quindi per $x = \pm e^{\frac{1}{4}}$. Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > \frac{1}{4}$ quindi per $x > e^{\frac{1}{4}}$ e $x < -e^{\frac{1}{4}}$.

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;

Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-4\log y - 1}{y^2} = 0$$

grazie la gerarchia degli infiniti. Dato che f è pari anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali o obliqui a $\pm\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è derivabile nel suo dominio in quanto composizione e prodotto di funzioni derivabili, inoltre

$$f'(x) = 2x(4\log|x| - 1) + 4x = 2x(4\log|x| + 1).$$

Vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-8\log|y| + 2}{y} = 0 \qquad \text{per la gerarchia degli infiniti, dove } y = \tfrac{1}{x};$$

inoltre f' è dispari in quanto f è pari, quindi anche

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$

Abbiamo $f'(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = -\frac{1}{4}$ quindi per $x = \pm e^{-\frac{1}{4}}$. Se $x \in (0, +\infty)$ vale $f'(x) > 0$ quando $\log x > -\frac{1}{4}$ quindi per $x \in (e^{-\frac{1}{4}}, +\infty)$. Visto che f' è dispari, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se

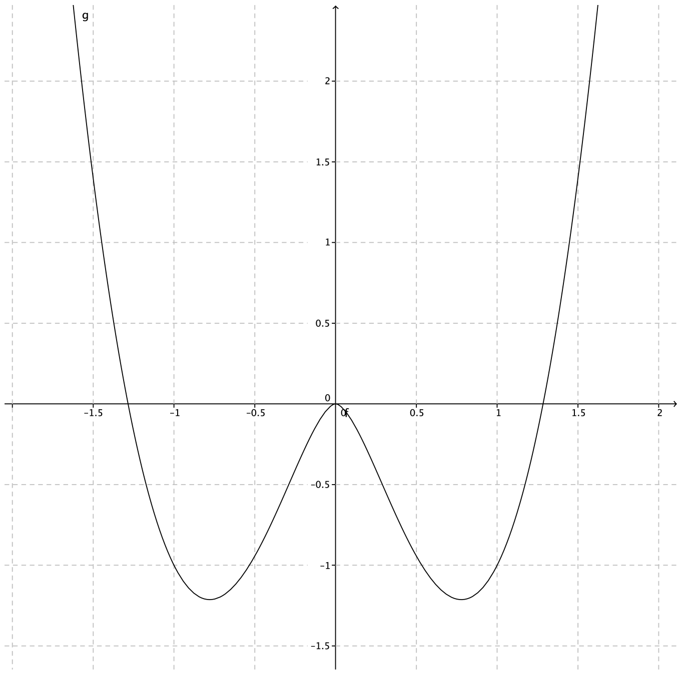

Figure 4: Grafico di f

$x \in (-e^{-\frac{1}{4}}, 0) \cup (e^{-\frac{1}{4}}, +\infty)$. In particolare f è strettamente crescente negli insiemi $[-e^{-\frac{1}{4}}, 0)$ e $[e^{-\frac{1}{4}}, +\infty)$ e strettamente decrescente negli insiemi $(-\infty, -e^{-\frac{1}{4}}]$ e $(0, e^{-\frac{1}{4}}]$. I punti $\pm e^{-\frac{1}{4}}$ sono punti di minimo assoluto e la funzione assume il valore minimo $-2e^{-\frac{1}{2}}$, mentre $\sup f = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura **??**.

Esercizio 2 (8 punti) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 + 2z + i = 0.$$

Le due soluzioni sono

$$z_1 = \frac{-2 + w_1}{2\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \frac{-2 + w_2}{2\sqrt{3}},$$

dove w_1, w_2 sono le due radici quadrate in $\mathbb{C}$ di $b^2 - 4ac = 4 - 4\sqrt{3}i$. Le due radici w_1 e w_2 hanno modulo $\sqrt{|4 - 4\sqrt{3}i|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{1}{2}\text{Arg}\left(4 - 4\sqrt{3}i\right) = -\frac{\pi}{6}$ e $\frac{1}{2}\text{Arg}\left(4 - 4\sqrt{3}i\right) + \pi = \frac{5\pi}{6}$. Quindi

$$w_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}i \qquad \text{e} \qquad w_2 = -w_1 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i.$$

Dunque le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}i, \qquad z_2 = \frac{-2 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}i.$$

Esercizio 3 (8 punti) Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\arctan\left(\frac{1}{n^a}\right)} \left[1 + \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/2}\right],$$

(a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di $(a_n)_n$ per ogni $a > 0$;

(b) discutere il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a > 0$.

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(16-x)x^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 f_{1/2}(x)\,dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx.$$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Sviluppo di Mac Laurin.

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \qquad \forall n \geq 0$$

$$\arctan(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$